# 目 录

# CONTENTS

# §1. 环域定理、指标定理和它们的推广；通道、障碍、源和渊

下述判别环域中极限环存在性的 Poincaré-Bendixson 定理是人所熟知的。

**定理 1.1** 设 $G$ 是位于两条单闭曲线 $L_1 \supset L_2$ 之间的环域，对于某一平面光滑向量场来说，$G$ 内部以及 $L_1$ 和 $L_2$ 上都没有奇点；又设当 $t$ 增加时，从 $L_1$、$L_2$ 上出发的轨线都进入（或都离开）$G$。则在 $G$ 内必至少存在一条闭轨线 $L$，使 $L_2 < L < L_1$[1]。

至于 Poincaré 的指标定理（见文献[1.1]）如下所述：

**定理 1.2** 若 $G$ 为单联通域，其境界为光滑闭曲线 $L$。如果对于某一奇点个数有限的平面光滑向量场的轨线来说，$L$ 上有 $\sigma$ 个内切点，$\nu$ 个外切点，又 $L$ 上无奇点。则 $G$ 中奇点的指标总和为：

$$\sum_i \mathrm{ind} O_i = 1 + \frac{\sigma - \nu}{2}, \tag{1.1}$$

情况就不是这样。虽然文献[1.2]中也有严格证明，但几乎未被人们所注意到。即使是环域定理，它过去也只是被 Bendixson 推广成为"研究平面有界区域中轨线的 $\omega$ 极限集"的理论，至于向多联通域的推广，则是本世纪 60 年代以后的事(见文献[1.3])。但是由于推广以后的定理只能保证(在非常广泛的意义之下的)奇闭轨线的存在性，故实用价值不大。

本节的内容分为两段；第一段假设定理1.2中 $G$ 的境界线的光

---

1) 更强的结论见文献[1.12]定理 1.6 及其推论，并参考文献[1.13]关于此定理的讨论。

滑性和不含奇点的性质不变，而把它向多联通域推广，同时也得到一些关于闭轨或"通道"(意义见后)的存在性定理。第二段在去掉境界线光滑和不含奇点的假定以后，证明定理 1.2 的结论仍然成立，并用以导出二次系统奇点性质相互影响的有趣事实 (见文献[1.4])。

**定理 1.3** 设 $G$ 为 $n$ 联通域，其境界线为不含奇点的光滑闭曲线 $L_1, L_2, \cdots, L_n$，其中 $L_1$ 为外境界线，$L_2, \cdots, L_n$ 为内境界线。约定把 $L_1$ 的内(外)切点叫做 $G$ 的境界上的内(外)切点；$L_2, \cdots, L_n$ 的外(内)切点叫做 $G$ 的境界上的内(外)切点。设 $G$ 的这 $n$ 条境界线上总共有与轨线相切的 $\sigma$ 个内切点，$\nu$ 个外切点。则 $G$ 内奇点的指标总和为：

$$\sum_i \mathrm{ind} O_i = 2 - n + \frac{\sigma - \nu}{2}. \qquad (1.2)$$

**证** 设 $L_1$ 上有 $\nu_1$ 个外切点，$\sigma_1$ 个内切点，$L_i\ (i=2, \cdots, n)$ 有 $\nu_i$ 个外切点；$\sigma_i$ 个内切点。对每一 $L_i$，应用定理 1.2，可知在 $L_1$ 内部的奇点指标总和为

$$1 + \frac{\sigma_1 - \nu_1}{2},$$

而在 $L_i\ (i=2, \cdots, n)$ 内部的奇点指标总和为

$$1 + \frac{\nu_i - \sigma_i}{2} \quad (i = 2, 3, \cdots, n).$$

于是知道 $G$ 内奇点的指标总和为：

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{\sigma_1 - \nu_1}{2} - \sum_{i=2}^{n}\left(1 + \frac{\nu_i - \sigma_i}{2}\right) \\ & = 2 - n + \frac{1}{2}\{\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n - (\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n)\} \\ & = 2 - n + \frac{\sigma - \nu}{2}. \end{aligned}$$

定理证毕。 ▌

**注 1.1** 在文献[1.4] 中注意到由定理 1.3 可以很自然地证明熟知的古典的定理：

亏格为 $n$ 的可定向闭曲面上的光滑动力系统，其奇点的指标总和为 $2-2n$。

**注 1.2** 在文献[1.5]中把定理 1.3 推广到了可定向和不可定向的带边闭曲面的情况。

现在利用定理 1.3 来证明一个新的闭轨不存在的定理，它和定理 1.1 可以说是同一个问题的两个方面(见文献[1.6])。

**定理 1.4** 设 $G$ 为环域，其外境界 $L_1$ 上有轨线的 $n$ 个外切点，$m$ 个内切点($n\neq m$)；其内境界 $L_2$ 上有轨线的 $n'$ 个内切点，$m'$ 个外切点，且 $n'-m'=n-m$。又设 $G$ 中不存在奇点，则 $G$ 中亦无闭轨。

**证** 由定理 1.3 知 $G$ 中奇点的指标总和为：

$$\frac{m-n}{2}+\frac{n'-m'}{2}=0,$$

所以定理假设 $G$ 中无奇点是合理的。现在用反证法：设 $G$ 中有闭轨线 $C$，若 $C$ 内部不含 $L_2$，则 $C$ 内部的奇点应在 $G$ 内，这不可能。今设 $C$ 包含 $L_2$ 在其内部，由于 $C$ 内部奇点指标总和为 1，而 $L_2$ 内部奇点指标总和为

$$1+\frac{m'-n'}{2}\neq 1,$$

故在 $C$ 与 $L_2$ 之间还应有奇点，它们应都在 $G$ 内，又导出矛盾。证毕。∎

**注 1.3** 由定理 1.4 的假设知道，它和定理 1.1 有着本质的差别。在定理 1.1 中 $L_1$ 或 $L_2$ 上内外切点的个数相等(都等于零)；而在定理 1.4 中 $L_1$(或 $L_2$)上内外切点的个数不相等。

注意及此，我们下面可以考虑两方面的问题：

1) 当 $L_i$ 上的内外切点个数不相等时，既然在适当的条件之下，可以证明 $G$ 中无闭轨，那末其他还可得出什么有用的结论？

2) 当 $L_i$ 上内外切点个数不为零，但却相等时，能否像环域定理一样，推出闭轨的存在性？

关于第一个问题，先证明下面一个简单而有趣的定理(见文献[1.6])。

**定义 1.1** 以两条轨线为境界的一束轨线，它们从 $L_1$ 的外部

跑进 $G$，然后穿过 $L_2$ 跑到 $L_2$ 的内部（不一定占有全部 $L_2$ 的内部）；然后又从 $L_2$ 的内部跑出，进入 $G$，最后穿过 $L_1$ 跑到 $G$ 的外部。这样一束轨线称为一条"通道"。

**定理 1.5** 当 $G$ 为一环域，在其外境界线上有两个外切点，在其内境界线上有两个内切点，且 $G$ 内无奇点，则过两内切点的轨线包围一穿过 $G$ 的通道（如图 1.1 所示）。这时 $G$ 内显见不存在极限环。

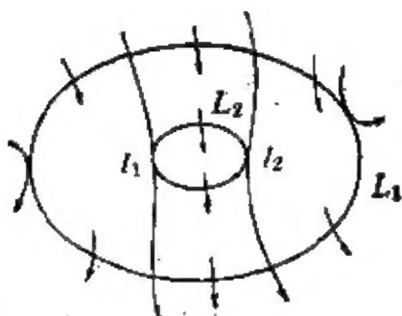



图 1.1

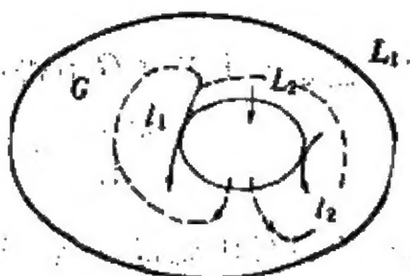



图 1.2

**证** 如图 1.2，设内切线 $l_1$ 来自 $L_2$ 内部，则只有如虚线所示的两种可能性。不论是哪一种可能性，$l_1$ 或 $l_2$ 的 $\omega$ 极限集都将在 $G$ 内部，从而 $G$ 中将存在奇点，这不可能。因此，$l_1$ 必定来自 $L_1$ 的外部。同法可证，当 $t$ 增加时，$l_1$ 将跑出 $L_1$ 的外部，如图 1.1 所示。同理可证：$l_2$ 必定来自 $L_1$ 的外部，并且后来还是跑到 $L_1$ 的外部。∎

**注 1.4** 显见，对 $n\geqslant 3$ 的联通域，也可类似地定义通道。又由于在通道的定义中不考虑轨线在 $L_2$ 内部的情况，故可能出现"宽度为零"的通道，如图 1.3 所示。又若一通道穿过 $G$ 的 $k$ 个 $(k\geqslant 2)$ 内部区域，则它称为 $k$ 重通道。如图 1.4 中的通道是二重

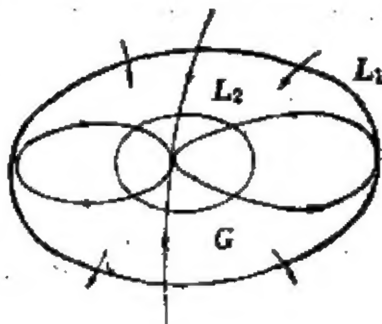



图 1.3

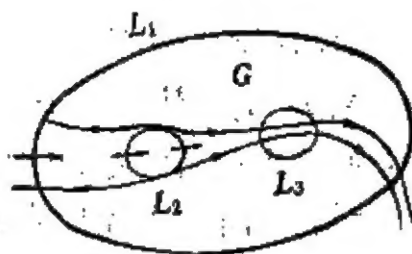



图 1.4

的。

与"通道"相对立的是"障碍"、"源"和"渊"的概念。我们不需像"通道"那样，给他们下严格的定义，而只用下列三个图（图 1.5）表示之。




图 1.5

**注 1.5** 当 $G$ 是双联通域时，上述 4 种东西是相互排斥的；当 $G$ 是 $k\geqslant 3$ 联通域时，它们中的 2 个、3 个或 4 个是可以并存的。

**注 1.6** 一般来说，障碍是个 1 维集，源和渊是个 2 维集。但在特殊情况，障碍可以是个 2 维集，源和渊可以是个零维集，即退缩为一点（见文献[1.18]）。

关于"通道"的个数，有下面一个定理（见文献[1.7]）：

**定理 1.6** 设 $G$ 为一 $n(n\geqslant 2)$ 联通域，$L_1$ 是它的外境界线，$L_2, \cdots, L_n$ 是它的内境界线，设 $\sigma_i$ 与 $\nu_i$ 是 $L_i$ 上的相对于某一光滑动力系统的轨线的内切点与外切点数。今设 $\nu_1=2m$，$\sigma_1=0$；$\nu_i=0(i=2, \cdots, n)$，$\sum\limits_{i=2}^{n}\sigma_i=2(m+k)$（其中 $m\geqslant 1$，$0\leqslant k\leqslant n-2$ 皆为非负整数），从而 $G$ 内奇点的指标总和是 $k+2-n$。假设 $G$ 中恰有 $n-k-2$ 个初等鞍点，别无其他奇点，则：

1) 当 $2\leqslant n<m+2+k$ 时，过 $G$ 的通道至少有

$$p=2(m+2+k-n)\text{条},$$

除了 $m=1, n=2, k=0$ 的情况以外，这时 $p=1$。

2) 当 $n\geqslant m+2+k$ 时，可以不存在通道。

**证明** 先证 2)：当 $n\geqslant m+2+k$ 时，有 $m+k\leqslant n-2<n-1$，如图 1.6，我们取 $\sigma_2=\sigma_3=\cdots=\sigma_{m+k+1}=2$，并设 $l_1$、$l_2$ 是两条从 $L_1$

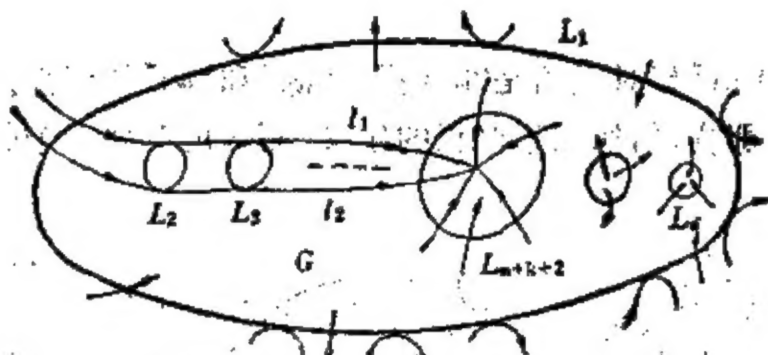
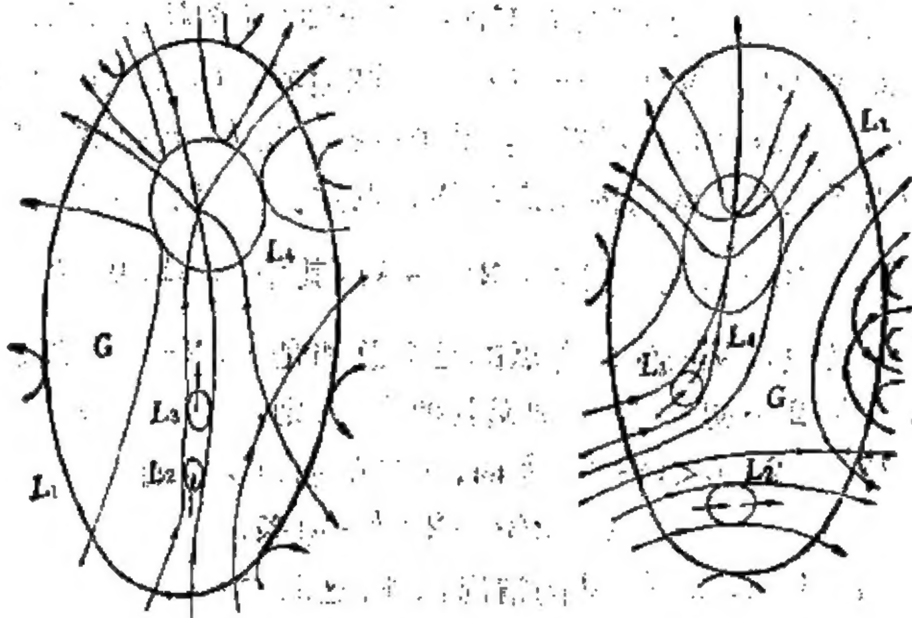



图 1.6

外部进入 $G$，与 $L_2, \cdots, L_{m+k+1}$ 相外切，且都进入 $L_{m+k+2}$ 内部的轨线(图 1.6)。显见这时不存在通道。

次证 1)：当 $m=1$，$n=2$ 时，必有 $k=0$，本定理归结为定理 1.5，即有 $p=1$。

其次，当 $2 \leqslant n < m+2+k$ 时，有 $m+k > n-2 \geqslant 0$。今取 $\sigma_2 = \cdots = \sigma_{n-1} = 2$，而 $l_1$、$l_2$ 如前，是从 $L_1$ 外部进入 $G$，与 $L_2, \cdots, L_{n-1}$ 相切，最后都进入 $L_n$ 内部的两条轨线(当 $n=2$ 时，以上这句话用不到)。今 $\sigma_n = 2(m+k-(n-2))$（当 $n=2$ 时，$k=0$），如定理 1.5




$n=4$, $k=1$, $m=3$, $p=4$

图 1.7

$n=4$, $m=3$, $k=0$,
$2(m-n+2+k)=2$，但 $p=3$

图 1.8

一样，可证明将有 $2(m+k-(n-2))=2(m+k+2-n)$ 条通道经过 $L_1$ 与 $L_n$。图 1.7 所示是 $n=4$, $k=1$, $m=3$, $p=4$ 的情况。∎

注意：图 1.7 给出了在条件 $n<m+2+k$ 之下最少个数的通道。如果代替图 1.7，像 $L_2$ 那样的内境界线少一些，而像 $L_n$ 那样的内境界线多一些，则通道的数目将大于 $2(m-n+2+k)$，见图 1.8。

**注 1.7** 若 $\sigma_1\neq0$，则可将定理中的条件改为：

$$\nu_1-\sigma_1=2m,\ \sum_{i=2}^{n}(\sigma_i-\nu_i)=2\ (m+k)\quad(m\geqslant0).$$

在此条件下，对图 1.9 中的轨线图则有 $m=k=0$, $n=3>2$，不存在通道。在改动后的条件下，定理的证明与前类似。

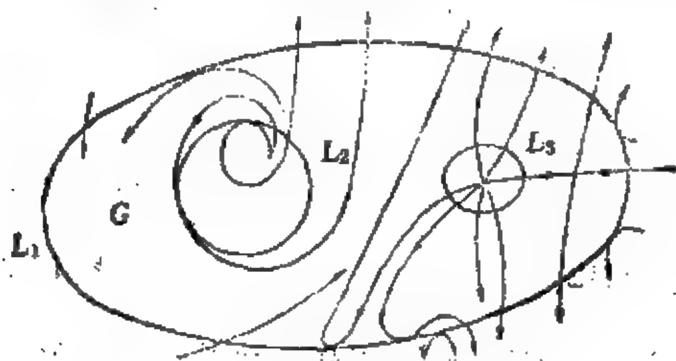



图 1.9

**注 1.8** 当 $n-k-2<0$ 或 $k>n-2$ 时，即使将定理中的假定"$G$ 中恰有 $n-k-2$ 个初等鞍点"改为"$G$中恰有$k+2-n$个结点"，定理也不一定成立。如图 1.10，$n=2$, $m=1$, $k=1$, $k+2-n=1$, $n<m+2+k$, $p=4$，但只有两条通道。

**注 1.9** 图 1.11 说明定理中的条件 $k\geqslant0$ 不能取消。在这里 $m=3$, $n=2$, $k=-2$, $n<m+2+k$, $p=2(3+2-2-2)=2$，但只有一条通道。

下面研究第二个问题，我们只看双联通域的情况：

1) 外境界线 $L_1$ 上无切点，设轨线都从 $L_1$ 外部进入 $G$，内境界线 $L_2$ 上有内外切点各一个，又设 $G$ 中无奇点。

如图 1.12，设与 $L_2$ 相切的轨线 $l_1$ 来自 $L_1$ 外部，且最后进入

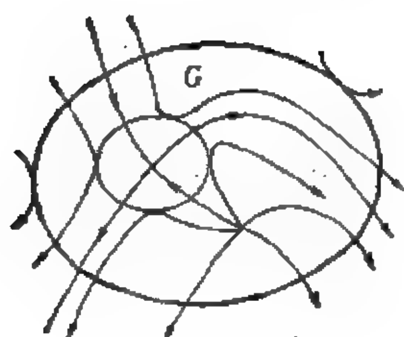



图 1.10

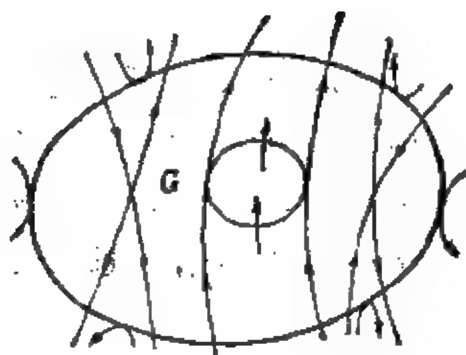



图 1.11

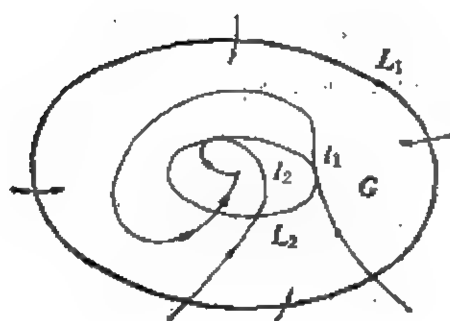



图 1.12

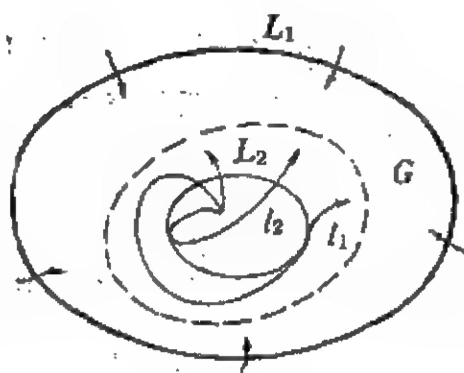



图 1.13

$L_2$ 的内部。这时，其他与 $L_1$ 相交的轨线也都如此。显见不存在极限环而有渊。反之，如图 1.13，$l_1$ 来自 $L_2$ 的内部，则易见 $G$ 中必存在极限环。另一方面，由定理 1.6 及注 1.7 知 $m=k=0$，$n=2=m+2+k$，故不存在通道。与 1) 类似的是：

2) 内境界线 $L_2$ 上无切点，设轨线都从 $L_2$ 内部进入 $G$，外境界线 $L_1$ 上有内外切点各两个。

如图 1.14，设 $l_1$ 来自 $L_2$ 内部，因 $G$ 中无奇点，故 $l_1$ 必走向 $G$ 的外部。这时 $l_2$ 亦必定来自 $L_2$ 内。显见不存在极限环而存在源。反之，如图 1.15，若 $l_1$ 来自 $L_1$ 外部，$l_2$ 也来自 $L_1$ 外部，则 $l_1$、$l_2$ 与 $L_1$ 上介于两者之间的两弧段构成 Bendixson 环域的外境界线，$L_2$ 构成内境界线，故由定理 1.1 知，必存在极限环。

**例 1.1** （见文献[1.6]）对于熟知的 van der Pol 方程

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-x+\mu(1-x^2)y,\ \mu>0, \tag{1.3}$$

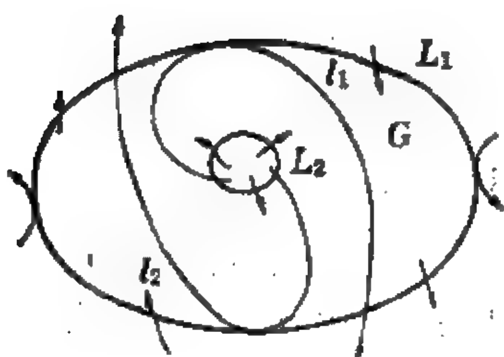



图 1.14

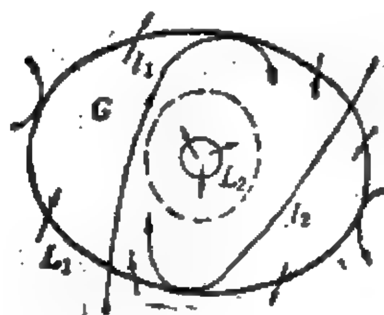



图 1.15

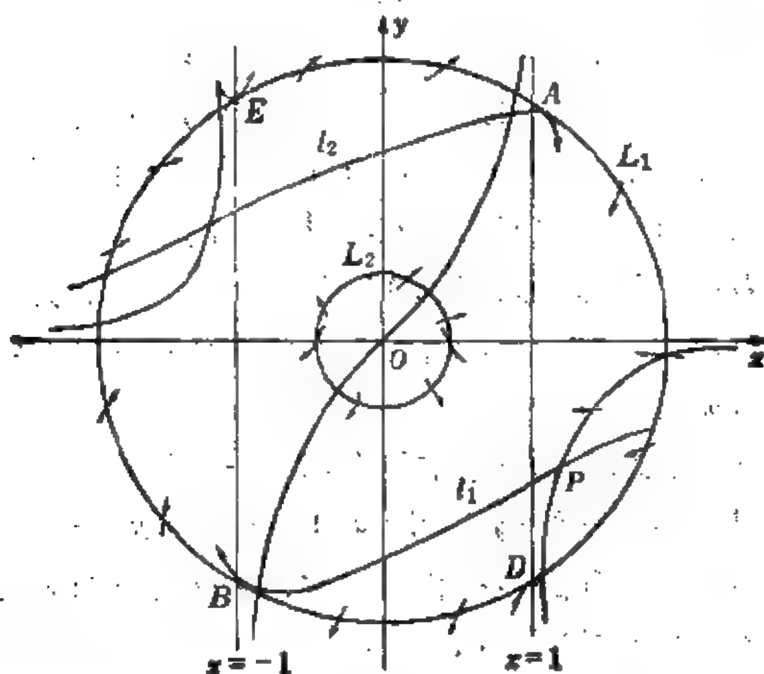



图 1.16

我们先取环域 $G$，它以

$$L_2:\ x^2+y^2=\frac{1}{2}$$

为内境界线，$L_1$: $x^2+y^2=C\gg 1$ 为外境界线(图 1.16)。再取李函数 $V=x^2+y^2$，则有：

$$\dot{V}=2xy+2y[-x+\mu(1-x^2)y]$$

$$=2\mu y^2(1-x^2)\quad\begin{cases}\geqslant 0, & 当\ |x|<1;\\ \leqslant 0, & 当\ |x|>1.\end{cases}$$

由此可见，与 $L_2$ 相交的轨线都从 $L_2$ 内部穿出而进入 $G$。为了确

定 $L_1$，可在水平等倾线 $x=\mu(1-x^2)y$ 的右下支上任取一点 $P$，设过 $P$ 的方程(1.3)的轨线是 $l_1$，沿着 $l_1$ 有 $\dot{x}<0$，$\dot{y}<0$，故 $l_1$ 当 $t$ 增加时向左下方前进。由于

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}+\mu(1-x^2),$$

显见 $l_1$ 不可能以 $x=-1$ 作为它的铅直渐近线，即后来必与 $x=-1$ 交于一点 $B$，这时它已由向左下方前进改为向左上方前进了。我们就取以原点为中心过 $B$ 点的圆作为 $L_1$。在 $B$ 点左方有 $\dot{V}<0$，故 $l_1$ 只与 $L_1$ 内切于 $B$ 点而保持在 $L_1$ 内部。由方程(1.3)关于原点的对称性，可知 $l_1$ 的对称轨线 $l_2$ 只同 $L_1$ 内切于 $B$ 的对称点 $A$。这样一来，$l_1$、$l_2$ 以及 $L_1$ 上介于它们之间的弧段就构成了 Bendixson 环域的外境界线，从而(1.3)存在包围 $O$ 的极限环。

**注1.10** 由以上的证明可知：(1.3)的极限环不能与水平等倾线的左右两支相遇。又若已知 $x^2+y^2=C_1$ 可作为 Bendixson 环域的外境界线，则对 $C_2>C_1$，在 $x^2+y^2=C_2$ 与 $x^2+y^2=C_1$ 之间必不存在极限环。

**例 1.2** 在文献[1.8]中作者们在一定的条件下证明了方程

$$\dot{x}=x(1+y)(c-b-y^2),\ \dot{y}=x(1+y)(b+y^2)-ay \tag{1.4}$$

在第一象限中极限环的存在和唯一性。关于存在性部分，我们给出一个较简单而自然的证法如下：

文献[1.8]对方程(1.4)已假设：

$$a>0,\ c>b\geqslant 0,\quad \frac{2(c-b)}{c}>\frac{1}{1+\sqrt{c-b}}. \tag{1.5}$$

这保证方程(1.4)除了 $O(0,0)$ 是鞍点以外，在第一象限中有唯一的奇点 $P\left(\dfrac{a\sqrt{c-b}}{c(1+\sqrt{c-b})},\ \sqrt{c-b}\right)$，且它是不稳定焦点或结点，如图1.17所示。$\overrightarrow{AO}$ 是沿 $y$ 轴进入 $O$ 的分界线，取 $V=x+y$，则 $\dot{V}=0$ 是一双曲线

$$x=\frac{ay}{c(1+y)}, \tag{1.6}$$

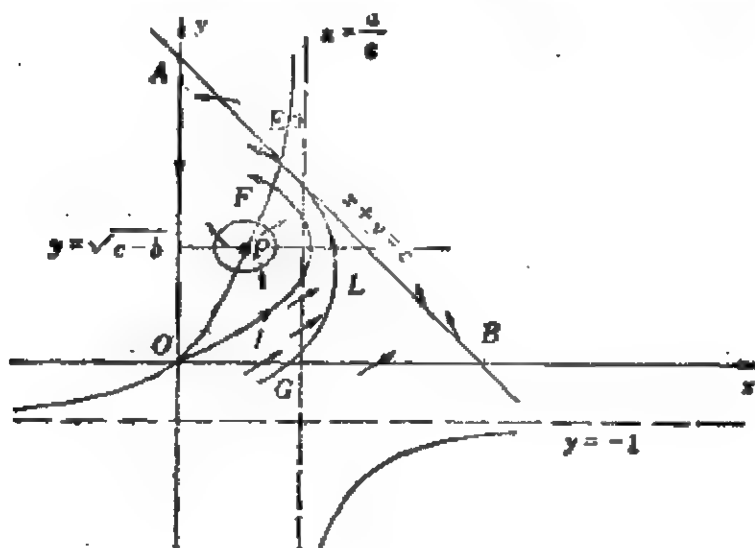



图 1.17

它有渐近线 $x=\frac{a}{c}$ 与 $y=-1$。研究从 $O$ 出发进入第一象限的分界线 $l$，易证它在与水平直线 $y=\sqrt{c-b}$ 相交以后将回头向左上方前进，且与(1.6)再相交于 $F$。今取 $c$ 很大，使 $x+y=c$ 与(1.6)交于 $F$ 的上方 $E$ 点，与坐标轴交于 $B$ 及 $A$。于是过 $E$ 而与 $x+y=c$ 内切的轨线 $L$ 将位于 $l$ 的右方，且 $L$ 来自 $x$ 轴的下方。这样，$L$ 与 $x$ 轴上的线段 $\overline{OG}$、$x+y=c$ 上的线段 $\overline{AE}$ 以及 $y$ 轴上的线段 $\overline{AO}$ 一起构成 Bendixson 环域的外境界线，于是极限环的存在性得证。▌

**注 1.11** 在生态学和化学反应中出现的两方程右端常含有许多相同而符号相反的项，这就使 $x+y$ 比较简单，因此我们自然地想到取 $V=x+y=c$ 作为环域的境界线的一部分，这时 $\dot{V}=0$ 与 $V=c$ 只有少数的交点．容易求出，在该处轨线与 $V=c$ 相切。

**例 1.8** 在图 1.18 中区域 $G$ 的边界上有两个外切点，内部有一个鞍点和一个非鞍点（见文献[1.9]）。不难证明：若在 $G$ 中没有极限环，则必有连接 $A$ 与 $B$ 的轨线（见文献[1.6]）。

在图 1.19 中区域 $G$ 的境界上有 4 个外切点，两个内切点，$G$ 内部有一个鞍点和一个非鞍点。这时可以不存在连接 $A$ 与 $B$ 的轨线。

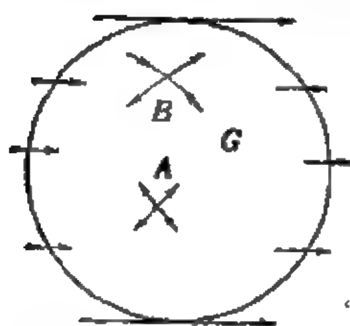


图 1.18

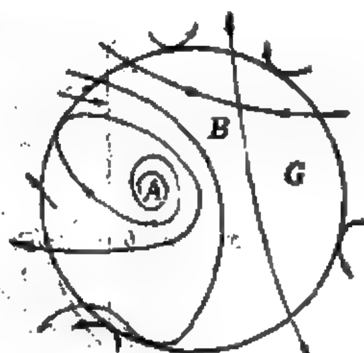


图 1.19

下面研究：如何把定理 1.2 推广到 $G$ 的边界上可以有奇点因而是非光滑的情况。由于向量场的奇点个数有限，所以问题归结为：当 $G$ 的边界 $L$ 上有奇点而被去掉奇点并且光滑化以后，$L$ 上能添加几个切点？又因定理的内容是要确定 $G$ 内部奇点指标总和，所以"光滑化"时我们总设法把奇点移到边界外部。

先看 $L$ 上有初等奇点的情况(见文献[1.10])。

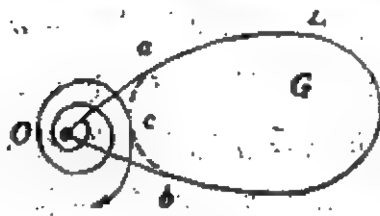


图 1.20

1) 焦点 如图 1.20，设 $G$ 的边界 $L$ 上一奇点 $O$ 是焦点。我们可以在 $O$ 点邻近改取一光滑弧段 $\widehat{ab}$ (图中虚线所示)以代替 $L$ 上原来的弧段 $aOb$，且可使 $\widehat{ab}$ 在 $a$ 与 $b$ 两点与 $L$ 的其余部分光滑地连接，又与 $O$ 邻近的螺线只相切于一点 $c$。对新的边界 $L'$ 来说，$c$ 是一个外切点。因此说，焦点相当于一个外切点，对它有 $\nu=1$, $\sigma=0$。

2) 鞍点 由于过鞍点有两条分界线，故若鞍点 $O$ 在 $G$ 的边界 $L$ 上，则有三种可能：i) 两分界线都在 $G$ 外部；ii) 一分界线在 $G$ 内部，一分界线在 $G$ 外部；iii) 两分界线都在 $G$ 内部。这里所谓在外部或内部，当然是指 $O$ 点邻近的分界线，而不是指整条分界线。分界线在 $O$ 点邻近成为 $G$ 的边界的情况以后再讨论。由图 1.21, 1.22, 1.23 可看出：在情况 i) $O$ 相当于一个外切点，在情况 ii) $O$ 相当于一个常点，即不是切点；在情况 iii) $O$ 相当于一个

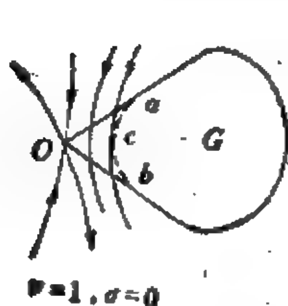



图 1.21

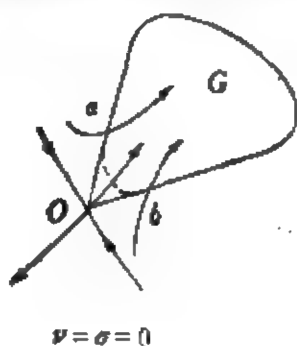



图 1.22

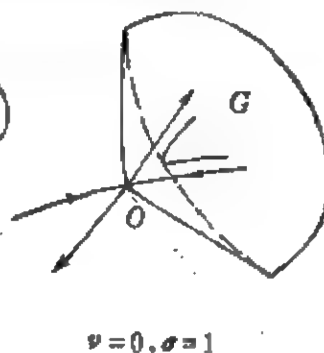



图 1.23

内切点。(还有其他可能，在此未画出来。)

3) 结点　正常结点有两个特征方向，沿特征方向$k_1$只有一条轨线进入(或离开)此结点；沿另一特征方向$k_2$则有无数条轨线进入(或离开)它，如图1.24，当$k_1$在区域之内而$k_2$在区域之外时，此结点相当于常点；反之，若$k_2$在区域之内，而$k_1$在区域之外时，则如图1.25，结点相当于两个外切点；又若$k_1$、$k_2$同在区域之内(图1.26)或同在区域之外(图1.27)，它都被当成一个外切点。其次，单向结点只有一个特征方向$k$，它可被看成图1.26或1.27中$k_1 \to k_2$的极限情况。因此，不论$k$在区域之外或区域之内，它都被当成一个外切点。最后，对星形结点，即沿每一方向都有唯一的轨线进入(或离开)此结点；这时按照轨线在结点邻近弯曲的情况不同(这依赖于方程的非线性项)，亦即轨线穿过区域边界的三种不同情况，它可被看成常点(图1.28)，外切点(图1.29)，

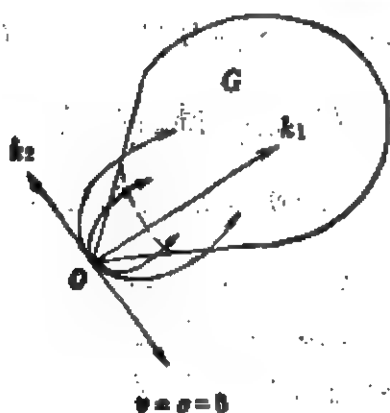



图 1.24

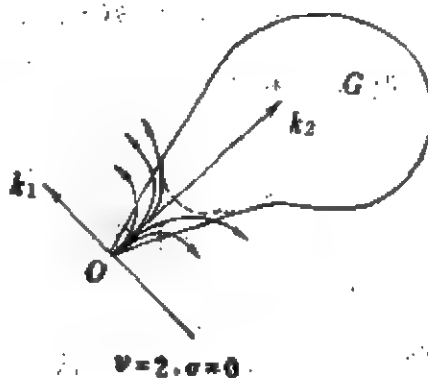



图 1.25

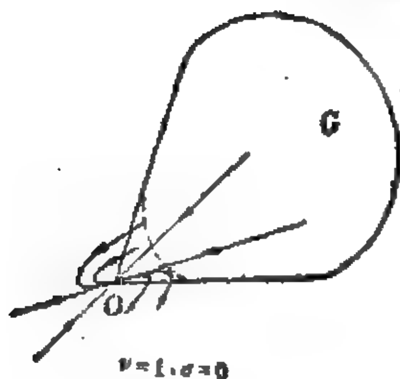



图 1.26

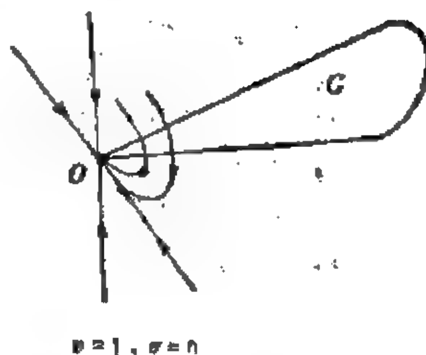



图 1.27

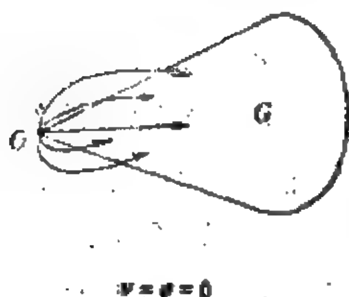



图 1.28

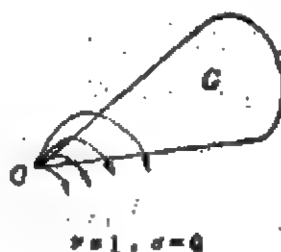



图 1.29

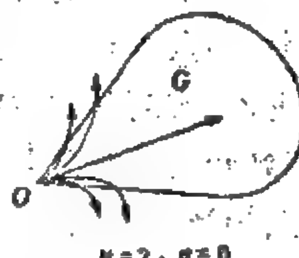



图 1.30

或两个外切点(图 1.30)。

对于高阶奇点，仿前面的办法，可得如下法则。

若区域$G$的边界$L$通过高阶奇点$O$，使$O$有$\nu$个椭圆域被包含在$L$内部或与$L$在$O$点附近相交，又有$\sigma$个双曲域被包含在$L$内部(仅仅和$L$相交的不算)，则$O$可被看成是$\nu$个外切点和$\sigma$个内切点的重合。

**注意** 按此法则算出的，球面上除去一个奇点$O$的开域$G$内部奇点的指标总和为$1+\frac{\sigma-\nu}{2}$，用2减去它，得到奇点$O$的指标为$1+\frac{\nu-\sigma}{2}$，这就是 Bendixson 关于高阶奇点的指标公式。

**例 1.4** 如图 1.31，三角形的两个顶点$A$和$B$是鞍点，$A$点处有一分界线在三角形内部，$B$点处两分界线都在三角线外部。第三个顶点$O$是一高阶奇点，它有一个椭圆域和一个双曲域全部含在三角形内部，另有一双曲域只有一部分在三角形内部，一椭圆域也只有一部分在三角形内部。按前面的法则，在$A$有$\nu=\sigma=0$，在

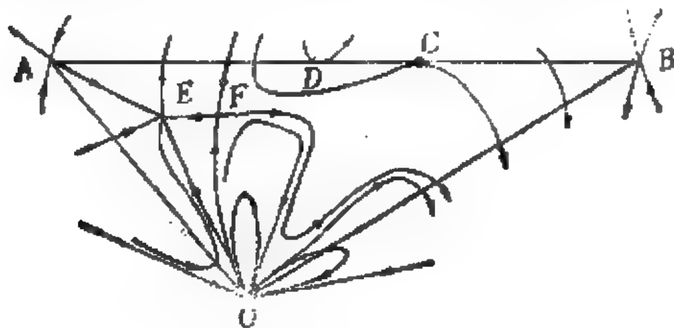



图 1.31

$B$ 有 $\nu=1$, $\sigma=0$. 在 $O$ 有 $\nu=2$, $\sigma=1$。我们所画的图说明了在 $\overline{AB}$ 边上还有一个内切点 $C$ 和一个外切点 $D$。因此算得三角形内部奇点的指标总和为

$$1+\frac{2-4}{2}=0.$$

事实上，三角形内部有一结点和一鞍点，其指标之和是零。由此可见，在对区域 $G$ 的边界上的奇点按以上的规则理解时定理 1.2 仍然成立。当然，$G$ 内也可能根本没有奇点，而 $A$、$B$、$O$ 的性质不变，如图 1.32。

下面举例说明，被推广以后的定理 1.2 还可以用来证明动力系统的奇点性质的相互影响(见文献[1.10])。设一动力系统有三个指标 +1 的奇点，其中两个是焦点，一个是结点，又设以这三个奇点为顶点的三角形内部有一个鞍点，且三角形的三边上别无与轨线相切的点。这种系统的一个最重要的例子就是二次系统。如图 1.33，假设焦点 $B_3$ 处的轨线按逆时针方向旋转，焦点 $O$ 处的

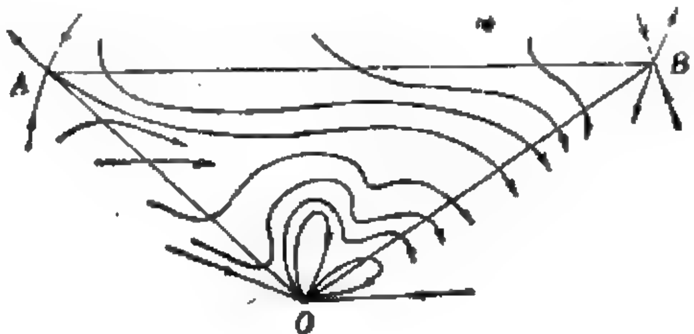



图 1.32

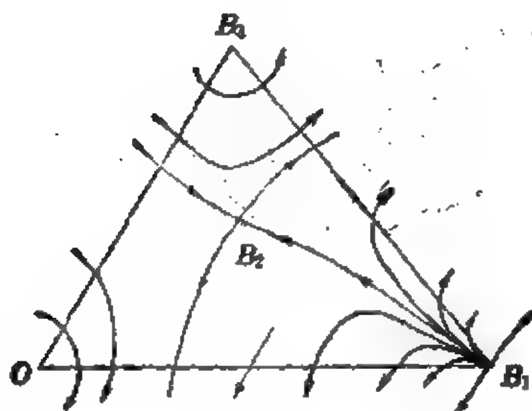



图 1.33

轨线按顺时针方向旋转，但我们不确定这两个焦点的稳定性。由于在每个焦点处有 $\nu=1$，$\sigma=0$，且三角形内部奇点指标之和应为 $-1$，故在 $B_1$ 处应有 $\nu=2$，$\sigma=0$。故 $B_1$ 必为正常结点或如图 1.30 所示的星形结点，不但如此，$B_1$ 还应是不稳定结点。对于二次系统，在文献[1.10]中曾用解析方法证明，$B_1$ 为不稳定正常结点，其第一特征方向 $k_1$ 在三角形外部，第二特征方向 $k_2$ 在三角形内部(亦见于本书 §13)。

最后，当区域 $G$ 的边界有一段是动力系统的轨线，或全部都是动力系统的轨线时，我们可以把它看作边界不是轨线时的极限情况来处理。

例 1.5 研究其上只有一个鞍点的分界线环(loop)(图 1.34)和奇点的椭圆域(图 1.35)内部的奇点指标之和。




图 1.34

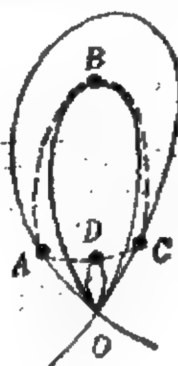



图 1.35

在前一情况，我们以 $O$ 为顶点，在分界线环内部邻近之处另画一虚线的闭路，使它和分界线环十分接近，以致二者之间不含环内部的奇点。由分界环邻近轨线的走向可知，虚线闭路除过奇点 $O$ 以外，其上应有 $n$ 个外切点，$n+1$ 个内切点，不妨设 $n=0$。现在应用指标定理于虚线闭路的内部区域，注意，现在 $O$ 是鞍点，它的两分界线在区域之外，故应视为外切点。这样，其内部奇点指标之和是

$$1+\frac{1-1}{2}=1.$$

最简单的情况就是只有一个焦点，结点或中心。

仿此，对奇点的椭圆域内部，由图 1.35 可以看出虚线闭路上有三个外切点，一个内切点，因此其内部奇点指标之和是零，即可以不存在奇点，这是最简单的情况。

**例 1.6** 现在研究图 1.36 的奇闭轨线内部的奇点指标之和（参见文献[1.11]，在其中曾给出其他的计算指标之和的公式）。按照前面例 1.5 的办法，我们在奇闭轨线内部邻近画一条虚线闭路，它通过原来奇闭轨上的两个焦点和两个鞍点。由例 1.4 前的法则，因奇闭轨线在 $O_1$ 邻近包含两个椭圆域，三个双曲域在其内部，故在 $O_1$ 处应算作有 $\nu_1=2$，$\sigma_1=3$。其次在 $O_2$ 与 $O_5$ 有 $\sigma_2=\sigma_5=0$，$\nu_2=\nu_5=1$。又鞍点 $O_3$、$O_4$ 对虚线闭路来说，是一条分界线在外部，另一条分界线在内部的鞍点，故有 $\sigma_3=\nu_3=\sigma_4=\nu_4=0$。但由焦点与鞍点邻近轨线的去向可知在 $O_2$ 与 $O_3$ 之间、$O_3$ 与 $O_4$ 之间、$O_4$ 与 $O_5$ 之间，虚线闭路上应有内切点 $A$、$B$ 和 $C$，在该处有 $\sigma_A=\sigma_B=\sigma_C=1$，$\nu_A=$

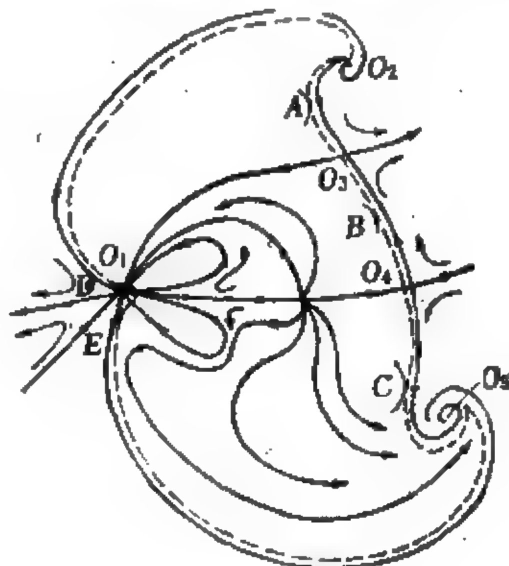



图 1.36

$\nu_B = \nu_C = 0$。最后，在 $O_1$ 与 $O_2$、$O_1$ 与 $O_5$ 之间还应有外切点 $D$、$E$（与 $O_1$ 邻近），在该处应有 $\nu_D = \nu_E = 1, \sigma_D = \sigma_E = 0$，应用定理 1.2，即得

$$\text{区域内部奇点指标之和} = 1 + \frac{3+1+1+1-2-2-1-1}{2} = 1.$$

至此，定理 1.2 已被推广到最一般的情况，即区域 $G$ 的境界上可以有奇点，境界线可以是轨线的情况。又对区域 $G$ 的边界上有轨线段时，还可有其他的处理方法，详见本书 §23。

## 参 考 文 献

[1.1] Poincaré H. Mémoire sur les courbes définie par une équation differentielle, Ⅱ, J Math Pures Appl 1885, 1(4): 167～244.

[1.2] Hartman P. Ordinary Differential Equations, John Wiley and Sons Inc, 1964, ChapⅦ.

[1.3] 叶彦谦，马知恩. 环域定理与奇点概念的推广. 南京大学学报，1977, no, 1, 7～29.

[1.4] Ye Yanqian. Relative position of the critical points of a certain cubic system and a generalization of the Bendixson index formula. Ann of Diff, Eqs. 1990, 6(2): 241～262.

[1.5] Llibre J and Ye Y Q. On the dynamics of surface vector fields and homeomorphisms(预印本，1992).

[1.6] Ye Yanqian. Passage, blockade, sink and source of a planar dynamical system, Chin Ann of Math. 13 B, 1992.

[1.7] Ye Yanqian. Supplement to "Passage, blockade, sink and source of a planar dynamical system" (Research Report of CRM, Institut d'Estudis Catalans, 1992).

[1.8] Chen J P and Zhou J. Limit cycle of a planar quartic differential system Acta Math Sinica, 1993.v.36, no.5, 662～668.

[1.9] Conley C C. Some Aspects of the Qualitative Theory of Differential Equations, Dynamical Systems, an International Symposium, Vol.1, 1～12(Academic Press, New York, 1976).

[1.10] Ye Yanqian and Ye Weiyin. Triangulation and fundamental triangles of the phase-portraits of a quadratic differential system, Ann of Diff, Eqs, 1991, 7(3): 362～383.

[1.11] 叶彦谦. 曲面动力系统. 科学出版社，1991.

[1.12] 叶彦谦等。极限环论。上海科学技术出版社，1984。

[1.13] 徐世龙，戴国仁。Poincare-Bendixson 环域定理的注。四川师范大学学报，1986，V.29，no.1，62～66。

# §2. 多项式系统轨线的几何与动力学性质

本节罗列多项式系统的许多重要性质，以便读者必要时可以查考。但关于奇点的性质在 §3 中将有详细的论述；关于有代数积分线的多项式系统则将在 § 17 中详细讨论，故对于这两方面在本节中不多提，而把重点放在多项式系统轨线的几何与动力学性质方面。

本节首先罗列二次系统的上述性质，然后再看哪些性质已被(或不可能)推广到高次多项式系统。

1) 有一积分直线和一细焦点的二次多项式系统没有极限环[1)]。

2) 有一积分直线的二次系统最多有一个极限环。

3) 若二次系统的发散量不恒等于零，则发散量为零的点的轨迹是一直线（以后简称为发散量直线）。闭轨 $\Gamma$ 若存在，必与此直线相交，且由

$$\iint_{\text{int.}\Gamma}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=0$$

不难证明，发散量直线

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0$$

必通过$\Gamma$ 的内部区域的重心(这一点过去一直未被人们注意到)。

---

1) 积分直线亦称不变直线，其上可以有奇点。类似的，以后对代数积分线有时亦称为不变代数曲线。后一名词是对动力系统而言的，前一名词是对消去dt以后的方程而言的。

4) 若二次系统的发散量直线通过两奇点，则不存在闭轨线。又若发散量直线是积分直线，亦不存在闭轨线。

5) 具有两个焦点的二次系统若其中之一为细焦点，并且还存在第三个有限远奇点，则极限环必集中分布；若细焦点为二阶的，则不存在极限环[1]。

6) 有对称中心的二次系统最多只能有两个单重极限环，若存在，则必为(1, 1)分布。一般二次系统的极限环可以有(1, 0)，(2, 0)，(3, 0)，(1, 1)，(1, 2)，(1, 3)等分布，但不能有(2, 2)分布。

7) 二次系统的闭轨线内部只能有一个焦点或中心。

8) 二次系统的奇闭轨线若过两个有限远奇点$P$与$Q$，则直线段$\overline{PQ}$必定是它的一部分。

9) 一次或二次系统的闭轨或仅过一有限或无限奇点的奇闭轨必为严格凸闭曲线，即它在任何一方向最多只有两个极值点。

10) 二次系统不存在 ⓞⓞ 和 ⸫ 型的闭轨分布。它的闭轨或集中分布在一焦点型奇点外围，或分别出现于两个焦点型奇点的外围。

11) 二次系统最多可以有三个指标为$+1$的初等奇点，但其中最多只能有两个是焦点型的。

以上这些性质的证明都可在文献[1.1]中找到，但(2, 2)分布不可能，这将在§20中证明之。

12) 二次系统不可能既有中心又有极限环，或既有中心又有细焦点。

这一条的前半部在文献[1.1]中曾提到，但没有很好去证明，后半部则是文献[1.2]中最先注意到的。现在一起给以严格的证

1) 前一部分的证明见于文献[1.1]§16，后一部分的证明也可由前一部分的证明中顺便得出，因为由文献[1.1]§16的(16, 29)式看出：当$O(0, 0)$是二阶细焦点时有$C'=0$，从而发散量为零的直线$A'x+B'y=0$通过$O$与$(x_1, y_1)$，因此$O$和$\left(0, \frac{1}{n}\right)$外围都无闭轨线。

明：

不妨设二次系统具有在文献[1.1]中的标准形式：

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -y+\delta x+lx^2+mxy+y^2,\\
\dot{y} &= x(1+ax+by),
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

其中$0\leqslant|\delta|<2$，$|a|+|b|\neq 0$。因若$a=b=0$，则(2.1)式不可能有两个指标$+1$的有限远奇点。我们不妨假定$O(0,0)$和$N(0,1)$都是(2.1)式的焦点型奇点。因若$N(0,1)$不是焦点型奇点，而(2.1)在$1+ax+by=0$上另有一个焦点型奇点$M(x_1,y_1)$，则可对(2.1)作线性变换

$$
\bar{x}=y_1x-x_1y,\quad \bar{y}=\alpha x+\beta y,\tag{2.2}
$$

其中$\alpha$、$\beta$满足条件

$$
\alpha x_1+\beta y_1=1,\quad \alpha(\delta x_1-y_1)+\beta x_1=0,\tag{2.3}
$$

或即

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{x_1}{x_1^2-\delta x_1y_1+y_1^2},\\
\beta &= \frac{y_1-\delta x_1}{x_1^2-\delta x_1y_1+y_1^2}.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

这时(2.2)式的逆变换是

$$
x=\beta\bar{x}+x_1\bar{y},\quad y=-\alpha\bar{x}+y_1\bar{y},\tag{2.5}
$$

而在变换(2.2)之后$M$的坐标是$M(0,1)$，且有

$$
\dot{\bar{y}}=\alpha(-y+\delta x+lx^2+mxy+y^2)+\beta x(1+ax+by).\tag{2.6}
$$

以(2.5)代入(2.6)，立刻可看出(2.6)式右方的一次项中$\bar{y}$的系数为零，而二次项中$\bar{y}^2$的系数也为零（用到等式$1+ax_1+by_1=-y_1+\delta x_1+lx_1^2+mx_1y_1+y_1^2=0$），故变换后的方程仍具有(2.1)的形式[1]，但它的位于$\bar{y}$轴上的两个奇点都已是焦点型的了。

今设$O(0,0)$是(2.1)的中心，而$N(0,1)$是(2.1)的焦点，则由文献[2.1]知应有：

---

1) 注意：若(2.1)中有$b=0$，则变换后的方程中$b'\neq 0$，即(Ⅱ)类方程经上述变换后必定变为(Ⅲ)类方程。

$$\delta=0,\ W_1=m(l+1)-a(b+2l)=0,$$
$$b<-1,\ m^2+4(1+b)<0 \tag{2.7}$$

以及($W_1$、$W_2$、$W_3$ 是(2.1)在 $O$ 的各阶焦点量)

$$W_2=ma(5a-m)\left[(l+1)^2(1+b)-a^2(b+2l+1)\right]=0, \tag{2.8}$$
$$W_3=ma^2(2a^2+l+2)\left[(l+1)^2(1+b)-a^2(b+2l+1)\right]=0。$$

又(2.1)在 $N$ 的两特征根为共轭复数：

$$\lambda_{1,2}=\frac{m\pm\sqrt{m^2+4(1+b)}}{2}。 \tag{2.9}$$

当(2.8)式成立时如果 $m=0$，则移原点到 $N$ 可证明 $N$ 也是中心；如果 $m\neq 0$，则由(2.9)知道 $N$ 应是粗焦点。这就证明了中心与细焦点不可能共存。

要证明二次系统有中心时不能有极限环，单用(2.1)作为标准型不方便，现在改用文献[2.3]中的 Kapteyn 标准形(见本书§8中的(8.4)式)：

$$\dot{x}=-y-bx^2-Cxy-dy^2,$$
$$\dot{y}=x+ax^2+Axy-ay^2, \tag{2.10}$$

其中已设第二方程中 $y^2$ 的系数 $c=-a$，不失一般性。(2.10)式以 $O(0,0)$ 为中心的充要条件是(见文献[2.3])以下四者之一成立：

$$b+d=0, \tag{2.11}$$
$$a=C=0, \tag{2.12}$$
$$A-2b=C+2a=0, \tag{2.13}$$
$$C+2a=A+3b+5d=a^2+bd+2d^2=0。 \tag{2.14}$$

当条件(2.13)成立时，(2.10)的通积分为充满全平面的三次代数曲线族。显然不可能有极限环。

当(2.11)成立时，由文献[2.1]中的§9知，这时(2.10)可经转轴而成为

$$\dot{\bar{x}}=-\bar{y}+b'\bar{x}^2+c'\bar{x}\bar{y}-b'\bar{y}^2,$$
$$\dot{\bar{y}}=\bar{x}(1+a'\bar{y})。 \tag{2.15}$$

这里不妨设 $a'\neq 0$，否则，(2.15)只有一个中心 $O$ 和一个鞍点 $N\left(0,\ -\dfrac{1}{b'}\right)$，$N$ 外围不可能有极限环。当 $a'\neq 0$ 时，不妨设 $b'=$

$-1$，而 $a'<-1$，这时 $N(0,1)$ 有指标 $+1$，它在积分直线 $1+a'\bar{y}=0$ 上方。要证明$N$外不存在极限环，可以用 Dulac 函数

$$B=\left(\bar{y}+\frac{1}{a'}\right)^{\frac{2}{a'}-1},$$

则有

$$(BP)_{\bar{x}}+(BQ)_{\bar{y}}=c'\bar{y}\left(\bar{y}+\frac{1}{a'}\right)^{\frac{2}{a'}-2}. \tag{2.16}$$

由于在 $1+a'\bar{y}=0$ 上方上式右边定号（当 $c'=0$ 时$N$为中心），故$N$外围没有极限环。

当(2.12)成立时，(2.10)所确定的向量场对称于 $y$ 轴。故在 $N\left(0,\ -\frac{1}{d}\right)$外围不可能有极限环。

最后，当(2.14)成立时，不妨设 $a\neq 0$（否则，$C=0$，$a=0$，(2.12)式成立），于是 $d\neq 0$ 且

$$b=\frac{2d^2+a^2}{-d},$$

(2.10)成为：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y+\frac{2d^2+a^2}{d}x^2+2axy-dy^2,\\ \dot{y}&=x+ax^2+\frac{d^2+3a^2}{d}xy-ay^2,\end{aligned} \tag{2.17}$$

在(2.17)中作代换 $X=-ax+dy$，$Y=dy$，可得方程

$$\begin{aligned}\dot{X}&=\lambda X-Y+X^2-XY,\\ \dot{Y}&=\lambda X-\lambda Y-\lambda X^2+3XY-2Y^2,\end{aligned} \tag{2.18}$$

其中 $\lambda=\frac{d^2}{a^2+d^2}<1$。在 $X+1=0$ 上有 $\dot{X}=1-\lambda>0$，故其上无奇点。由 $P(X,Y)=0$ 可解出

$$Y=\frac{X(X+\lambda)}{X+1},$$

代入 $Q(x,y)=0$，得到：

$$X(X^3+3X^2+3\lambda X+\lambda)=0. \tag{2.19}$$

令 $X=0$，得 $Y=0$，有奇点 $O(0,0)$。余下的$X$的三次方程的判

别式为

$$-108\lambda(\lambda^2-\lambda+1)<0.$$

故只有一个负根 $X_1$，对应的奇点为 $M(X_1, Y_1)$。再在(2.18)中作代换

$$\xi=X^2+2Y+\lambda, \quad \eta=X^3+3XY+3Y+\lambda, \tag{2.20}$$

则(2.18)变为：

$$\frac{1}{2}\eta d\xi-\frac{1}{3}\xi d\eta=0. \tag{2.21}$$

(2.21)有通积分 $\eta^2=K\xi^3$，即

$$(X^3+3XY+3Y+\lambda)^2=K(X^2+2Y+\lambda)^3. \tag{2.22}$$

由此可见三次曲线 $X^3+3XY+3Y+\lambda=0$ 与二次曲线 $X^2+2Y+\lambda=0$ 都是(2.18)的积分曲线。它们的唯一交点即 $M(X_1, Y_1)$。又由(2.21)看出 $M$ 是结点，所以外围不存在极限环。

**注 2.1** 我们这里是根据文献[2.3]与[2.4]来证明最后这一情况的。在文献[2.5]中也有这一情况的证明。但他对方程

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y-bx^2-(2c+\beta)xy-dy^2,\\ \dot{y}&=x+ax^2+(2b+\alpha)xy+cy^2\end{aligned} \tag{2.23}$$

没有经过转轴使得 $c=-a$ 就认为其中的4个条件（与(2.11)～(2.14)相当）是(2.23)有中心的充要条件，这是有问题的（见文献[2.3]）。另两个不同的证明见文献[2.23]与[2.24]。

13) 线性部分以原点为星形结点的二次系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=x+b_0x^2+b_1xy+b_2y^2,\\ \dot{y}&=y+a_0x^2+a_1xy+a_2y^2\end{aligned} \tag{2.24}$$

没有极限环，且可积。

没有极限环已在文献[2.1] §10的第II部分中有证明。至于它的可积性则是文献[2.6]中最先注意到的。下面改用我们的方法介绍[2.6]中的证明：

将(2.24)化为齐次坐标，得到

$$\begin{cases} z\dot{x}-x\dot{z}=xz+b_0x^2+b_1xy+b_2y^2,\\ z\dot{y}-y\dot{z}=yz+a_0x^2+a_1xy+a_2y^2. \end{cases} \tag{2.25}$$

令 $x=1$, $\frac{dt}{d\tau}=z$, 得到

$$\frac{dz}{d\tau}=-z(z+b_0+b_1y+b_2y^2),$$

$$\frac{dy}{d\tau}=yz+a_0+a_1y+a_2y^2-y(z+b_0+b_1y+b_2y^2)$$

$$=a_0+(a_1-b_1)y+(a_2-b_2)y^2. \tag{2.26}$$

由 (2.26) 的第二式积分, 可得到 $\tau=\varphi(y)$。设其反函数为 $y=\psi(\tau)$。以之代入(2.26)的第一方程, 得到一个贝努里方程, 设其通解为 $z=\Phi(\tau)$。同样, 若在(2.25)中令

$$y=1, \quad \frac{dt}{d\tau}=z,$$

则如前可解出 $x=\Psi(\tau)$。因此, (2.24)是可积的, $t$ 与 $\tau$ 的关系可由 $\frac{dt}{d\tau}=\Phi(\tau)$ 积分得到。

14) 若二次系统

$$\dot{x}=a_1x+a_2y+a_3x^2+a_4xy+a_5y^2,$$

$$\dot{y}=b_1x+b_2y+b_3x^2+b_4xy+b_5y^2, \tag{2.27}$$

被化成 $(1, y, z)$ 坐标或 $(x, 1, z)$ 坐标下的方程中不含常数项与一次项, 则(2.27)为可积。[1)]

证明与13)类似, 从略。

15) 二次系统的焦点的最高阶数为3; 具有三阶细焦点的二次系统, 没有极限环与分界线环; 有二阶及三阶细焦点的二次系统没有直线解。

第一句话是熟知的(见文献[2.1]中§9); 第二个结论的证明见本书§9及文献[2.7]; 第三个结论用反证法及后面的28)可知。

16) 二次系统的奇闭轨线上若有三个有限远鞍点, 则它必是以这些鞍点为顶点的三角形, 内部为中心区域。

证明见文献[2.8]或[2.13], 亦可由文献[2.1]§10中引理

---

1) 这是J.C.Artes教授告知作者的。

10.3 推出。但若有一鞍点跑向无限远，则过此鞍点的两直线成为积分直线，其间不可能有奇点，因此中心亦必消失于无限远，中心区域变为二平行直线之间的椭圆域，例如

$$\dot{x}=x(1-x),\quad \dot{y}=y(-1+2x).$$

17) 若 $\Gamma_1$、$\Gamma_2$ 都是上面只有一个鞍点的奇闭轨，则它们不能共有一个鞍点。$\Gamma_1$ 与 $\Gamma_2$ 的内部可能都是中心，也可能都是焦点。又若 $\Gamma_1$ 与 $\Gamma_2$ 都过两个鞍点，则它们必有一公共直线段，且它们的内部都是中心。

证明见文献[2.8]、[2.9]及[2.19]。文献[2.9]中所得到的有两个分界线环的二次系统的例子为：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y(-3x+4y)-\frac{1}{2}(x^2+y^2-1)+\delta x(-3x+4y),\\ \dot{y}&=x(-3x+4y),\end{aligned}\tag{2.28}$$

其中 $0>\delta>-\dfrac{3}{4}$。(2.28)有椭圆解 $x^2+y^2=1$。两分界线环都位于圆的内部，分别经过圆上的奇点 $A\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$及$B\left(-\dfrac{4}{5},\ -\dfrac{3}{5}\right)$，且关于原点对称。有两中心的例子见文献[2.1]中 §13 的图13.5。

18) 任一直线与二次系统的轨线最多只能有两个切点（包括奇点，有限远或无限远），否则，此直线本身便是轨线(证明见文献[2.1]中 §11 及文献[2.10])。其逆，任一积分直线若不是充满了奇点，则其上有限远奇点最多只能有两个，至于无限远奇点，则可有可无。

由此可知：连接两个有限远奇点或一个有限远奇点和一个无限远奇点的直线若不是轨线，则必为无切直线(奇点除外)。

**证** 一积分直线 $l$ 上若有三个有限远奇点，则 $l$ 的方程必定是 $P(x,y)=0$ 与 $Q(x,y)=0$ 的公因式(否则，$l$ 与 $P=0$ 或 $Q=0$ 各最多只能有两个交点)。从而 $l$ 上必充满了奇点，而二次系统可约化为一次系统。

其次，若赤道是轨线，则此积分直线与赤道的交点自然是奇点。反之，若赤道不是轨线，则此积分直线上也可能没有无限远奇

点。例如方程

$$\dot{x}=y+x^2,\quad \dot{y}=xy$$

的积分直线 $y=0$ 上有唯一的奇点 $O(0,\ 0)$。

19) 任一直线 $L$ 与一线性系统或二次系统的任一轨线 $\gamma(\gamma\neq L)$ 最多只能有一个切点。

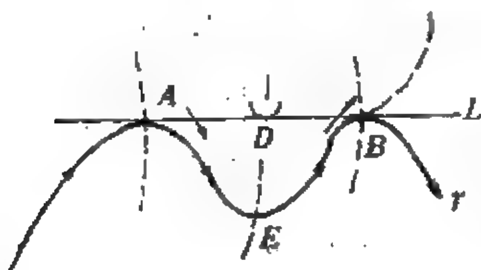



图 2.1

**证** 用反证法：设直线 $L$ 与轨线 $\gamma$ 有两个切点 $A$、$B$，且 $L\neq\gamma$ 如图 2.1 所示。如果 $L$ 不是轨线，则它在 $\overset{\frown}{AB}$ 上必定还另有一切点 $D$。但由 18) 知道这是不可能的。因此 $L$ 是轨线，而 $A$ 与 $B$ 是奇点。但由文献[2.11]知道，二次系统也不可能有由 $\gamma$ 上的 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $L$ 上的 $\overline{AB}$ 所构成的分界线环使 $\gamma$ 与 $L$ 在 $A$、$B$ 两点相切。又线性系统不能有两个奇点。

20) 若一曲线 $y=f(x)$ 是一线性系统或二次系统的轨线，则它上面最多只有 $y$ 的两个极值点。

**证** 为此只须证明图 2.1 中的那种有两个以上的极值点的曲线 $\gamma$ 不可能是一次或二次系统的轨线。不妨设图 2.1 中的 $L$ 是 $x$ 轴，由于 $\gamma$ 有两个上升弧段和两个下降弧段，故必有 $Q_1(x,\ y)=0$ 或 $Q_2(x,\ y)=0$ 的通过极值点 $A$、$E$、$B$ 的分支把它们分开，如虚线所示。这时过 $E$ 的 $Q_1=0$ 的分支必交 $L$ 于第三点 $D$，显然，这是不可能的。因为一直线与 $Q_1=0$ 最多交于一点，与 $Q_2=0$ 最多交于两点。

总结 19) 与 20) 可以知道：线性系统或二次系统的开轨线 $y=f(x)$，不论它是否为代数曲线，最多只能有两个极值点，如图 2.2




图 2.2

所示；而任一直线 $l$ 与 $\gamma$ 最多只能有一个切点（在图 2.2(a) 的情况没有切点，除非 $l=\gamma$）。

21) 二次系统若有两个焦点，其一为三阶细焦点，则另一必为粗焦点，二焦点必有相同的稳定性，且无其他实的有限奇点。

证明见本书下一节 §3。

22) 二次系统不存在图 2.3 所示的三种无界分界线环（见文献[2.10]）。

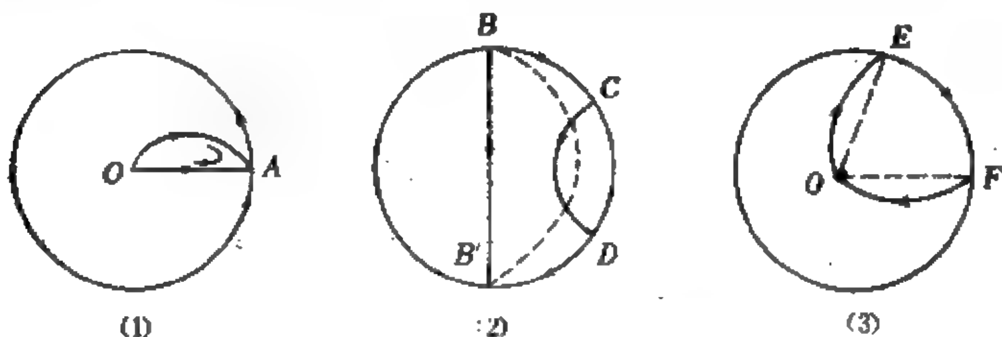



图 2.3

**证** 在图 2.3(1) 中不妨设分界环的有限奇点为 $O(0, 0)$，无限奇点为 $A(1, 0, 0)$，于是二次系统应有方程

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\
\dot{y} &= y(b_{01} + b_{11}x + b_{02}y),
\end{aligned} \tag{2.29}
$$

化到 $(1, y, z)$ 坐标，得到：

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{d\tau} &= (b_{11} - a_{20})y + h.o.t., \\
\frac{dz}{d\tau} &= a_{20}z + h.o.t.
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

由文献[2.12]知道这时 (2.30) 在 $A$ 的两个特征根都应为零，故有 $a_{20} = b_{11} = 0$。但这时 (2.29) 的第二方程与 $x$ 无关，导致矛盾。

图 2.3(2) 的不可能性是明显的，因为作一在分界环内部且与 $\overline{BB'}$ 平行的直线（虚线），就立刻看出它上面至少有三个有限远切点，这不可能。类似地，可证图 2.3(3) 也不可能。注意，分界线环上若没有奇点 $O$，则如图 2.3(3) 的分界环是可能存在的。

23) 二次系统的有界奇闭轨只有 3 种（若细分可得 6 种），无

界奇闭轨只有5种。

关于它们的讨论详见本书 §7 及 §19。

24) 二次系统的一个中心区域不能充满全平面。

证明见本书 §8 及文献[2.5]。

25) 若二次系统在有限远奇点 $P$ 有两个实特征根，则或是过 $P$ 至少有一积分直线；或是存在一过 $P$ 的直线 $l$，使对 $l$ 上的一切异于 $P$ 的点，轨线都从同一方向穿过 $l$。在后一情况，至少存在一进入 $P$ 的轨线，它在 $P$ 点与 $l$ 相切。

26) 若一非齐二次系统在一有限奇点 $P$ 有一椭圆域，则它在 $P$ 只有一个椭圆域和一个双曲域。$P$ 应是三重奇点，即它是

$$P(x, y)=0 \text{ 与 } Q(x, y)=0$$

的三重交点。这时过 $P$ 有一积分直线 $l$，使椭圆域中一切轨线都与 $l$ 切于 $P$ 点。又系统除 $P$ 外，最多还能有一个有限远奇点 $q$，$q$ 必不在 $l$ 上。

以上两条性质的证明见文献[2.13]，此处从略。

27) (I)类二次系统：

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\ \dot{y}=x \tag{2.31}$$

最多有一个极限环，焦点 $O(0, 0)$ 最多只能是一阶的。否则，便是中心。(2.31)的无限远奇点中最多只能有一个是初等奇点。

证明见文献[2.1]中 §12。

(II) 类二次系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\\ \dot{y}&=x(1+ax),\ na\neq 0\end{aligned} \tag{2.32}$$

的有限远奇点的指标之和为零或2，它不可能有两个无穷远初等鞍点。$(2.32)_{m=0}$ 的极限环必集中分布。$(2.32)_{l=0}$ 若在一奇点外围有奇数个极限环，则必为唯一。

证明见本书 §19 及文献[2.1]中 §14、文献[2.14]。

28) 有一条积分直线的二次系统必可化为：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\\ \dot{y}&=x(1+by),\ b\neq 0。\end{aligned}$$

它最多有一个极限环，焦点$O(0, 0)$最多只能是一阶的。否则，便是中心。

证明见本书§9及文献[2.1]。

29) 有界二次系统最多有三个有限远奇点；它的细焦点最多只能是二阶的；若有一阶细焦点和极限环，则环是唯一的。只有一个或两个奇点的有界二次系统最多能有一个极限环。有界系统可以有(1, 1)分布的极限环，但(1, 2)分布是不可能的。

证明见本书§10与§16。

30) 有细鞍点$S$的二次系统其极限环若存在，必为唯一的。若还有积分直线$l$，则当$l$不通过$S$时，二次系统没有环。

证明见文献[2.15]、[2.16]、[2.17]。

31) 二次系统的细鞍点的最高阶数为3。有一阶数大于1的细鞍点的二次系统或为可积，或无极限环与分界线环。

证明见本书§7。

32) 过二次系统的每一无穷远奇点必有一条无切直线。

这一事实最先由文献[2.18]发现。证明见本书§6。

33) 有一个有限远奇点和一个无限远奇点的二次系统最多有一个极限环。

证明见本书§10。

34) 齐二次系统可积，无极限环。相图有7种不同的拓扑结构。

证明见文献[2.1]中§10。

35) 二次系统过一鞍点的分界线环经微扰动后，至多能产生三个极限环，而且确实可以产生三个极限环。

前面一半的证明见文献[2.20]；后面一半的证明见本书§14。

36) 当二次系统

$$\dot{x} = P_1(x, y) + P_2(x, y),$$
$$\dot{y} = Q_1(x, y + Q_2(x, y) \qquad (2.33)$$

的$P_2$、$Q_2$可被$\operatorname{div}(P, Q)$的一次项$\dfrac{\partial P_2}{\partial x}+\dfrac{\partial Q_2}{\partial y}$整除时，它或是

没有极限环，或是有唯一的单重环。

37) 二次系统若有无限远或有限远退化奇点（在此奇点有两个零特征根，但系统的线性部分不全为零）时，或无极限环，或有唯一的单重环。

38) 有重数大于2的半初等有限奇点（即只有一个零特征根的奇点）的二次系统或无极限环，或有唯一的单重环。

以上三条的证明见本书§9。

39) 若二次系统只有有限条积分直线，则它最多只能有5条。

40) 若二次系统有4个有限远奇点，则其中最多有3个指标为$+1$(或$-1$)，至少有一个指标为$-1$(或$+1$)。

41) 特殊(Ⅱ)类方程：

$$\dot{x}=-y+\delta x+ny^2,$$
$$\dot{y}=x(1+ax-y),\ 0<n<1$$

最多只有一个极限环，若设$a<0$，则当$\delta>0(<0)$时，它只能出现在$O(0,0)\left(N\left(0,\dfrac{1}{n}\right)\right)$外围。

42) 特殊(Ⅲ)类方程：

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2,\quad \dot{y}=x(1+ax+by)$$

最多只能有一个极限环。

以上两条见本书§9。

43) 二次系统的任一条积分线最多有三个无界分支（见文献[2.25]）。

二次系统的以上所列诸条性质大多数不能推广到三次以至更高次的多项式系统.有的虽可推广，但情况也复杂得多。例如与性质7)相反，三次系统的闭轨线内部就可以包含多个奇点，其中除焦点与中心外，也可以有鞍点和结点。类似于性质9)，若研究三次系统的闭轨线在任何方向的极值点的个数，则有下面的古典的例子(参见文献[2.21])：

**例2.1** 4次代数曲线族(它显然是某一3次多项式系统的积

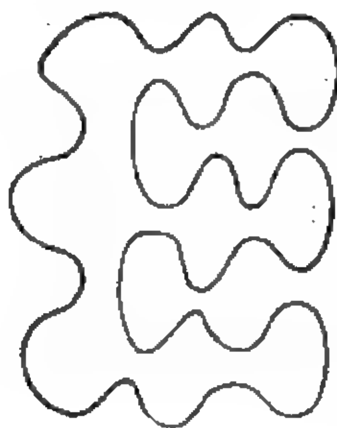
分线)：[1]

$$(y^2-x^2)(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)-2\{y^2+x(x-2)\}^2=c \quad (2.34)$$

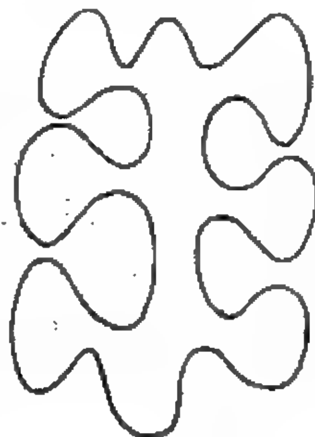
当 $c=0$ 时，是图 2.4 中有三个重点的曲线 $l$，当 $c<0$，且 $0<|c|\ll 1$ 时，(2.34) 是 $l$ 外部的那条曲线，它在 $y$ 轴的方向有 10 个极值点。



图 2.4



(1)



(2)

图 2.5

可以作出这样的 5 次多项式系统，它有如图 2.5 的 (1) 或 (2) 的闭轨线，它们在 $y$ 轴方向都有 26 个极值点。

我们猜想：

2n－1 或 2n 次多项式系统的闭轨线在任一方向最多只有

$$2(2n-1)+(2n-2)(2n-2)=4n^2-4n+2$$

个极值点(但尚不能证明)。

又如类比于性质 15)，三次系统的焦点的最高阶数是多少？迄今尚未解决，由文献[2.22]最近所得的结果(三次系统可以在一个焦点外围存在11个小振幅极限环)，人们有理由猜想三次系统的焦点的最高阶数为 11，但尚无严格的证明。类比于性质 11)，三次系统最多可以有 6 个指标为 +1 的奇点，我们猜想，其中最多有 5 个是焦点型的，但尚无法证明(参见本书§23)。

---

1) (2.34)式所满足的方程是

$$\frac{dy}{dx}=[(11-12x)y^2-24x^3+63x^2-38x]/[16y^2+12x^2-22x-6].$$

但性质18)早在文献[2.1]中就已被推广到$n$次多项式系统而得下面的性质18′)：

18′) 任一直线$L$与$n$次多项式系统的轨线最多只能有$n$个切点(包括奇点)。否则，$L$本身便是轨线。一般地，任一$m$次代数曲线与$n$次系统的轨线最多只能有$m(m-1+n)$个切点。

仿此，性质19)与20)也可被推广成为以下性质19′)：

19′) 任一直线$L$与$2n-1$次或$2n$次多项式系统的任一确定的轨线最多只能有$n$个切点。[1)]

20′) 若一开曲线$y=f(x)$是$2n-1$次或$2n$次系统的轨线，则它最多只能有$2n$个极值点。

证明与性质19)、20)类似。注意：当一轨线不能写成$y=f(x)$时，其上的极值点有可能有无限多。例如绕向焦点或闭轨的螺线就是这样，又若19′)与20′)中的多项式系统的轨线是$2n$次或$2n+1$代数曲线，则19′)与20′)显然成立，故这两条可视为代数曲线性质的推广，由于$n$次代数曲线有可能成为低于$n-1$次多项式系统的轨线$\left(例如 y=x^n 是 y'=\frac{ny}{x} 的积分线\right)$，所以性质20′)说明这时该代数曲线的几何性质将受到一定的限制。

其次，性质24)的推广问题也已解决，即：奇次多项式系统的一个中心区域有可能充满全平面；偶次多项式系统的一个中心区域决不能充满全平面，证明见本书§8。

关于性质34)，它对齐$n$次系统显然也成立，但相图的拓扑结构问题，最近刚有人对三次齐次系统进行研究(见文献[2.26])。

性质39)对$n$次系统的推广有如下的猜想：

若$n$次系统只有有限条积分直线，则当$n$为偶数时，它最多有$2n+1$条积分直线，当$n$为奇数时，它最多有$2n+2$条积分直线。但上述猜想对$n=3$和4的情况，最近才被证明是对的；对$n\geq5$尚未能证明(见本书§17)。

性质40)已被推广到$n$次系统，即：若$n$次系统有$n^2$个奇点，

1) 利用文献[2.25]中定理2的结论，可将19′)推广到$L$为$m$次代数曲线的情况，这时，切点个数对$2n-1$次与$2n$次系统则有不同。

则其中最多有$\frac{n(n+1)}{2}$个指标为$+1$（或$-1$）的奇点，至少有$\frac{n(n-1)}{2}$个指标为$-1$(或$+1$)的奇点，证明见本书 §7.

在后面 §7 中，我们将会看到有关三次系统的闭轨的可能相对位置的某些结果。但不如性质 10) 对二次系统解决得那样好。

相应于 43)，有：

43′) $n$ 次多项式系统的任一积分线最多有$n+1$个无界分支和$n^2$个有界分支(见文献[2.25])。

一个值得研究的问题是：已知两个多项式系统：

$$\dot{x}=P_n(x, y), \quad \dot{y}=Q_n(x, y) \tag{2.35}$$

与

$$\dot{x}=\overline{P}_m(x, y), \quad \dot{y}=\overline{Q}_m(x, y), \tag{2.36}$$

试研究(2.35) 与(2.36) 的各一条轨线$L$与$\overline{L}$的切点个数和位置问题。(文献[2.25]中研究过它们的交点个数)。

注意：如果代替切点而考虑交点，那末即使$n=m=1$，只要取两条轨线中之一为螺线，而另一为通过螺线的中心（即焦点）的直线，则两者的交点就有无数个之多。这说明在上述问题考虑交点个数是没有多大意义的。

**定理 2.1** (2.35)的一切轨线和(2.36)的一切轨线的切点全体都位于$n+m$次代数曲线

$$P_n\overline{Q}_m-Q_n\overline{P}_m=0 \tag{2.37}$$

上面。

特别当$n=m=1$时，(2.37)是一条二次曲线。但即使在这种情况，要研究一个线性系统$(2.35)_1$的一条轨线$L_1$和另一线性系统$(2.36)_1$的一条轨线$\overline{L}_1$最多能有几个切点？也是很麻烦的事。若$L_1$与$\overline{L}_1$都是二次曲线，如果它们不重合(或不部分重合)，最多只能有两个切点。我们曾猜想：可能当$L_1$与$\overline{L}_1$不是代数曲线时，它们的切点也最多有两个。但要使这一猜想成立，首先关于螺线，对它的极角的变化范围必须限制在一长为$2\pi$的半开区间中。否则，当$L_1$与$\overline{L}_1$都是螺线时，它们就有可能具有任何多个切点，这一点

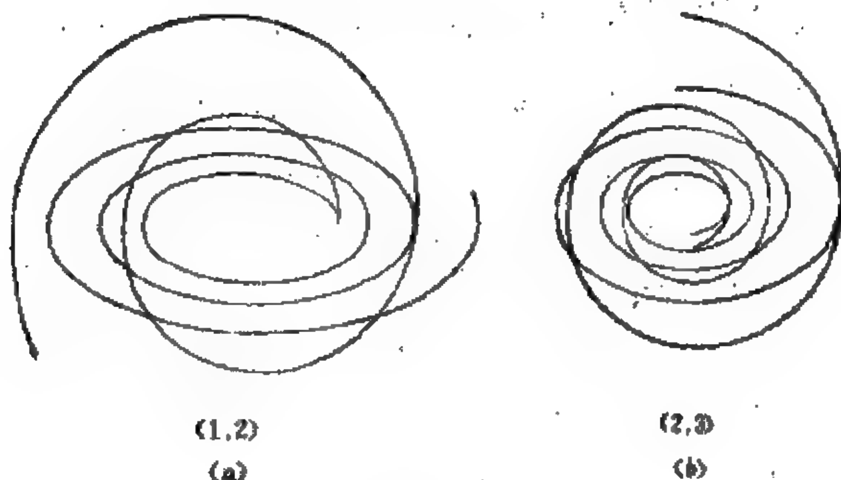



图 2.6

R.E.Kooij 曾证明过。图 2.6 是他用计算机画出的两个图，其中(1, 2)表示一条螺线绕一周时另外一条螺线恰绕两周。

但是即使加上这个限制，仍有例子说明了我们的猜测可能是错误的。

**例 2.2** $\dot{x}=x,\ \dot{y}=x+y$（$O(0,0)$为单向结点）的一条轨线以及

$$\dot{x}=ax+by-\frac{a}{4}+\frac{b}{4},$$

$$\dot{y}=x+y \quad (a=0.82,\ b=-31.32921)$$

的一条轨线(螺线)在后者的某一长为$2\pi$ 的极角区间中，可以有三个切点。

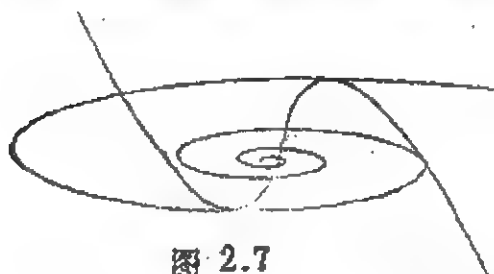


图 2.7

关于上面所讨论的切点的个数问题，即使对一个线性系统和一个二次系统来说，也有很困难的问题，例如，若前一方程有一焦点，它位于后一方程的极限环上。试问：一条绕向焦点的螺线 $L_1$ 与一条绕向极限环的轨线 $\overline{L}_2$，是否能有无数个切点？

此外，例如对于轨线的拓扑结构已经知道得很清楚的方程(2.31)，问二次系统

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\quad \dot{y}=-x \tag{2.38}$$

或二次系统

$$\dot{x}=x, \quad \dot{y}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2 \qquad (2.39)$$

的轨线的拓扑结构如何?三个方程的轨线拓扑结构之间有何关系?这也是一个人们未曾研究过的问题。

## 参考文献


[2.1] 叶彦谦等。极限环论。上海科学技术出版社，1984.

[2.2] 李承治。具有两个中心的平面二次系统。数学学报，1985, V.28, no.5.644～648.

[2.3] Schlomiuk D, Guckenheimer J and Rand R Integrability of plane quadratic vector fields, Expo.Math.1990, 8: 3～25.

[2.4] Schlomiuk D.Algebraic particular integrals, integrability and the problem of the center, (Preprint, 1992, to appear in Trans, AMS).

[2.5] Лукашевич Н А. Интегральные кривые одного дифференциального уравнения, Дифф.урав., 1965.1: 82～95.

[2.6] Cairo L and Feix M R. A rescaling and invariant method for quadratic systems. (Preprint, 1992).

[2.7] 梁肇军。多项式微分系统全局分析导引。华中师大出版社，1989.

[2.8] Tung Chin-Chu. The structure of the separatrix cycle of the system $\dot{x}=\sum_{0<i+k<2} a_{ik}x^iy^k$, $\dot{y}=\sum_{0<i+k<2} b_{ik}x^iy^k$, Acta Math. Sinica, 1962, V.12: 251～257.

[2.9] 沈伯骞。存在两个有界分界线环的二次系统的例子(预印本)。

[2.10] Kotova A Yu. Finiteness theorem for limit cycles of quadratic systems Selecta Math.Sov., 1991, v., 10: 131～142.

[2.11] De Jager P. Phase portraits of quadratic systems, higher order singularities and separatrix cycles, Thesis, Delft Techn. Univ, Netherlands, 1989.

[2.12] Arnold V I. Supplementary chapters of the theory of ordinary differential equations, Nauka, Moscow, 1978.

[2.13] Chicone C and Shafer D S. Separatrix and limit cycles of quadratic systems and Dulacs theorem, Trans AMS, 1983, V: 278, no.2, 585～612.

[2.14] Zhang Pingguang. The uniqueness problem of limit cycle of quadratic systems (I)$_{l=0}$, Ann of Diff.Eqs. 1991, 7(2): 243～249.

[2.15] Cai Suilin, Zhang Pingguang. A quadratic system with a weak

saddle, J.Math Res.Exp.1987, (1), 63～68.

[2.16] Cai Suilin, Zhang Pingguang. A quadratic system with a weak saddle (I), Ann. Diff.Eqs.1988, 4(2): 131～142.

[2.17] Zhang pingguang.On the uniqueness of limit cycles and stability of separatrix cycle for a quadratic system with weak saddle, Northeastern Math.J.1990, 6(2): 243～252.

[2.18] Cherkas L A.Bifurcation of limit cycles of a quadratic system with variation of the parameter rotating the field, Diff. Uravn.1981, 17.no.11: 2002～2016.

[2.19] Ye Yanqian. On the impossibility of (2, 2) distribution of limit cycles of any real quadratic differential system, J. of Nanjing Univ., Math.Biquarterly, 1985, 2 no.2, 161～182.

[2.20] 蔡燧林，郭光远. 鞍点量与二次系统的分界线环产生极限环(预印本，1986).

[2.21] Salmon G.A treatise on the higher plane curves, 1873.

[2.22] Zoladek H.the solution of the center-focus problem(Preprint, 1992).

[2.23] Liang Zhaojun and Sleeman B D.The invariant closed cones of homogeneous vector fields of degree two in $R^4$.(Preprint, 1991).

[2.24] Cai Suilin.The proof of non-existence of limit cycle for real quadratic systems having a stellar node or a center, J.Eng. Math.1989, v. 6, no.1, 92～94.

[2.25] Хованский А Г. Циклы Динамическиу систем на плоскости и теорема Ролля, Сиб.Мат.Жур.1984, 25, 198～203.

[2.26] Cima A and Llibre J. Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane, J.Math.Anal. Appl, 47(1990), 420～448.

## §3. 多项式系统的奇点的一般性质

与§2相比，多项式系统的奇点被研究得远比一般的轨线为多。从H.Poincaré经典论文开始到现在，把大量的区分中心与焦点的文章除外，我们还可找到四五十篇以上的论文。在这些文章中研究的问题是多方面的。本节主要介绍三个问题：1）奇点性质的相互影响；2）无穷远奇点的性质及个数；3）奇点分布的几何构形。其中关于前两个问题主要讨论二次系统。我们认为这三个方面的问题是实多项式系统定性理论与复多项式系统定性理论以及实代数几何相联系的桥梁之一，并且内容饶有兴趣，理论也很优美。分别介绍如下：

### 一、奇点性质的相互影响

这方面有人们所熟知的下列两个定理：

**定理 3.1** 设 $n$ 次多项式系统

$$\dot{x}=P_n(x,\ y),\ \dot{y}=Q_n(x,\ y) \tag{3.1}$$

只有有限个奇点，则在Poincaré半球面上一切奇点（即包括赤道上的奇点在内，但直径相对的两奇点只取其中之一）的指标总和为1。

**定理 3.2** 若(3.1)的奇点都是初等的，则有限远奇点最多为$n^2$个，无限远奇点最多有$n+1$个；以上这两个上界都是可以达到的(这里指实奇点)。

在后面的第三部分中我们将证明，在$n^2$个有限远奇点中，指

标为 $+1$(或 $-1$)的最多有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个；指标为 $-1$(或 $+1$) 的至少有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个(见文献[3.1])。又当 $n$ 为偶数时，两种有限远奇点的个数可以相同，即都有 $\frac{n^2}{2}$ 个；当 $n$ 为奇数时，它们可以只相差一个，即为 $\frac{n^2+1}{2}$ 个和 $\frac{n^2-1}{2}$ 个。由此及定理 3.1 立刻可得以下推论：

**推论** 当(3.1) 的有限远奇点有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个指标为 $-1$，$\frac{n(n-1)}{2}$ 个指标为 $+1$ 时，无穷远处若有 $n+1$ 个初等奇点，则它们都应具有指标 $+1$[1)]。反之，若有限远奇点有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个指标为 $+1$，$\frac{n(n-1)}{2}$ 个指标为 $-1$，则无穷远初等奇点中有 $n$ 个具指标 $-1$，一个具指标 $+1$。

**注 3.1** 若在方程(3.1)中改 $P_n(x, y)$ 为 $-P_n(x, y)$ (或改 $Q_n(x, y)$ 为 $-Q_n(x, y)$)，则有限远奇点中指标为 $+1$ 的改为 $-1$，指标为 $-1$ 的改为 $+1$，且奇点的位置保持不动。可以看出，无限远奇点并非如此，不但指标改变方式与有限远奇点不同，而且位置也是要变动的。在文献[3.2]中曾证明下面的定理：

**定理 3.3** 二次系统若有两个细焦点，则它们都只能是一阶的，且有不同的稳定性；若有一中心点，还有一焦点，则焦点必为粗的(见文献[3.3])。又当(3.1)有三个指标 $+1$的初等奇点时，其中最多只能有两个是焦点或中心。

在 §1 中我们已看到：当二次系统存在三个有限远非鞍点时，两个焦点(不考虑其稳定性)的定向可影响到那结点的稳定性以及它的特征方向。下面证明二次系统焦点的另一重要性质：

**定理 3.4** 对二次系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + lx^2 + mxy + ny^2,\\ \dot{y} &= x(1 + ax + by),\ n>0,\end{aligned} \tag{3.2}$$

1) 由定理 3.1a 的结论我们猜想这时必有 $n+1$ 个指标 $+1$ 的初等奇点。

若 $O(0, 0)$ 是三阶细焦点，$N\left(0, \frac{1}{n}\right)$是焦点，则$N$必为粗焦点，$N$与$O$有相同的稳定性(见文献[3.4])，且另两个奇点必为复的。

证 由$O$是三阶细焦点知有：

$W_1 = m(l+n) - a(b+2l) = 0,$

$W_2 = ma(5a-m)[(l+n)^2(n+b) - a^2(b+2l+n)] = 0,$

$W_3 = ma^2(2a^2+nl+2n^2)[(l+n)^2(n+b) - a^2(b+2l+n)]$

$\neq 0$。

因此 $ma \neq 0$，$l+n = \frac{a(b+2l)}{m}$，从而

$$(l+n)^2(n+b) - a^2(b+2l+n)$$

$$= \frac{a^2[(n+b)(b+2l)^2 - m^2(b+2l) - nm^2]}{m^2}.$$

已知$N$是一焦点，故 $m^2+4n(n+b)<0$。当 $m<0(>0)$ 时，它是粗稳定(不稳定)焦点。由于 $m^2(m^2+4n^2+4nb)$ 是二次型 $(n+b)x^2 - m^2x - nm^2$ 的判别式，故知

$$(l+n)^2(n+b) - a^2(b+2l+n) < 0,$$

从而由 $W_2 = 0$ 导出 $m = 5a$。

另一方面，由 $W_1 = 0$ 可得

$$5a - m = a(5n+3l-b)/(l+n),$$

故 $5n+3l = b$，从而 $l+2n = \frac{n+b}{3}$。于是：

$$2a^2+nl+2n^2 = \frac{2m^2}{25} + \frac{n(n+b)}{3}$$

$$= \frac{6}{75}[m^2+4n(n+b)] + \frac{1}{75}n(n+b) < 0,$$

这表示 $W_3$ 与$m$同号，亦即 $O$与$N$有相同的稳定性。

今设 $n>0$，则由$N$是焦点知，必有 $n<-b=-3l-5n$，故

$$3l+6n<0.$$

从而 $l<0$，由$N$为焦点的条件可导出

$$25a^2+12n(l+2n)<0,$$

但 $12n < -6l$。从而

$$25a^2 - 6l(l+2n) < 0.$$

由此推得

$$36a^2 - 4l(3l+6n) < 0.$$

最后一个条件保证了方程

$$\dot{x} = -y + lx^2 + 5axy + ny^2,$$
$$\dot{y} = x[1 + ax + (3l+5n)y]$$

只有两个实奇点 $O$ 与 $N\left(0, \frac{1}{n}\right)$。定理证毕。■

下面介绍文献[3.5]中关于不以赤道为轨线的二次系统[1])：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{10}x + a_{20}y + a_{11}x^2 + b_{22}xy, \\ \dot{y} &= b_{10}x + b_{20}y + a_{11}xy + b_{22}y^2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

的奇点性质相互影响的有趣事实，这里假设(3.3)已有一个奇点 $O(0, 0)$。由(3.3)消去 $dt$ 可得著名的 Jacobi 方程，它是可积的。

先设 $b_{10} \neq 0$。不难证明(3.3)有积分直线：

$$\frac{x}{y} = -\frac{b_{20} - a_{10}}{2b_{10}} \pm \frac{1}{2b_{10}} \sqrt{4b_{10}a_{20} + (b_{20} - a_{10})^2} \triangleq C. \tag{3.4}$$

由此即见(3.3)只有三个有限远奇点：

$$O(0, 0), \quad A_{1,2}\left(-\frac{(b_{10}C + b_{20})C}{b_{22} + a_{11}C}, \quad -\frac{b_{10}C + b_{20}}{b_{22} + a_{11}C}\right), \tag{3.5}$$

其中 $A_{1,2}$ 代表两个奇点 $A_1$ 与 $A_2$，因为 $C$ 的表达式中根号之前有正负号，$A_1$、$A_2$ 都在直线(3.4)上，它们要是实的，必须

$$\Delta = 4b_{10}a_{20} + (b_{20} - a_{10})^2 \geqslant 0 \tag{3.6}$$

(当等号成立时 $A_1 = A_2$)。由于当 $O(0, 0)$ 有指标 $+1$ 时，(3.6)恰好表示 $O$ 是结点的条件，故知：若 $O(0, 0)$ 为焦点或中心，则直线(3, 4)和 $A_1$、$A_2$ 都不是实的，因而(3.3)在有限远处只有唯一的实奇点 $O$。当 $O$ 为正常结点时，(3.3)有三个实初等奇点(可能有一个

1) 在文献[3.6]中已证：若二次系统两个方程右方的二次项为 $X_2$、$Y_2$，则赤道不是轨线的充要条件是：

$$yX_2 - xY_2 \equiv 0.$$

类似文献[3.6]的文章，还有最近的文献[3.50]。

在无限远处，见后面的例 3.2)，其中 $A_1$ 为结点，$A_2$ 为鞍点。当 $O$ 为单向结点时，(3.3) 还有一个鞍结点，$A_1=A_2$ (可能在无限远处，见后面的例 3.1)。若 $O$ 为鞍点，则 $A_1$、$A_2$ 都是结点，可能重合。

次设 $b_{10}=0$，这时 $y=0$ 是积分直线。容易由 (3.3) 直接算出三个有限远奇点为：

$$O(0,0),\quad A_1\left(-\frac{a_{10}}{a_{11}},\ 0\right),$$

$$A_2\left(\frac{b_{22}(a_{10}-b_{20})-a_{20}b_{20}}{a_{20}a_{11}},\ \frac{b_{20}-a_{11}}{a_{20}}\right),$$

相应的特征方程的常数项依次为：

$$a_{10}b_{20},\ -a_{10}(b_{20}-a_{10})\text{ 及 }b_{20}(b_{20}-a_{10})\{b_{22}(a_{10}-b_{20})-a_{20}a_{11}\}^2,$$

判别式依次为：

$$(a_{10}-b_{20})^2,\ b_{20}^2,\ a_{10}^2\{b_{22}(a_{10}-b_{20})^2-a_{20}a_{11}\}^2.$$

故 $O$、$A_1$、$A_2$ 三者之中有一为鞍点，另两个为结点，没有焦点。

再看无穷远奇点，令 $x=\dfrac{1}{z}$，$y=\dfrac{v}{z}$，可将 (3.3) 化为：

$$\frac{dz}{dv}=\frac{a_{11}+b_{22}v+z(a_{10}+a_{20}v)}{a_{10}v^2+(a_{10}-b_{20})v-b_{10}}. \tag{3.7}$$

由此可见，赤道上要有奇点，必须 $v=-\dfrac{a_{11}}{b_{22}}$ 是

$$a_{20}v^2+(a_{10}-b_{20})v-b_{10}=0$$

的根，从而导出

$$b_{10}b_{22}^2+(a_{10}-b_{20})a_{11}b_{22}-a_{20}a_{11}^2=0. \tag{3.8}$$

但此式即 $b_{22}+a_{11}C=0$。因此，当有限远实奇点 $O$、$A_1$、$A_2$ 存在时，(3.3) 没有无限远奇点。反之，若无限远奇点 $\left(1,\ -\dfrac{a_{11}}{b_{22}},\ 0\right)$ 存在，则 $A_1$ 与 $A_2$ 至少有一个跑向无限远。若 $b_{22}=0$ 而 $a_{11}\neq 0$，则仅当 $a_{20}=0$ 时，(3.8) 式才能成立，这时无限远奇点是 $(0,1,0)$。

**例 3.1** $\dot{x}=x-4y+x^2-2xy,$

$\dot{y}=x-3y+xy-2y^2,$

这时 $C$ 有重根 2，$x=2y$ 为二重积分直线，有限远奇点 $O(0,$

0)为单向稳定结点，$\left(1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$为无限远鞍结点，有一特征根为零。

例 3.2 $\dot{x}=2x+x^2,\quad \dot{y}=x+y+xy,$

这里 $C=0$ 或 1，方程有无限远鞍点 (0, 1, 0) 和有限远结点 $O$和 $A_1$ (−2, −2)。

总结以上的分析，对方程(3.3)可得以下定理：

**定理 3.5** 当 $O(0,0)$ 为方程(3.3) 的正常结点，即 $\Delta>0$，$a_{10}b_{20}-a_{20}b_{10}>0$ 时，(3.3)除了 $O$ 以外，还可以有两个实奇点 $A_1$ 与 $A_2$，其中之一为结点，另一为鞍点。这里可以分成两种情况：

1) $A_1\neq A_2$ 都是有限远奇点；

2) $A_1\neq A_2$，其一为有限远奇点，另一为无限远奇点[1)]。

其次，当 $\Delta=0$ 时，若 $a_{10}b_{20}-a_{20}b_{10}>0$，则 $O$为单向结点，$A_1=A_2$ 为鞍结点，它可能是有限远，也可能在无限远[1)]。特别，当 $a_{20}a_{11}\neq0$ 且 $b_{10}=a_{10}=b_{20}=0$ 时，$A_1=A_2=0$。

又若 $a_{10}b_{20}-a_{20}b_{10}<0$，则 $O$ 为鞍点，另两个奇点为结点，可能重合，也可能有一在无限远处。

若 $a_{10}b_{20}-a_{20}b_{10}=0$，$a_{10}+b_{20}\neq0$ 则 $O$ 是鞍结点，另外还有一个结点，它也可能在无限远处。

最后，当 $O$ 为焦点或中心时，它是(3.3)的唯一的实奇点[2)]。

以上共有七种情况，其中五种情况已在文献[3.6]中画有全局相图。

此外，文献[3.7]中还研究了不以赤道为轨线，且方程右方可以含有常数项的较(3.3)更为一般的二次系统，找到无限远奇点成为中心或焦点的充要条件。但易看出，那些条件对于右方不含常数项的方程(3.3)都是不能成立的。这说明：仅当二次系统右边确含常数项且没有有限远奇点时，不以赤道为轨线的方程才可能有

1) 这两情况在文献[3.6]中是被除外的，故缺了两幅图，又[3.5]中未考虑相图的问题。

2) 此时 $\Delta<0$，故(3.5)中的 $A_{1,2}$ 为复奇点，又 (3.6)仅当 $a_{11}=b_{11}=0$ 时，才成立，但这时(3.3)已退化为线性系统了。

无限远中心或焦点。在文献[3.7]中还有：

**定理 3.6** 若 $O(0, 0)$ 是(3)的焦点，则必为粗焦点。

实际上，容易算出 $W_1 = W_2 = W_3 = 0$，故若焦点非粗，则必为中心。

根据文献[3.8]中 §5 最后所说的，(3.3)可以看成是 $R^3$ 中的一次齐向量场在以原点为中心的球面 $S^2$ 上所导出的切向量场在 $(x, y)$ 平面上的投影，因此定理 3.5 的那些结论其实对 Poincaré 球面上的线性系统

$$\dot{x} = a_1 + b_1x + c_1y, \quad \dot{y} = a_2 + b_2x + c_2y \tag{3.9}$$

也是成立的。当我们把(3.9)化为齐次坐标，再令 $x = 1$，得到

$$\begin{cases} \dot{y} = b_2 + (c_2 - b_1)y + a_2z - a_1zy - c_1y^2 \\ \dot{z} = -b_1z - a_1z^2 - c_1yz, \end{cases} \tag{3.10}$$

它比

$$\begin{cases} \dot{y} = a_0 + a_1y + a_2z + a_3y^2 + a_4yz, \\ \dot{z} = b_0 + b_1y + b_2z + a_3yz + a_4z^2 \end{cases} \tag{3.11}$$

要特殊一些，即第二方程缺少常数项，且有积分直线 $z = 0$。但(3.9)与(3.3)则互有出入。例如由(3.7)可以看出，(3.3) 在赤道上不能有两个不同的奇点，而由(3.10)看出，(3.9)可以在赤道上有两个不同的奇点。

**注 3.2** 满足 $yX_2 - xY_2 \equiv 0$ 的二次系统

$$\dot{x} = X_1 + X_2, \quad \dot{y} = Y_1 + Y_2 \tag{3.12}$$

其二次项 $X_2$ 与 $Y_2$ 必有一次的公因式，反之，$X_2$ 与 $Y_2$ 有一次或二次公因式时不一定满足 $yX_2 - xY_2 \equiv 0$。一般地，当 $X_2$ 与 $Y_2$ 有一次公因式 $y$ 时，W.A.Coppel 曾证明了其极限环的唯一性，并证明二阶细焦点外围不存在极限环（见后面 §9）。对于方程(3.3)，由于它是(3.10)的特例，而(3.10)是由(3.9)化来的，故知(3.3)不存在极限环。($b_{10} \neq 0$ 时可用 $v = b_{10}x + b_{20}y$ 代替 $y$。)

**注 3.3** 对一般二次系统可证明：若有实直线解过奇点 $O$，则 $O$ 非焦点，且直线解上还另有一实奇点（可能为无限远奇点）。反之，过焦点的直线解必为复的，其上无其他实奇点。

**注 3.4** 当 $O(0, 0)$ 为焦点时，若过 $O$ 有复直线解，则二次系统必具

$$\dot{x} = -y + ax + lx^2 + mxy + (l + ma)y^2,$$
$$\dot{y} = x + ay + ax^2 - maxy + (m + a)y^2$$

的形式。此时复直线解为 $y = \pm ix$，其上除 $O$ 外还有两个复奇点 $\left(\frac{1}{m}, \pm\frac{i}{m}\right)$。

## 二、二次系统无限远奇点的性质及个数

设有二次系统：

$$\dot{x} = a_1 + b_1x + c_1y + d_1x^2 + e_1xy + f_1y^2 = P(x, y),$$
$$\dot{y} = a_2 + b_2x + c_2y + d_2x^2 + e_2xy + f_2y^2 = Q(x, y)。\quad (3.13)$$

要是联立方程

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0 \quad (3.14)$$

不很容易求解，则想根据(3.13)中的 12 个系数所满足的等式或不等式来确定有限远奇点的个数和性质也远非易事。在这方面文献[3.9]用类似于文献[3.5]的方法得到一些有趣的结果，其中除了著名的 Berlinskii 定理(后面我们要提到)以外，还可再举出一个定理为例。

**定理 3.7** 若二次系统有三个奇点，其中之一为中心，则只可能出现下列三种情况：1) 一中心，两鞍点；2) 一中心，一鞍结点，一单向结点；3) 一中心，一鞍点，一退化鞍点(只有两条分界线)。

证明从略。最后一种情况纠正了文献[3.10]中一个图形的错误，我们已在文献[3.2]中提及。文献[3.9]还就三个奇点的情况证明了其他一些分布，如两中心，一鞍点或鞍结点；两焦点和一退化鞍点都是不可能的。

80 年代以后，在文献[3.11]～[3.15]中致力于本段开始时所提问题的研究，作者们在方法上有一定的创新，结果也不少。例如在文献[3.11]中得到当方程(3.13)右边无常数项时，存在 4 个不同的有限远实奇点，或 4 个可能有重的实奇点，或 2 个实奇点。

2个复奇点的条件;又得到当存在4个实奇点时,其中有一个(或3个,或2个)是鞍点的条件. 文献[3.12]继[3.11]之后讨论了结点的个数,在文献[3.13]中得到了除$O(0,0)$以外的焦点或鞍点都只能是粗的$\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\neq 0\text{ 在该奇点}\right)$条件. 在文献[3.15]中除了对一般的方程(3.13)讨论了前面那些问题以外,还讨论了中心二次曲线

$$\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{3.15}$$

的性质. 类似的文章还有[3.51]. 由于这些文章都很长,公式很多,这里不予介绍了,但曲线(3.15)在后面第三段中还要提到. 此外,文献[3.53]和[3.54]利用仿射不变量和Comitants完全解决了二次系统按实奇点的个数与重数来分类的问题,结果很完整.

现在介绍文献[3.16]中关于二次系统(3.13)的无穷远奇点的个数和性质的判定研究. 这篇文章技巧性较高,有的判别条件也很繁,我们只介绍其中较简单也是较基本的那一部分[1].

二次系统(3.13)的无穷远奇点$(1,u,0)$所满足的三次方程是[2]:

$$\begin{aligned}f(u)&=-f_1u^3+(f_2-e_1)u^2+(e_2-d_1)u+d_2\\&=f_2u^2+e_2u+d_2-u(f_1u^2+e_1u+d_1)=0.\end{aligned} \tag{3.16}$$

今记

$$A=\begin{vmatrix}e_2 & f_2\\ e_1 & f_1\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix}f_2 & d_2\\ f_1 & d_1\end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix}d_2 & e_2\\ d_1 & e_1\end{vmatrix},$$

$$D=B^2-AC, \tag{3.17}$$

则

$$D=(f_2d_1-f_1d_2)^2-(f_1e_2-f_2e_1)(d_2e_1-e_2d_1). \tag{3.18}$$

故$D$是联立方程

$$f_2u^2+e_2u+d_2=0,\quad f_1u^2+e_1u+d_1=0$$

---

1) 最近又见到文献[3.17],其中对二次系统的无穷远奇点的分析比文献[3.16]中更为仔细.

2) 若记无穷远奇点为$(v,1,0)$,则$v$满足方程$g(v)=d_2v^3+(e_2-d_1)v^2+(f_2-e_1)v-f_1=0$,故知$d_2=0$时有奇点$(1,0,0)$,$f_1=0$时有奇点$(0,1,0)$.

的结式，$D=0$ 表示(3.13)两方程的二次项有公因式。

**定理 3.8**　设(3.13)有三个无穷远奇点。如果 $D>0$，则两个是结点，一个是鞍点，指标之和为 1。如果 $D<0$，则当 $A>0$ 时，有三个结点，指标之和为 3，$A<0$ 时，有一个结点，两个鞍点[1]，指标之和为 $-1$。

**证**　不妨设 $f_1\neq 0$，因为 $f_1=0$ 时，(3.16)的三个根都可容易求出，而定理的结论可直接验证，故从略。现在假设三个无穷远奇点为 $(1,\xi_i,0)$ $(i=1,2,3)$，且 $-\infty<\xi_1<\xi_2<\xi_3<+\infty$。在(3.13)中令 $x=\frac{1}{z}$，$y=\frac{u}{z}$，$z=\frac{dt}{d\tau}$。可得：

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{d\tau}=-z(a_1z^2+b_1z+c_1zu+d_1+e_1u+f_1u^2),\\ \dfrac{du}{d\tau}=-a_1z^2u+a_2z^2-c_1zu^2+b_2z+(c_2-b_1)zu+f(u).\end{cases}\tag{3.19}$$

由此可见 $(1,\xi_i,0)$ 所对应的特征行列式是：

$$\begin{aligned}\Delta_i&=\begin{vmatrix}-(d_1+e_1\xi_i+f_1\xi_i^2) & 0\\ b_2+c_2\xi_i-b_1\xi_i-c_1\xi_i^2 & -f_1(\xi_i-\xi_j)(\xi_i-\xi_k)\end{vmatrix}\quad(i\neq j\neq k)\\ &=f_1(\xi_i-\xi_j)(\xi_i-\xi_k)(d_1+e_1\xi_i+f_1\xi_i^2).\end{aligned}\tag{3.20}$$

当 $\Delta_i>0$ 时 $(1,\xi_i,0)$ 是结点；$\Delta_i<0$ 时 $(1,\xi_i,0)$ 是鞍点，$\Delta_i=0$ 时，必须 $f_1\xi_i^2+e_1\xi_i+d_1=0$，从而由(3.16)知 $f_2\xi_i^2+e_2\xi_i+d_2=0$。这时有一有限远奇点趋于无限远而与 $(1,\xi_i,0)$ 重合。故 $(1,\xi_i,0)$ 为 Liapunov 型奇点，即有一特征根为零的结点、鞍点或鞍结点。

**引理 3.1**　设 $f_1\neq 0$，则当(3.13)有三个无穷远奇点时，其中至少有一个是结点。

**证**　由(3.20)式不难直接验证下面的恒等式成立：

$$\begin{aligned}&\frac{\Delta_1}{(\xi_1-\xi_2)^2(\xi_1-\xi_3)}+\frac{\Delta_2}{(\xi_2-\xi_1)^2(\xi_2-\xi_3)}+\frac{\Delta_3}{(\xi_3-\xi_2)^2(\xi_1-\xi_3)}\\ &\qquad+\frac{\Delta_2}{(\xi_2-\xi_3)^2(\xi_1-\xi_2)}=f_1^3(\xi_1-\xi_3).\end{aligned}\tag{3.21}$$

1) 由 $D=B^2-AC$ 可知当 $D<0$ 时必有 $A\neq 0$。

注意到 $\xi_1<\xi_2<\xi_3$, 即知 $\Delta_1$、$\Delta_2$、$\Delta_3$ 中至少有一个大于零, 即至少有一个奇点是结点。∎

由(3.16)的根与系数的关系不难得到恒等式

$$\Delta_1\Delta_2\Delta_3=-f_1^2(\xi_1-\xi_2)^2(\xi_2-\xi_3)^2(\xi_3-\xi_1)^2D_{\circ} \qquad (3.22)$$

因此, 当 $D>0$ 时, 有 $\Delta_1\Delta_2\Delta_3<0$。但由引理 3.1 知道, 至少有一个 $\Delta_i>0$, 从而必有两个 $\Delta$ 为正, 一个 $\Delta$ 为负。即有两个结点, 一个鞍点。

其次, 当 $D<0$ 时, 有 $\Delta_1\Delta_2\Delta_3>0$, 这时有两种可能: 1) 三个 $\Delta$ 都大于零, 即有三个结点; 2) 两个 $\Delta$ 小于零, 一个 $\Delta$ 大于零。即有两个鞍点, 一个结点。下面看如何用 $\Delta$ 的符号判别之:

首先我们证明: 由 $D<0$ 和(3.22)式可得出

$$e_1^2-4d_1f_1>0,$$

即

$$f_1u^2+e_1u+d_1=0,$$

应有两个不相等的实根。假设不对, 即

$$e_1^2-4d_1f_1\leqslant 0_{\circ}$$

则

$$f_1(f_1u^2+e_1u+d_1)\geqslant 0 \ (\text{对一切 } u),$$

从而 $\Delta_1\geqslant 0$, $\Delta_2\leqslant 0$, $\Delta_3\geqslant 0$, $\Delta_1\Delta_2\Delta_3\leqslant 0$。这与(3.22)式矛盾。现在假设

$$f_1u^2+e_1u+d_1=0$$

的两根为 $u_1<u_2$。则有

$$u_1+u_2=-e_1/f_1, \quad u_1\cdot u_2=d_1/f_1,$$

并且有下式成立:

$$f(u_1)=\frac{1}{f_1}(Au_1-B),$$

$$f(u_2)=\frac{1}{f_2}(Au_2-B)_{\circ} \qquad (3.23)$$

试证第一个等式:

$$f_1f(u_1)-Au_1+B=f_1(f_2u_1^2+e_2u_1+d_2)$$
$$-(e_2f_1-e_1f_2)u_1+d_1f_2-d_2f_1=f_2(f_1u_1^2+e_1u_1+d_1)=0_{\circ}$$

故第一式成立。同法可证第二式。

今设 $A>0$，则 $Au_1-B<Au_2-B$，即 $f_1f(u_1)<f_1f(u_2)$。但

$$f_1f(u_1)\cdot f_1f(u_2)=(Au_1-B)(Au_2-B)$$
$$=\frac{A^2d_1+ABe_1+B^2f_1}{f_1}=D。$$

故知

$$f_1f(u_1)<0<f_1f(u_2),$$

于是知道 $f(-\infty)$ 和 $f(u_1)$ 异号，$f(u_1)$ 和 $f(u_2)$ 异号，$f(u_2)$ 和 $f(+\infty)$ 异号，故得到

$$-\infty<\xi_1<u_1<\xi_2<u_2<\xi_3<+\infty。$$

最后由(3.20)式即可看出：$\Delta_1>0$，$\Delta_2>0$，$\Delta_3>0$。即三个无穷远奇点都是结点。

同理可证：当 $D<0$，$A<0$ 时，(3.13) 的三个无穷远奇点有一个结点，两个鞍点。

以下几个定理的证明方法与定理 3.8 类似，故述而不证。

**定理 3.9** 设(3.13)只有一个无穷远奇点，则当 $D>0$ 时，它是结点，$D<0$ 时，它是鞍点。

**定理 3.10** 设(3.13)有两个无穷远奇点，则当 $D>0$ 时，它们是鞍结点和结点；当 $D<0$ 时，是鞍结点和鞍点。

**定理 3.11** 设(3.13) 有三个无穷远奇点，且 $D=0$[1]，则当 $A+C>0$ 时，两个是结点，一个是 Liapunov 型奇点；当 $A+C=0$ 时，一个是结点，两个是 Liapunov 型奇点；当 $A+C<0$ 时，一个是结点，一个是鞍点，一个是 Liapunov 型奇点。

**注 3.5** 有三个无穷远奇点，且 $D=0$，表示某 1 个或 2 个 $\xi_i$ 是 $f_1u^2+e_1u+d_1=0$（因而也是 $f_2u^2+e_2u+d_2=0$）的根，故 $P(x,y)=0$ 与 $Q(x,y)=0$ 交于无穷远奇点处。这就是三个无限远奇点中至少有一个不是初等奇点的原因。

**定理 3.12** 设 (3.13) 只有一个无穷远奇点，且 $D=0$，又

---

1）注意：对于二次系统分类法中的(I)类方程，总有 $A=B=C=D=0$。

$f(u)=0$ 只有一个单实根。则当 $A^2+C^2\neq0(=0)$ 时，此奇点是 Liapunov 型奇点(结点)。

**定理 3.13** 设 (3.13) 只有两个无穷远奇点，且 $D=0$，又 $f(u)=0$ 的重根不是 $f_1u^2+e_1u+d_1=0$ 的根，则它们中的一个是鞍结点；另一个是 Liapunov 型奇点。

综合上述定理的结论，得下表(表 3.1)：

表 3.1

| D \ 奇点数 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|
| − | $A>0$：三个结点；<br>$A<0$：一结点，两鞍点 | 一鞍点，一鞍结点 | 一鞍点 |
| + | 两结点，一鞍点 | 一结点，一鞍结点 | 一结点 |
| 0 | $A+C>0$：两结点，一李氏奇点；<br>$A+C<0$：一结点，一鞍点，一李氏奇点；<br>$A+C=0$：一结点，二李氏奇点 | $f(u)=0$的重根不是 $f_1u^2+e_1u+d_1=0$ 的根时：一鞍结点，一李氏奇点；<br>$f(u)=0$ 的重根是 $f_1u^2+e_1u+d_1=0$ 的根时：一单奇点，一高阶奇点 | $f(u)=0$ 只有一个单实根时：<br>$A^2+C^2=0$：一结点；<br>$A^2+C^2\neq0$：一李氏奇点；<br>$f(u)=0$有一三重根时：一高阶奇点 |

其中关于 Liapunov 型奇点和其他高次奇点，均另有方法判别其类型(是结点，鞍点还是鞍结点)，或画出邻域中的轨线图，这里都从略。

**注 3.6** 当二次系统的方程为：

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,$$
$$\dot{y}=x(1+ax+by) \tag{3.24}$$

时可以算出：

$$D=n[na^2-mab+lb^2],\ A=nb.$$

不妨设 $n>0$，于是 $A$ 与 $b$ 同号。$na^2-mab+lb^2$ 的符号表示 $1+ax+by=0$ 的斜率与 $-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2=0$ 的两渐近线的斜率之间的关系。由定理 3.8 易见，当 $D>0$ 时，如果(3.24) 有四个有限远奇点，则必有两个鞍点和两个非鞍点(因为无限远奇点

的指标之和为1)，当然(3.24)也可能只有两个有限远奇点，则这时必有一个鞍点和一个非鞍点，当$D<0$, $A>0$时，(3.24)必有三个鞍点和一个非鞍点（因为无限远奇点的指标之和为3)；当$D<0$, $A<0$时，(3.24)的有限远奇点为一个鞍点，三个非鞍点，或两个非鞍点（因为无限远奇点的指标之和为$-1$)。

关于无限远奇点的论述在文献[3.18]中还有：

**定理3.14** 若二次系统有三个鞍点和一个非鞍点，则无限远奇点必均为单奇点，它们都是结点。

**证** 只须注意这时无穷远奇点的指标总和应是3。又仿[3.5]可证：如果$D=0$，即$X_2$与$Y_2$有公因子时，有限远奇点最多只能是三个，故在定理的假定之下必有$D\neq 0$。由表3.1中所列可以看出：在前面两行中，要使无穷远奇点指标之和为3，但又不是三个结点的，只有当无穷远奇点有两个："一结点，一鞍结点"或一个"结点"，而结点的指标为3才行，但这是不可能的。实际上，在前一情况，显见结点只能是指标为$+1$的初等结点；在后一情况，$f(u)=0$应有三重根，设$f(u)=-f_1(u-\xi_1)^3$。这时，对应于$(1, \xi_1, 0)$的特征行列式为：

$$\Delta=\begin{vmatrix} -(d_1+e_1\xi_1+f_1\xi_1^2) & 0 \\ b_2+(c_1-b_1)\xi_1-c_1\xi_1^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

因为$D\neq 0$，故$f_1u^2+e_1u+d_1=0$和$f_2u^2+e_2u+d_2=0$无公根，从而$f(u)=f_2u^2+e_2u+d_2-u(f_1u^2+e_1u+d_1)=0$和$f_1u^2+e_1u+d_1=0$无公根。但$\xi_1$是$f(u)=0$的根，故

$$f_1\xi_1^2+e_1\xi_1+d_1\neq 0,$$

即$(1, \xi_1, 0)$是Liapunov型结点，其指标应是1 [1)]。

关于二次系统无穷远奇点的个数与性质的判别，值得提到的还有文献[3.19]，在把方程化为10种标准型以后，判别条件显得更简单了。此外，在文献[3.44]中列举了二次系统的高阶有限和无穷远奇点的一切可能类型，为过去的文献所未见过。

最近，在文献[3.48]中，对平面多项式Hamilton系统

1) 此证明由陆毓麒作出的；其他证明见本书§23。

$$\dot{x}=-\frac{\partial H}{\partial y},\quad \dot{y}=\frac{\partial H}{\partial x}\quad (H\text{ 为多项式})$$

的有限远奇点和无限远奇点的性质得到值得注意的下列结果：

1) 设 $a$ 是$(n, n)$型多项式 Hamilton 系统 $X=(-H_y, H_x)$ 的一个有限远孤立奇点，则$X$在 $a$ 的指标 $\leqslant 1$。若指标 $=1$，则 $a$ 为中心；若指标 $<1$，则在 $a$ 的邻域中有 $2(1-i)$ 个双曲域而无椭圆与抛物域。

2) 设 $a$ 是$(n, n)$型多项式 Hamilton 系统的无穷远奇点，则 $a$通有地为一结点，从而指标为 $+1$。

3) 若 $q$ 是 $(n, m)$ 型多项式 Hamilton 系统的无穷远奇点，$n>m$，则通有地成立：

(i) 当 $n$ 为偶数时，$q$ 为结点。

(ii) 当 $n$ 为奇数而 $m$ 为偶数时，$q$ 有一退化双曲域（以赤道为轨线）和一椭圆域，指标为 $+1$。

(iii) 当 $n$ 与 $m$ 皆为奇数时，$q$ 有两个退化双曲域（这时指标为 0）或两个椭圆域，这时指标为 $+2$。

以上的结果对于确定中心的个数是有用处的（见§8）。

对于三次多项式系统的无穷远奇点的分析还可参考文献[3.20]的两篇文章。

## 三、奇点分布的几何构形

下一个关于二次系统的有限远奇点的几何构形的 Berlinskii 定理已在文献[3.2]的 §10 中证明过。

**定理 3.15** 设二次系统有四个有限远奇点，如果以它们为顶点的四边形是凸的，则两个对顶的奇点是鞍点，另两个对顶的奇点是非鞍点。如果四边形是凹的，则三个外顶点是鞍点（非鞍点），而一个内顶点是非鞍点（鞍点）。

此定理的内容可以用图 3.1 和图 3.2 来表示。其中图 3.2 的三个外奇点也可能具有指标 $-1$，这时内奇点的指标为 $+1$。

现在以虚线连接凹四边形的两个外顶点，立刻看出图 3.2 中

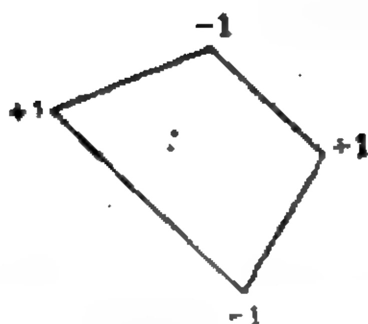



图 3.1

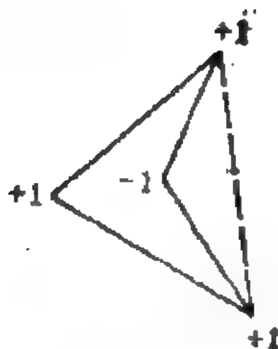



图 3.2

的奇点分布具有 $3-1$ 的几何构形，即：三个指标为 $+1$ 的奇点构成一个三角形的三顶点，那个指标为 $-1$ 的奇点则在这三角形的内部，如果正负指标对调，则它们具有 $-3+1$ 的构形。

在文献[3.21]中举例说明了三次和四次多项式系统的奇点分布也可以分别存在 $5-3+1$ 和 $7-5+3-1$ 的几何构形，如图3.3和3.4所示。

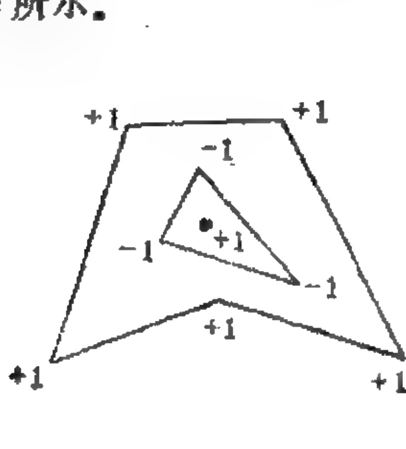



图 3.3

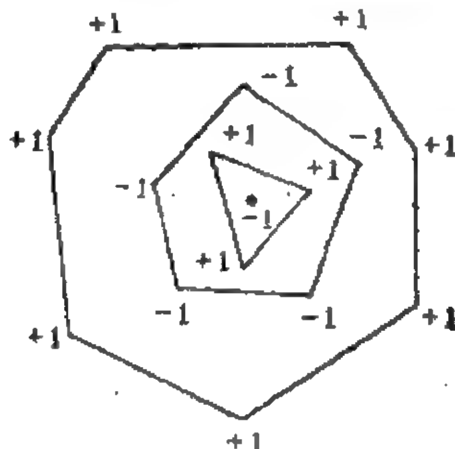



图 3.4

在文献[3.21]中猜测：$n$ 次系统的奇点分布可能存在着

$$(2n-1)-(2n-3)+(2n-5)-\cdots+(-1)^{n-1} \qquad (3.25)$$

形式的几何构型。后来文献[3.22]中便作出了实现(3.25)的具体的 $n$ 次系统，接着文献[3.23]中又改进了[3.22]中的作法和证明。以下我们基本上按照[3.23]中的办法来证明 $n$ 次系统的奇点可以存在(3.25)形式的几何构形。

**引理 3.2**　如果(3.1)的 $P_n(x, y)=0$(或 $Q_n(x, y)=0$) 的一

支上两相邻初等奇点$A$与$B$之间另有$P_n(x, y)=0$(或$Q_n(x, y)=0$)的$m\geqslant 0$分支交此分支于一点$C$，则当$m$为奇数时，$A$与$B$的指标同为$+1$或$-1$，当$m$为偶数时，$A$与$B$的指标有一个为$+1$，另一个为$-1$。

其证明与文献[3.2]中§11的引理11.2的证明类似，在此从略。

下面研究$n$次多项式系统

$$\begin{cases} \dot{x}=\prod_{i=1}^{n}[y-K_i(x+\alpha)]=P_n(x, y) \\ \dot{y}=\prod_{i=1}^{n}[y-k_i(x-\beta)]=Q_n(x, y) \end{cases} \quad (\alpha>0,\beta>0). \tag{3.26}$$

**定理3.16** 在系统(3.26)中，设$n=2m+1$，且

$$0<K_1<k_1<K_2<k_2<\cdots<k_m<K_{m+1}, \tag{3.27}$$
$$k_{m+1}<K_{m+2}<k_{m+2}<\cdots<k_{2m+1}<0,$$

则其奇点的分布具有

$$-(4m+1)+(4m-1)-(4m-3)+\cdots-1 \tag{3.28}$$

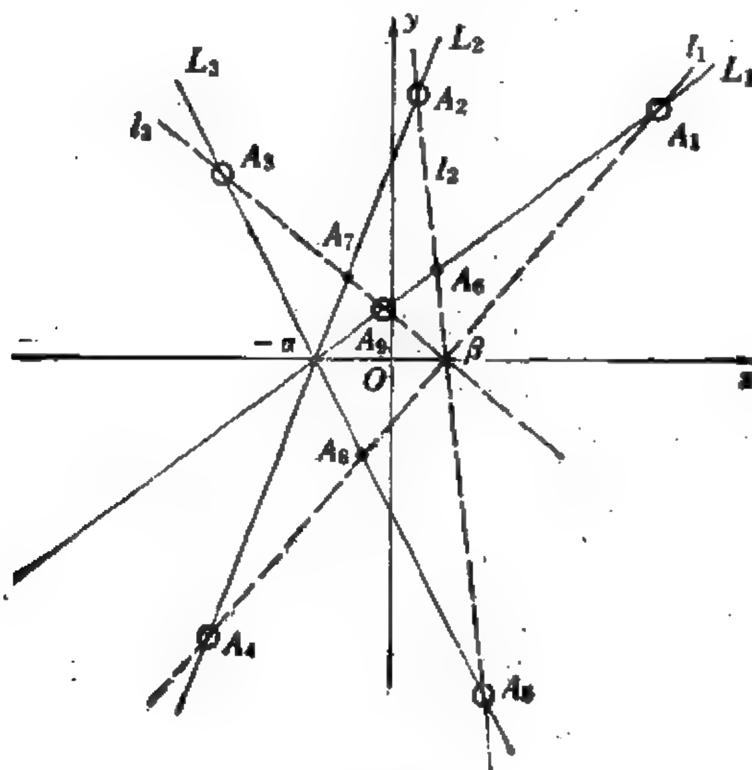



图 3.5

的几何构形。

为了画图和证明方便，我们仅就$m=1$的情况来证明本定理。对$m$为任何正整数，证明是完全类似的。如图3.5以及由(3.27)知有不等式

$$0<K_1<k_1<K_2,\quad k_2<K_3<k_3<0。\tag{3.29}$$

由此易见每一直线

$$L_i:\ y-K_i(x+\alpha)=0\ \ (i=1,\ 2,\ 3)$$

都和每一直线

$$l_i:\ y-k_i(x-\beta)=0\ \ (i=1,\ 2,\ 3)$$

相交，故共有9个交点。其中有5个位于最外圈，即经过$(-\alpha,\ 0)$的三直线$L_1$、$L_2$、$L_3$依次与经过$(\beta,\ 0)$的三直线$l_1$、$l_2$、$l_3$的交点$A_1$、$A_2$、$A_3$以及过$(-\alpha,\ 0)$的$L_2$、$L_3$与过$(\beta,\ 0)$的$l_1$、$l_2$的交点$A_4$、$A_5$。其次是位于第二圈的三个交点：

$$A_6=L_1\times l_2,\ A_7=L_2\times l_3,\ A_8=L_3\times l_1。$$

最后还有一点$A_9=L_1\times l_3$。

移原点于$A_1$，不难证明$A_1$有指标$-1$，由$A_1$出发，沿$L_1$到$A_6$，故$A_6$有指标$+1$（由引理3.2）（图3.5中用空心圈表示指标为$-1$的奇点，实黑点表示指标为$+1$的奇点）。从$A_6$出发沿$l_2$到$A_2$，故$A_2$有指标$-1$。仿此，可知$A_7$有指标$+1$，$A_8$、$A_9$有指标$-1$。

$A_5$和$A_4$的指标则可由$A_6$与$A_7$（或$A_8$）的指标以及引理3.2推出都是$-1$。故这9个奇点的几何构形是$-5+3-1$。

**定理3.17** 在(3.26)中设$n=2m$，且

$$0<K_1<k_1<\cdots<k_m,\quad K_{m+1}<k_{m+1}<\cdots<k_{2m}<0,\tag{3.30}$$

则其奇点的分布具有

$$-(4m-1)+(4m-3)-(4m-5)-\cdots+1\tag{3.31}$$

的几何构形。

图3.6所画的是$m=2$的情况，这时16个奇点$A_1,\ \cdots,\ A_{16}$所成的几何构形为$-7+5-3+1$。

显见在图3.5与3.6中若稍加改变诸等倾线，使与$x$轴的交

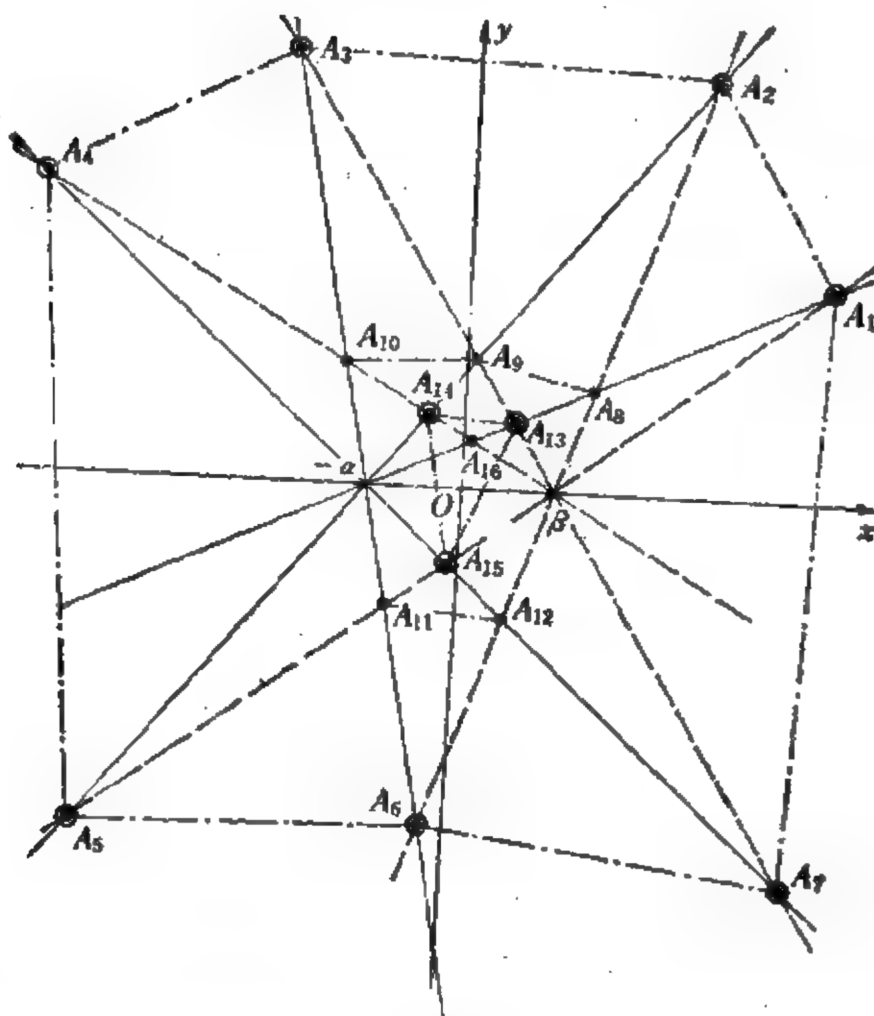



图 3.6

点各不相同，同时改变诸直线为与之相距甚近的曲线，则奇点的位置只作微小的变动，而它们的指标以及定理对系统(3.1)仍然成立。

现在注意：(3.28)与(3.31)可以统一写成：

$$-(2n-1)+(2n-3)-(2n-5)+\cdots+(-1)^n. \quad (3.32)$$

由于

$$(2n-1)+(2n-5)+(2n-9)+\cdots=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$(2n-3)+(2n-7)+\cdots=\frac{n(n-1)}{2}.$$

故知系统(3.26)的 $n^2$ 个有限远奇点的指标之和为：

$$-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=-n. \tag{3.33}$$

从而方程的 $n+1$ 个无限远奇点都应该是结点。如果改变 (3.26) 中一个方程的符号，则一切有限远奇点的指标都变号，这时 $n^2$ 个有限远奇点的指标之和为 $+n$。而 $n+1$ 个无穷远奇点中有一个指标为 $+1$，$n$ 个指标为 $-1$。这样，定理 3.15 对于具有

$$\pm(2n-1)\mp(2n-3)\pm(2n-5)+\cdots\mp(-1)^n$$

构形的 $n$ 次多项式系统也成立。

由上易见，当指标为 $+1$ 及 $-1$ 的奇点的个数为 $\frac{n(n+1)}{2}$ 及 $\frac{n(n-1)}{2}$ 时，指标和已达到最大值 $n$。

另一方面，如果代替 (3.26) 中的两个有心直线束而改取 $P_n(x, y)=0$ 与 $Q_n(x, y)=0$ 为两个斜率不同的平行直线束(即两个经过不同的无穷远奇点的直线束)，则显见：当 $n$ 为偶数时，奇点的指标之和为零；当 $n$ 为奇数时，奇点的指标之和为 $+1$ 或 $-1$。故得以下定理：

**定理 3.18** $n$ 次系统(3.1)若有 $n^2$ 个奇点 $O_1, \cdots, O_{n^2}$，则

$$\max\left|\sum_{i=1}^{n^2}\operatorname{ind}O_i\right|=n,\quad \min\left|\sum_{i=1}^{n^2}\operatorname{ind}O_i\right|=\begin{cases}0, & \text{当 } n \text{ 为偶数;}\\ 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数.}\end{cases} \tag{3.34}$$

这一定理在文献[3.1]、[3.24]、[3.25] 中都有证明，但都不如本书这一证明好。在文献[3.25]和[3.47]中把上述结果推广到了 $(n, m)$ 型多项式系统。详情见本书中 §7。

注意：当 $n$ 次系统有 $n^2$ 个实的单奇点，且指标之和达到最大值 $n$ 时，它们不一定具有(3.32)或(3.25)那样的构型。

**例 3.3** 对于三次系统(见文献[3.21])：

$$\dot{x}=xy^2-x^3-2x^2-\frac{35}{36}x-\frac{1}{9}=P(x, y),$$

$$\dot{y}=y(9x^2+6x+1-y^2)=Q(x, y).$$

其等倾线和奇点的位置如图 3.7 所示。

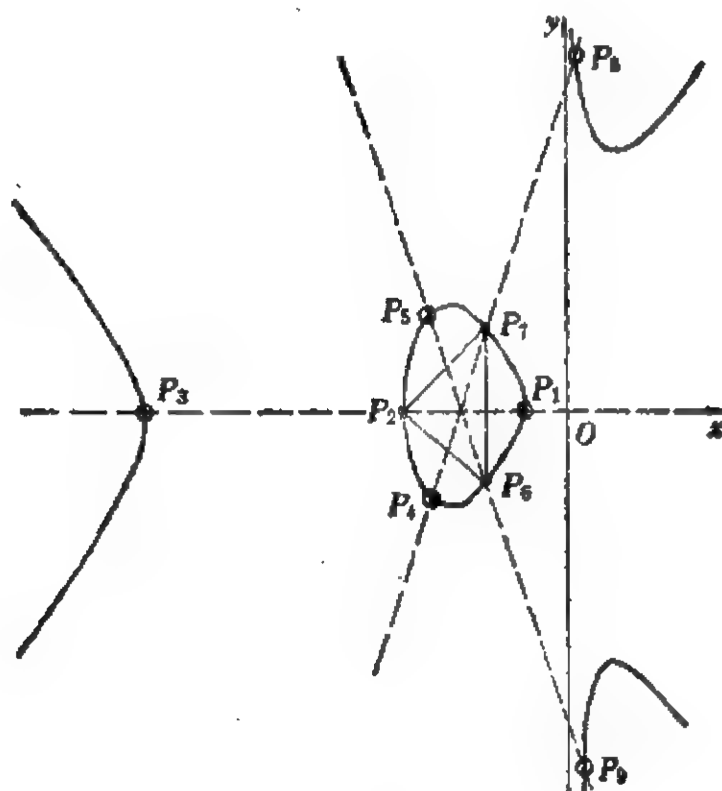



图 3.7

在图 3.7 中实三次曲线为 $P(x, y)=0$，三条虚直线为

$$Q(x, y)=0,$$

9 个奇点的坐标为：$P_1\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$，$P_2\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$，$P_3\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$，$P_4(-0.408, -0.224)$，$P_5(-0.408, 0.224)$，$P_6(-0.236, -0.292)$，$P_7(-0.236, 0.292)$，$P_8(0.144, 1.433)$，$P_9(0.144, -1.433)$。易证 $P_2$、$P_6$、$P_7$ 都有指标 $+1$；$P_1$、$P_3$、$P_4$、$P_5$、$P_8$、$P_9$ 都有指标 $-1$。后者构成一个凹六角形的顶点，而 $\Delta P_2P_6P_7$ 则在凹六角形的内部，故有 $-6+3$ 式的构型。

**例 3.4** 关于三次系统(见文献[3.26])：

$$\begin{cases}\dot{x}=-x\left(1+\frac{1}{2}y-\frac{3}{4}y^2+x^2\right)=P(x, y), \\ \dot{y}=y(y^2-1)-2x^2(y+1).\end{cases}$$

易见其轨线对称于 $y$ 轴，且有积分直线 $x=0$ 与 $y=-1$。它的奇点分布如图 3.8。其中 $N_1$ 为稳定结点，$S_1$ 为鞍点，$N_2$ 为不稳定结点，$S_2$ 与 $S_2'$ 为鞍点，$N_3$ 与 $N_3'$ 为不稳定结点，$F$ 与 $F'$ 为稳定焦点。

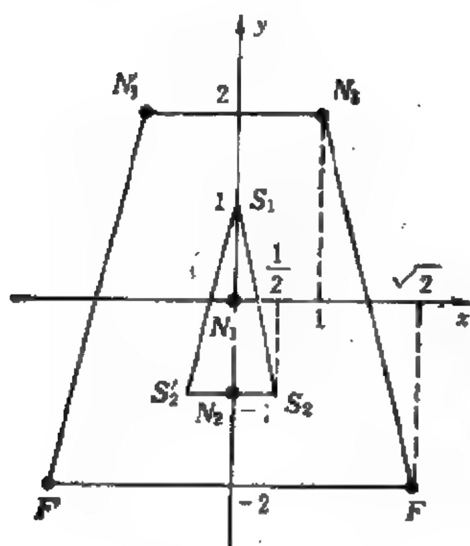



图 3.8

现在对原方程作一小扰动，得到

$$\begin{cases}\dot{x}=-x\left(1+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{3}{4}y^2+x^2\right),\\ \dot{y}=y(y^2-1-\varepsilon)-2x^2(y+1).\end{cases}$$

易证扰动系统仍有 9 个奇点，对称于 $y$ 轴，$\overline{N}_1$、$\overline{S}_1$、$\overline{F}$都保持在 $N_1$、$S_1$、$F$ 的 $\varepsilon$ 小邻域中，且性质不变。特别地，有

$$\overline{N}_2\left(0,\ -1-\frac{1}{2}\varepsilon+O(\varepsilon^2)\right),$$

$$\overline{S}_2\left(\frac{1}{2}+O(\varepsilon),\ -1-\frac{2}{3}\varepsilon+O(\varepsilon^2)\right).$$

由此立刻看出：当 $0<\varepsilon\ll 1$ 时，奇点有 $4-3+2$ 式的构形，而当 $-1\ll\varepsilon<0$ 时，则有 $5-3+1$ 式的构型。

关于有 9 个有限远奇点的三次系统，$3-3+3$ 型的构形是不可能的，这将在本书 §13 中予以证明之。

最近在文献[3.48]的2) 中应用古典的 Euler-Jacobi 公式给 Berlinskii 定理以新的有趣的证明，值得予以介绍于下：

Euler-Jacobi 公式：设有一联立实系数代数方程组：

$$\begin{cases}P(x,y)=0,\\ Q(x,y)=0.\end{cases}$$

其中 $P$、$Q$ 分别为 $n$、$m$ 次多项式。假设它有 $nm$ 个实解组

$$a_i=(x_i,\ y_i)\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ nm),$$

记 $A=\{a_i\}$，则在 $A$ 中每一点 $a_i$ 有

$$\mathrm{J}(a_i)=\det\left(\frac{\partial(P,Q)}{\partial(x,y)}\right)_{a_i}\neq 0.$$

那么对任一次数小于 $n+m-2$ 的多项式 $R(x,y)$，必有

$$\sum_{a_i\in A}\frac{R(a_i)}{\mathrm{J}(a_i)}=0.$$

现在应用上述公式证明熟知的 Berlinskii 定理：

设以 $P_i$ 记二次系统的奇点($i=1,2,3,4$)，当我们知道了它的指标时，就记为$P_i^+$或 $P_i^-$。

I) 假设知道 4 个奇点的指标之和为零，设为 $P_1^-$、$P_2^-$、$P_3^+$、$P_4^+$，我们要证明这 4 点构成凸四角形的顶点。

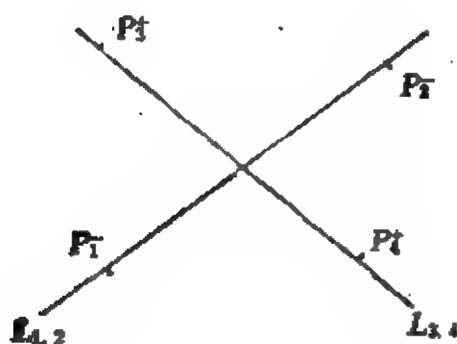



图 3.9

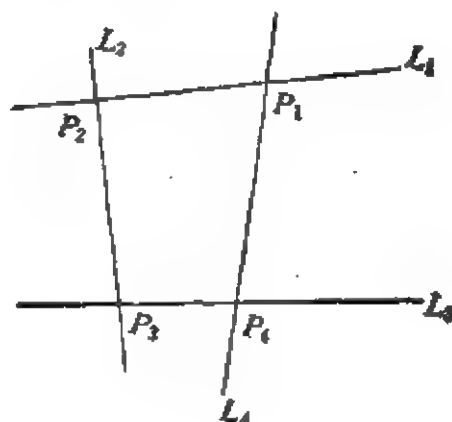



图 3.10

如图 3.9，假设 $P_3^+$ 与 $P_4^+$ 的连线方程为 $L_{3,4}=0$。对它应用 E-J 公式，得到：

$$\frac{L_{3,4}(P_1^-)}{\mathrm{J}(P_1^-)}+\frac{L_{3,4}(P_2^-)}{\mathrm{J}(P_2^-)}=0,$$

但已知 $\mathrm{J}(P_1^-)$ 与 $\mathrm{J}(P_2^-)$ 同号为负，故知 $L_{3,4}(P_1^-)$ 与 $L_{3,4}(P_2^-)$ 异号。这表示 $P_1^-$ 与 $P_2^-$ 位于直线 $L_{3,4}=0$ 的异侧。同理可证 $P_3^+$ 与 $P_4^+$ 应位于直线 $L_{1,2}=0$ 的异侧，如图 3.9 所示。故 4 点构成一凸四角形的顶点。

II) 假设 4 个奇点 $P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$ 构成一凸四角形的顶点，如图 3.10 所示。以 $L_i=0$ 记 $P_i$ 与 $P_{i+1}$ 的连线($5\equiv 1(\mathrm{mod},4)$)。

由 $E$-$J$ 公式，有：

$$\frac{L_i(P_{i+2})}{J(P_{i+2})}+\frac{L_i(P_{i+3})}{J(P_{i+3})}=0\quad(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)。$$

但 $P_{i+2}$ 与 $P_{i+3}$ 位于 $L_i$ 的同侧，故上式两个分子同号，从而两个分母异号，即 $P_{i+2}$ 与 $P_{i+3}$ 具有不同的指标。仿此，$P_i$ 与 $P_{i+1}$ 应具有不同的指标，故 4 个奇点指标之和为零。

Ⅲ) 假设 4 个奇点的指标之和为 2（为 $-2$ 时证明一样）。记此 4 个奇点为 $P_1^+$、$P_2^+$、$P_3^+$、$P_0^-$。以 $L_i=0$ 记 $P_{i+1}^+$ 与 $P_{i+2}^+$ 的连线（图 3.11），对 $i=1,\ 2,\ 3$ 应用 $E$-$J$ 公式，得到：

$$\frac{L_i(P_i^+)}{J(P_i^+)}+\frac{L_i(P_0^-)}{J(P_0^-)}=0。$$

上式两个分母异号，故两个分子同号，即 $P_i^+$ 与 $P_0^-$ 位于 $L_i=0$ 的同侧（$i=1,\ 2,\ 3$）。于是 $P_0^-$ 必位于三角形 $P_1^+P_2^+P_3^+$ 的内部。

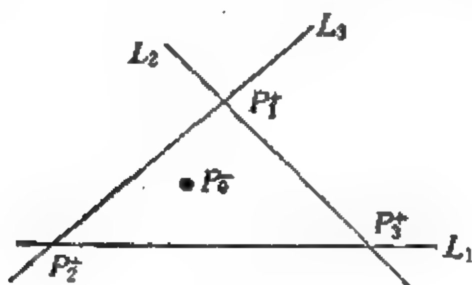



图 3.11

Ⅳ) 设 4 个奇点构成四角形的顶点，设 $P_0$ 位于三角形 $P_1P_2P_3$ 的内部，对 $i=1, 2, 3$ 应用 $E$-$J$ 公式，得到：

$$\frac{L_i(P_i)}{J(P_i)}+\frac{L_i(P_0)}{J(P_0)}=0。$$

上式两个分子同号，故两分母异号。这表示 $P_1$、$P_2$、$P_3$ 的指标相同，而与 $P_0$ 的指标相反。4 个奇点指标之和为 2（或 $-2$）。

在文献 [3.48] 的 2) 中还应用同法研究了 (3, 2) 与 (3, 3) 型多项式系统的奇点分布问题，得到许多可能的构型。但其中对构型的定义与文献 [3.21] 中不同，即只证明了奇点能形成一串一个套一个的凸多角形，但在同一多角形上的奇点不一定具有相同符号的指标。

在文献 [3.49] 中，Euler-Jacobi 公式被推广到了 $P(x, y)=0$ 与 $Q(x, y)=0$ 有二重交点的情况。相应的 Berlinskii 定理也被

推广到了二次系统有两个单奇点和一个二重奇点的情况。

此外，在文献[3.48]的 2) 中还用 $E$-$J$ 公式研究了多项式系统的中心的最多个数，证明了：$n$ 次系统最多有 $\frac{(n+2)(n-1)}{2}$ 个指标为 $+1$ 的奇点能位于曲线 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0$ 上，特别地，当 $n=3$ 时，可知中心与细焦点的个数的总和不能大于 5。值得注意的是：文献[3.48]中只用到由 $E$-$J$ 公式导出的诸等式的定性方面，而没有用到它们的定量方面，不知后者是否也有什么用处。

**猜想** 当三次系统有 6 个指标为 $+1$，3 个指标为 $-1$ 的奇点时，6 个指标为 $+1$ 的奇点不可能都是中心或焦点。

对于特殊类型的三次系统(Kolmogorov 系统)

$$\dot{x}=xP_2(x, y), \quad \dot{y}=yQ_2(x, y)$$

在文献[3.28]中已证明中心与焦点的总数不超过 4。但即使是三次 Hamilton 系统，也有例子说明中心可以有 5 个之多（见文献[3.29]）。

对于二次系统，与 Berlinskii 定理密切相关的是文献[3.15]中关于中心二次曲线的研究。由平面解析几何可知道，曲线(3.15)是二次曲线族

$$\lambda P_2(x, y)+\mu Q_2(x, y)=0$$

中一切有心二次曲线的中心的轨迹。在文献[3.15]中证明了当二次系统的 4 个奇点有图 3.1 那种凸四角形的分布时，曲线(3.15)是一条双曲线，而当它们有图 3.2 那种凹四角形的分布时，(3.15)是一个椭圆。显然，不论在那一种情况，(3.15)都应该把指标为 $+1$ 的奇点和指标为 $-1$ 的奇点分开。

当我们推广了 Berlinskii 定理而发现 $n$ 次系统的奇点可以有一圈套一圈的几何构形时，我们自然会想到下面的问题：

当 $n$ 次系统(3.1)的奇点分布有(3.25)式的几何构形时，曲线

$$\frac{\partial P_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial Q_n}{\partial y}-\frac{\partial Q_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial P_n}{\partial y}=0 \qquad (3.35)$$

是否恰有 $n-1$ 个实的闭分支?

**例 3.5**
$$\begin{cases}\dot{x}=[y-(x+1)][y-3(x+1)][y+2(x+1)],\\ \dot{y}=[y-2(x-1)][y+(x-1)][y+3(x-1)].\end{cases}\tag{3.36}$$

与(3.26)对照,易见这里的 $K_i$ 与 $k_i$ 满足条件 (3.27)。(3.36)有奇点: $A_1(3,4)$、$A_2(0,3)$、$A_3(-3,4)$、$A_4(-5,-12)$、$A_5(5,-12)$、$A_6\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$、$A_7\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$、$A_8(0,-2)$、$A_9(0,1)$。它们的指标和图 3.5 中的 $A_i$ 一样, 分布也大致相同. 但现在 $A_2$、$A_8$、$A_9$ 都位于 $y$ 轴上,诸奇点的分布也对称于 $y$ 轴。

(3.35)式现在是:

$$45(x^2-1)^2-11(x^2-1)y-(12x^2+52)y^2+11y^3+3y^4=0。\tag{3.37}$$

由此可解出:

$$x^2=\frac{12y^2+11y+90\pm y\sqrt{11641-1716y-396y^2}}{90}。\tag{3.38}$$

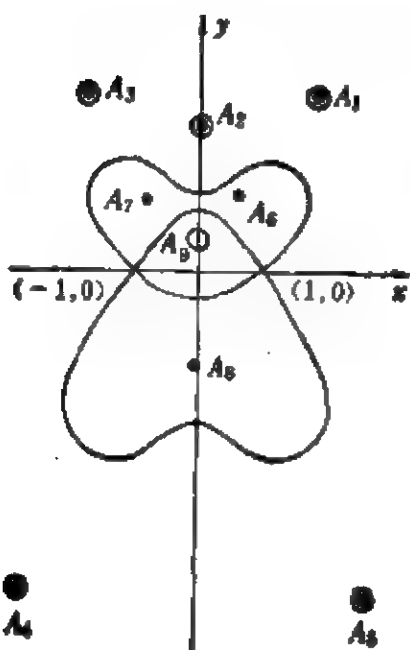



图 3.12

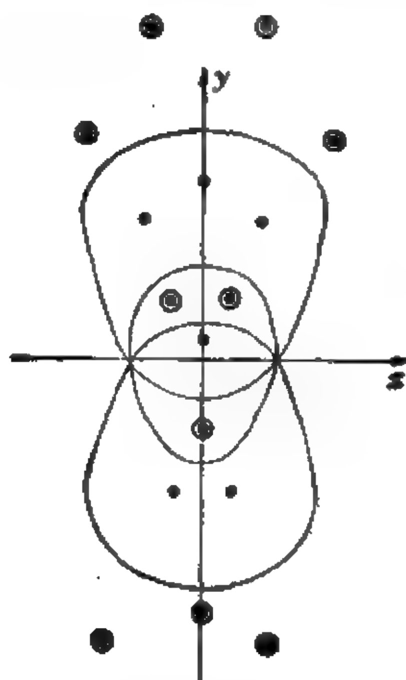



图 3.13

其图形大致如上面的图3.12，它和 $y$ 轴的交点的纵坐标近似地为：$-6.405$，$-0.79$，$1.4$，$2.1$。曲线(3.37)在$(-1, 0)$与$(1, 0)$有二重点，这是因为(3.36)中两直线束的中心是$(-1, 0)$和$(1, 0)$。如果略微改变这些直线的位置，使不构成直线束，猜想对应的四次曲线(3.35)当会有两个套在一起的闭分支。或有一个包含 $A_6$、$A_7$ 而位于 $x$ 轴上方的闭分支，另一个包含 $A_8$ 而位于 $x$ 轴下方的闭分支，对例3.4的方程算得的(3.35)的图形就是如此。

**例 3.6**

$$\begin{aligned}\dot{x} &= [y-(x+1)][y-3(x+1)][y+2(x+1)] \\ &\quad \times [y+4(x+1)], \\ \dot{y} &= [y-2(x-1)][y-4(x-1)][y+(x-1)] \\ &\quad \times [y+3(x-1)]\end{aligned} \tag{3.39}$$

有奇点 $A_1(3, 4)$、$A_2(7, 24)$、$A_3(-7, 24)$、$A_4(-3, 4)$、$A_5(-5, -12)$、$A_6(0, -4)$、$A_7(5, -12)$、$A_8\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$、$A_9(0, 3)$、$A_{10}\left(-\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$、$A_{11}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}\right)$、$A_{12}\left(\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}\right)$、$A_{13}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$、$A_{14}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$、$A_{15}(0, -2)$、$A_{16}(0, 1)$。算出(3.35)的六次曲线为：

$$\begin{aligned}&16y^6-184y^5-(128x^2+752)y^4+(1288x^2+1560)y^3 \\ &\quad +(x^2-1)(304x^2-2032)y^2-3832(x^2-1)^2y \\ &\quad +2688(x^2-1)^3=0.\end{aligned}$$

估计它当会有图3.13所示的那种图形。

关于多项式系统的奇点的指标，值得注意的还有文献[3.30]。但此文已在文献[3.31]中有介绍，在此从略。

历史上对于奇点的研究常常着重于其指标和奇点邻域中轨线的拓扑结构。对多项式系统，这种文章也不少，除前面已提到的文献[3.16]、[3.20]、[3.28]、[3.29]以外，还有文献[3.32]、[3.33]、[3.34]、[3.35]、[3.36]、[3.39]、[3.40]、[3.41]和[3.43]。详情不再在此作一一介绍了。

# 参 考 文 献

[3.1]　韩莉。平面多项式系统的奇点，辽宁师大学报，1986，no.1。

[3.2]　叶彦谦等。极限环论。上海科学技术出版社，1984。

[3.3]　李承治。焦点与中心共存的平面二次系统。数学研究与评论。1986，6：49～52。

[3.4]　Ye Yanqian. Oddness of number of limit cycles and the (2, 2) distribution problem for a planar quadratic differential system, Ann. of Diff. Equs. 1991, 7(4): 469～475.

[3.5]　Buchel W. Zur Topologie der durch eine gewöhnliche Differential gleichung erster Ordnung und erstes Grades definierten Kurvenschar, Mitt. der Math. Ges. in Hamburg, 1904, Bd. 4, no. 4: 133～169.

[3.6]　梁肇军。$PR^2$ 上二次微分系统的仿射分类(预印本)

[3.7]　杨宗培。二次微分系统赤道上中心、焦点和极限环的研究。纯粹数学与应用数学，1987，no.3：47～55。

[3.8]　叶彦谦。曲面动力系统。科学出版社，1991。

[3.9]　Берлинский А Н. О поведении интегральных кривых одного дифференциалного уравнения, изв. выш. учеб. Зав. Мат. 1960, no.2(15): 3～18; ibid, 1960, no.5(18): 28～32; ibid, 1963, no.5(36): 3～5.

[3.10]　Frommer M. Über das Auftreten von Wirbeln und Strudeln in der Umbegung rational Unbestimmt heitsstellen, Math. Ann. 109 (1933-1934): 395～424.

[3.11]　Curtz P. Stabilité locale des systèmes quadratiques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4 série, t.13 (1980), 293～302.

[3.12]　Curtz P. Noeuds des systéms quadratiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t.293 (1981), 521～524.

[3.13]　Curtz P. Points ordinaires ou faibles, point explicites des systèmes quadratiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t.298, 1984, 321～324.

[3.14]　Curtz P. Varia sur les systéms quadratiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t.300 (1985): 475～480.

[3.15]　Reyn J W. Class of quadratic differential systems in the plane, Dynamical Systems, Proc. Spec. Program Nankai Inst. Math., 1990～1991, V.4 (1993), 146～180, World Scientific, Singapore.

[3.16]　胡钦训，陆毓麒。平面二次系统的无穷远奇点，北京工业大学学报，1985，no.2，16～27。

[3.17]　Reyn J W and Kooij R E. Singular points at infinity of quadratic systems of differential equations, Report, 91-58, Delft Univ. of Technology.

[3.18] Zegeling A. Quadratic systems with three saddles and one anti-saddle (Doctor thesis).

[3.19] Gasull A, Sheng L R, Llibre J. Chordal quadratic systems.

[3.20] 李存富. 平面三次系统无穷远奇点分析(Ⅰ), 昆明工学院学报, 1982, no. 4, 又(Ⅱ), 同前 1984, no.1.

[3.21] Ye Yanqian, Ye Weiyin. A generalization of Berlinskii's theorem to cubic and quartic differential systems, Ann. of Diff. Eqs, 1988, 4(4): 503~509.

[3.22] Ye Weiyin. A generalization of the Berlinskii's theorem, Ann. of Diff. Eqs. 1989, 5(3): 335~340.

[3.23] 孙继涛. n次系统的 Berlinskii 定理.

[3.24] Khovanskii A G. Index of a polynomial vector field, Func. Anal. i Pril. (1979) 13, 49~58.

[3.25] Cima A, Llibre J. Configurations of fans and nests of limit cycles for polynomial vector fields in the plane, J. Diff. Eqs. 1989, 82 no1, 71~97.

[3.26] Kooij R E. Some properties of cubic systems, Report 90~62, Delft Univ. of Technology.

[3.27] Ye Yanqian. Relative position of the critical points of a certain cubic system and a generalization of the Bendixson index formula, Ann. Diff. Eqs. 1990, 6(2): 241~262.

[3.28] 区月华. 一类三次微分系统的有限远奇点分析. 云南大学学报. 1986, 8: 11~16.

[3.29] 李继彬. 关于弱化的 Hilbert 16 问题的研究. 昆明工学院学报, 1988, 13, no.1: 94~109.

[3.30] 高维新. 平面奇点的指数. 北京大学微分方程论文集, 1963, 189~198.

[3.31] 张芷芬等. 微分方程定性理论, 科学出版社, 1985.

[3.32] 董金柱. 范·特·坡方程的无限远奇点. 清华大学学报, 1957, 3, no.1: 1~11.

[3.33] 董金柱. 二次微分系统的奇点的指标与极限环. 数学学报, 1959, 8, no. 2: 258~268.

[3.34] 王明淑. 非线性微分方程的高阶奇点. 南京大学学报, 1958, no.2, 83~89.

[3.35] 任永太. 有4个有限远奇点的二次系统的无穷远奇点. 数学研究与评论 1984, 4, no.4: 37~42.

[3.36] 高隆昌. 对$(E_3)$系统任一有限远奇点类型的拓扑分类. 四川大学学报, 1984, 1: 9~17.

[3.37] Lebegeva L N. Qualitative investigation of an $A_2$-system of special type, Vestnik Leningrad Univ, Math. Mech. Astron. 1984, no.4,

81～82.

[3.38] 胡钦训，陆镜献。高次奇点在不定号情况下的定性分析。北京工业学院学报，1981，no.2：1～16.

[3.39] 谢大来。($E_2$)有限奇点的拓扑分类。西北大学学报，13(1983).

[3.40] 谢大来。($E_2$)无穷奇点的分类，数学研究与应用，1980，3：6～16.

[3.41] 陈玉琦。关于($E_3$)类方程的奇点。西南师大学报，1986，no.2.

[3.42] 葛渭高，骆桦。平面矢量场的奇点(预印本，1987).

[3.43] 韦良光。一类方程组的高次奇点的定性分析(预印本，1987).

[3.44] Dumortier F, Roussarie R and Rousseau C. Hilbert 16th problem for quadratic vector fields (Preprint, 1991).

[3.45] Llogd N G, Blows T R and Kalenge M C. Some cubic systems with several limit cycles, Nonlinearity, 1988, 1: 653～689.

[3.46] Christopher C J. Invariant algebraic curves and conditions for a centre (Preprint, 1991).

[3.47] Han Li, Tian Jinghuang, The maximum number of singularities with index 1, Research Report, IMS-38, 1990(科学院成都分院).

[3.48] Cima A, Gasull A, Mañosas F. 1) On polynomial Hamiltonian planar vector fields; 2) Some applications of the Euler-Jacobi formula to differential equations (Preprint, to appear in Proc. AMS).

[3.49] Gasull A, Torregrosa J. Euler-Jacobi formula for double points and applications to quadratic and cubic systems (Preprint, 1992).

[3.50] 何永葱。赤道不是轨道弧的 n 次多项式向量场。工科数学，1991，V.7：1～5.

[3.51] Вулпе Н И. Коэффицинтные условия числа и кратности особых точек квадратичной Дифференциалной системы, Диф. урав. Т.27 (1991), 572～576.

[3.52] Collins, C. B. On the absence of limit cycles for certain polynomial vector fields (Preprint, 1993).

[3.53] Baltag V. A. and Vulpe, N. I. Number and multiplicity of singular points of a quadratic differential system, Russian Acad. Sci. Dokl. Math., 1992, vol.45, no.2, 235～238.

[3.54] Baltag V A and Vulpe N I. Affine-invariant conditions for determining the number and multiplicity of singular points of quadratic differential systems, Buletinal Acad. de Stiinte a Rep. Moldova, Mat. (English), 1993, 1(11), 39～48.

## §4. 方程的典范型与分类

经过线性或非线性变换将多项式系统写成典范形式或进一步再对它进行分类，这对于研究有限远和无穷远奇点的个数、位置和性质、中心的条件与焦点量的表达式，以及极限环问题等等，都有很大的好处。就二次系统来说，数十年来，数学家们在这方面已积累了丰富的经验，取得了丰富的成果。而对 $n\geqslant 3$ 次系统来说，虽然近年来也有少量工作，但基本上可以说是处于空白状态。因此，总结二次系统方面的经验，探索其在高次多项式系统的推广，是很有必要的。

下面先列举二次系统的各种典范型与分类方法，然后一一加以评论。

Ⅰ) $$\begin{cases}\dot{x}=a_1+b_1x+c_1y+d_1x^2+e_1xy+f_1y^2,\\ \dot{y}=a_2+b_2x+c_2y+d_2x^2+e_2xy+f_2y^2.\end{cases} \tag{4.1}$$

Ⅱ) $$\begin{cases}\dot{x}=-y-bx^2-(2c+\beta)xy-dy^2,\\ \dot{y}=x+ax^2+(2b+\alpha)xy+cy^2.\end{cases} \tag{4.2}$$

Ⅲ) $$\begin{cases}\dot{x}=\lambda_1x-y-\lambda_3x^2+(2\lambda_2+\lambda_5)xy+\lambda_6y^2,\\ \dot{y}=x+\lambda_1y+\lambda_2x^2+(2\lambda_3+\lambda_4)xy-\lambda_2y^2.\end{cases} \tag{4.3}$$

Ⅳ) $$\left.\begin{array}{ll}\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\ \dot{y}=x, & (\mathrm{I})\\ \dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\ \dot{y}=x(1+ax),\ a\neq 0, & (\mathrm{II})\\ \dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\ \dot{y}=x(1+ax+by), & (\mathrm{III})\\ \qquad b\neq 0. & \end{array}\right\} \tag{4.4}$$

Ⅴ) $$\dot{x}=-y+ax^2+bxy,\quad \dot{y}=x+lx^2+mxy+ny^2. \tag{4.5}$$

Ⅵ) $$\dot{x}=1+xy,$$
$$\dot{y}=a_2+b_2x+c_2y+d_2x^2+e_2xy+f_2y^2=Q(x,\ y).$$

$$\dot{x}=xy,\quad \dot{y}=Q(x,y),$$
$$\dot{x}=y+x^2,\quad \dot{y}=Q(x,y),$$
$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=Q(x,y),$$
$$\dot{x}=-1+x^2,\quad \dot{y}=Q(x,y),$$
$$\dot{x}=1+x^2,\quad \dot{y}=Q(x,y),\tag{4.6}$$
$$\dot{x}=x^2,\ \dot{y}=Q(x,y),$$
$$\dot{x}=x,\ \dot{y}=Q(x,y),$$
$$\dot{x}=1,\ \dot{y}=Q(x,y),$$
$$\dot{x}=0,\ \dot{y}=Q(x,y).$$

Ⅵ)
$$\begin{cases}\dot{x}=p_1x(x-1)+p_2y(y-1)+p_3(x,y),\\ \qquad p_3=\dfrac{1-\alpha}{\beta}p_1+\dfrac{1-\beta}{\alpha}p_2,\\ \dot{y}=q_1x(x-1)+q_2y(y-1)+q_3(x,y),\\ \qquad q_3=\dfrac{1-\alpha}{\beta}q_1+\dfrac{1-\beta}{\alpha}q_2,\ \alpha+\beta\neq 1.\end{cases}\tag{4.7}$$

Ⅷ)
$$\begin{aligned}&\dot{x}=-y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2,\\ &\dot{y}=x+b_{20}x^2+b_{11}xy+b_{02}y^2.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Ⅸ)
$$\dot{v}=X(v)=Av+f(v)Bv.\tag{4.9}$$

其中 $v$ 为二元向量，$A$、$B$ 为二阶方阵，$f(v)$ 为齐线性函数。

X)
$$\dot{z}=(i+\lambda)z+Az^2+Bz\bar{z}+C\bar{z}^2,\ z=x+iy\tag{4.10}$$

($\lambda$ 为实系数，$A$、$B$、$C$ 为复系数)。

XI)
$$\begin{aligned}&\dot{x}=-y+\delta' x+l'x^2+m'xy+ny^2=P(x,y),\\ &\dot{y}=\frac{a}{b}P(x,y)+x(1+by).\end{aligned}\tag{4.11}$$

其中
$$\delta'=\delta+\frac{a}{b},\ l'=l-\frac{a}{b}\left(m-\frac{a}{b}n\right),\ m'=m-\frac{2a}{b}n.$$

XⅡ)
$$\begin{cases}\dot{x}=(\alpha x-y)(1+\gamma y)-\alpha x^2+b_{11}xy+(b_{02}+\alpha a_{02})y^2,\\ \dot{y}=(x+\alpha y)(1+\gamma y)-x^2-\alpha b_{11}xy+(a_{02}-\alpha b_{02})y^2.\end{cases}\tag{4.12}$$

其中

$$b_{02}^2-4(b_{11}-1)a_{02}<0,\quad b_{11}<1,\ 或\ b_{11}>1.\tag{4.12'}$$

$$\text{XIII)}\quad \dot{x}=a_{11}xy+f,\quad \dot{y}=b_{11}xy+f. \tag{4.13}$$

其中 $$f=1+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{02}y^2.$$

$$\text{XIV)}\quad \dot{r}=a(\theta)r+f(\theta)r^2,\quad \dot{\theta}=b(\theta)+g(\theta)r^2. \tag{4.14}$$

其中

$$f(\theta)=\cos\theta P_2(\cos\theta,\sin\theta)+\sin\theta Q_2(\cos\theta,\sin\theta),$$
$$g(\theta)=\cos\theta Q_2-\sin\theta P_2.$$

$$\text{XV)}\quad \dot{x}=mx+ny+x(ax+by),$$
$$\dot{y}=\bar{m}x+\bar{n}y-y(bx+ay). \tag{4.15}$$

**评论：**

1) 方程(4.1)是最一般的二次系统，我们已在§3中看到，要确定(4.1)的无限远奇点的个数和性质相当困难。至于有限远奇点，计算还要更麻烦，§3中已介绍了有关的参考文献。这些研究工作的好处是：一旦得到判别公式以后，则对任一给定的具有数字系数的二次系统，只要把这些数字代入判别公式，就可确定此系统的奇点个数和性质，而不必具体求出奇点的坐标，然后去判别其指标及稳定性等等。但当(4.1)有焦点时，要确定其焦点量以及在焦点外围是否存在极限环，是比较困难的。所以要对二次系统作深入的定性研究，必须把(4.1)作各种转化。

2) 方程(4.2)是以$O(0,0)$为细焦点或中心的二次系统，当$\alpha=\beta=0$时，立刻可写出三次多项式型的代数积分。(4.2)存在中心的条件都可用它的系数简单地表示出来（见文献[1.1][1)]）。但要用(4.2)来研究除$O(0,0)$以外其他的奇点的个数、性质以及极限环问题都是不方便的。

3) 方程(4.3)是以$O(0,0)$为焦点或中心的二次系统。其特点是：第二方程右方$x^2$与$y^2$的系数只差一符号，在文献[4.1]的§9中已证明：经过适当的坐标交换，这总是可以办到的。对于写成形式(4.3)的二次系统，$O(0,0)$成为中心的条件，以及当它是焦

1) 方程(4.2)、(4.3)、(4.4)及(4.6)的前四个和(4.7)、(4.8)、(4.11)、(4.14)在文献[4.1]中都有。

点时焦点量的表达式都特别简单（见文献［4.1］）。但 (4.3) 与 (4.2) 一样，具有在前一段所提到的缺点。

4) (4.4) 的三个方程是国内外研究二次系统定性理论时被用到次数最多的一种分类法，国外文献有的称之为"中国分类法"，有的称之为"叶的典范型"（见文献[4.31]）。在文献[4.1]中已证明了：只要二次系统存在一个指标为 $+1$ 的初等奇点，则它必可经过线性变换，化为 (4.4) 的 (I)、(II) 或 (III)，而该初等奇点便成为 $O(0, 0)$。

可以证明（见文献[4.2]）：当二次系统至少有一个有限远奇点时，它必有一条直线状的等倾线。(4.4) 的方程 (I) 存在一条水平等倾线 $x=0$，但这并不说明它没有其他的直等倾线。方程 (II) 存在两条互相平行的水平等倾线 $x=0$ 和 $1+ax=0$；方程 (III) 存在两条互不平行的直等倾线 $x=0$ 与 $1+ax+by=0$。三类方程 (I)、(II)、(III) 并非互相排斥，例如：(II) 一般在 $x=0$ 上有奇点 $O(0, 0)$ 与 $N\left(0, \frac{1}{n}\right)$，在 $1+ax=0$ 上还有两奇点 $R_1\left(-\frac{1}{a}, y_1\right)$ 和 $R_2\left(-\frac{1}{a}, y_2\right)$，$y_1<y_2$。显见若 $n>0$，则由二次系统的性质可知道 $\overline{OR_2}$ 与 $\overline{NR_1}$ 便是一对相交的直等倾线。因此，作适当的坐标变换就可把它变成形如 (III) 的方程。

由于 (4.4) 的三个方程组中的第二个方程具有如上的可分解因子的特性，所以要确定有限远奇点的个数和性质都是非常容易的。这是它的最大优点。此外，当把 (III) 的原点移到另一指标为 $+1$ 的奇点，并把方程经过线性变换，要求第一（二）方程右边 $y(x)$ 的系数为 $-1(+1)$ 时，将会发现第二个方程右边仍是可分解的。

其次，我们在文献[4.1]中已经提到：当 (I) 中的 $\delta=0$ 时，它或是以 $O(0, 0)$ 为中心，或是在 $O$ 外围不存在闭与奇闭轨，对 $(\mathrm{II})_{\delta=l=0}$ 与 $(\mathrm{III})_{\delta=m=0}$ 的情况也是如此。这就启发我们研究二次系统的极限环问题的一种途径：先研究 $(\mathrm{II})_{\delta=l=0}$ 和 $(\mathrm{III})_{\delta=m=0}$，然后再用旋转向量场理论与旋转向量场分解法（见文献[4.3]与[4.4]）去研究二

次系统的极限环问题与分支理论，这种分支理论不同于熟知的分支理论(详见 § 14)。

对于方程(4.4)，$O(0, 0)$ 处的焦点量公式（当 $\delta=0$ 时）也不算麻烦，例如：由 §3 定理 3.4 的证明可以看出来。又由 §3 的注 3.5 可知 (4.4) 对研究无穷远奇点也有方便之处。特别应当提到的是：在具有一条积分直线的二次系统的极限环的唯一性证明中 (4.4) 的方程 $(\mathrm{II})_{n=0}$ 所起的作用(见文献[4.1])，以及在有界二次系统的分支理论的研究中 (4.4) 的方程 $(\mathrm{II})_{n=0}$ 所起的作用（见文献[4.32]）。

以上这些都说明了，在研究二次系统的定性理论时，把其中一个方程的右端变成一次或两个一次因子的乘积是大有好处的。可惜此法迄今尚未推广到三次系统的研究中。

5) 目前已知(4.4)这种分类法的一个缺点是：即使当 $n=0$ 时要把它化为 Liénard 型方程

$$\dot{x}=y-F(x),\quad \dot{y}=g(x),$$

（为了研究极限环的存在和唯一性）也相当麻烦。化成 Liénard 型方程以后有时也无法引用现成的极限环唯一性定理。因此，人们一方面希望能找到可以直接应用于方程(4.4) 的极限环的唯一性定理（最近刚有一点眉目，见后面的 §9），另一方面，在文献[4.5]中提出另一个类似于(4.4) 的二次系统的典范型 (4.5)[1]。由于(4.5)的第一个方程不含 $y^2$ 项(与(4.5)不同，(4.4)是第二个方程不含 $y^2$ 项)，故可用文献[4.1]中的定理 15.15 的办法（或令 $\frac{dt}{d\tau}=(1-bx)^{-2}$ 将(4.5)化为 $\ddot{x}-f(x)\dot{x}+g(x)=0$，然后再化到 Liénard 平面，见 [6])，以研究极限环的唯一性。但要确定(4.5)的其他有限远奇点的位置和性质却并不方便[2]。

1) 见文献[4.6]。

2) 韩茂安在研究二次系统的无界解时证明了：任何有有限远奇点的二次系统必定仿射等价于：$\dot{x}=-y+ax^2+bxy$，$\dot{y}=ex+\delta y+lx^2+mxy+ny^2$，其中 $e=0$，1或 $-1$；或是 $\dot{x}=cx+ax^2+bxy$，$\dot{y}=\lambda x+\delta y+lx^2+mxy+ny^2$，详见本书 §16。

值得提到的是：最近文献[4.31]为了研究二次系统有限和无穷分界线环的一切可能构图，指出了(4.3)、(4.4)、(4.5)的缺点是：固定了第一个方程中 $y$ 的系数为 $-1$，第二个方程中 $x$ 的系数为 $+1$，以致系数空间成为开的了。[4.31]中把它们分别改为

$$\begin{cases}\dot{x}=\lambda x-\mu y+\varepsilon_1x^2+\varepsilon_2xy+\varepsilon_3y^2,\\ \dot{y}=\mu x+\lambda y+\delta_1x^2+\delta_2xy-\delta_1y^2.\end{cases}\tag{4.3'}$$

$$\begin{cases}\dot{x}=\lambda x-\mu y+\varepsilon_1x^2+\varepsilon_2xy+\varepsilon_3y^2,\\ \dot{y}=\mu x+\lambda y+\delta_1x^2+\delta_2xy.\end{cases}\tag{4.4'}$$

和

$$\begin{cases}\dot{x}=\lambda x-\mu y+\varepsilon_1x^2+\varepsilon_2xy,\\ \dot{y}=\mu x+\lambda y+\delta_1x^2+\delta_2xy+\delta_3y^2.\end{cases}\tag{4.5'}$$

并且在5维参数空间 $(\delta_i, \varepsilon_j)$ 的单位球面 $S^4$ 上讨论问题（设 $(\lambda, \mu)\in S^1$）。

易见(4.3′)、(4.4′)、(4.5′)都可由

$$\begin{cases}\dot{x}=\lambda x-\mu y+\varepsilon_1x^2+\varepsilon_2xy+\varepsilon_3y^2,\\ \dot{y}=\mu x+\lambda y+\delta_1x^2+\delta_2xy+\delta_3y^2.\end{cases}$$

经过坐标轴的适当的旋转而得到。

6) (4.6)中的前四个方程组是前苏联数学家对可能有极限环的二次系统的分类法(其推导见文献[4.1])。不难看出(4.6)的第四个方程即(4.4)的方程(I)。(4.6)的第三个方程中 $P(x, y)=y+x^2$，$P=0$ 为抛物线，故相当于(4.4)的方程(II)。(4.6)的前两个方程中 $P=0$ 都是双曲线或退化双曲线，故相当于(4.4)的(III)。

这种分类法不同于(4.4)，其法是首先设法消去第一个方程右方的 $y^2$ 项，以使(0, 1, 0)成为无限远奇点，然后再经过一些线性变换，把第一个方程的系数完全确定下来，且使之具有最简单的形状，而在第二个方程右方保留了全部的可变系数。由(4.6)的第一、三两个方程确定有限奇点和性质仍不方便，但(4.6)对于确定无穷远奇点却带来了方便，因为已知(0, 1, 0)是一个无穷远奇点，则余下的两个无穷远奇点的坐标就可由一个二次方程来决定了。

更重要的是：对(4.6)的第一个方程组可进一步作一个非线性

代换：

$$Y=\frac{1+xy}{x^2},\quad x=\frac{1}{\xi},\tag{4.16}$$

而将它化成如下的形式[1)]：

$$\xi Y\frac{dY}{d\xi}=P_4(\xi)+P_2(\xi)Y+(1-f_2)Y^2.\tag{4.17}$$

其中 $P_2(\xi)$ 与 $P_4(\xi)$ 分别是 $\xi$ 的二次与四次多项式．(4.17) 看起来似乎其中的多项式次数反而更高了，但它却可以容易地化为 Liénard 型方程，从而可导出一些重要的有关极限环不存在的结论来(见文献[4.1])．

变换(4.16)不但是非线性的，而且在射影平面上有些地方是十分奇异的，这可由下面的对应图看出来[2)]．

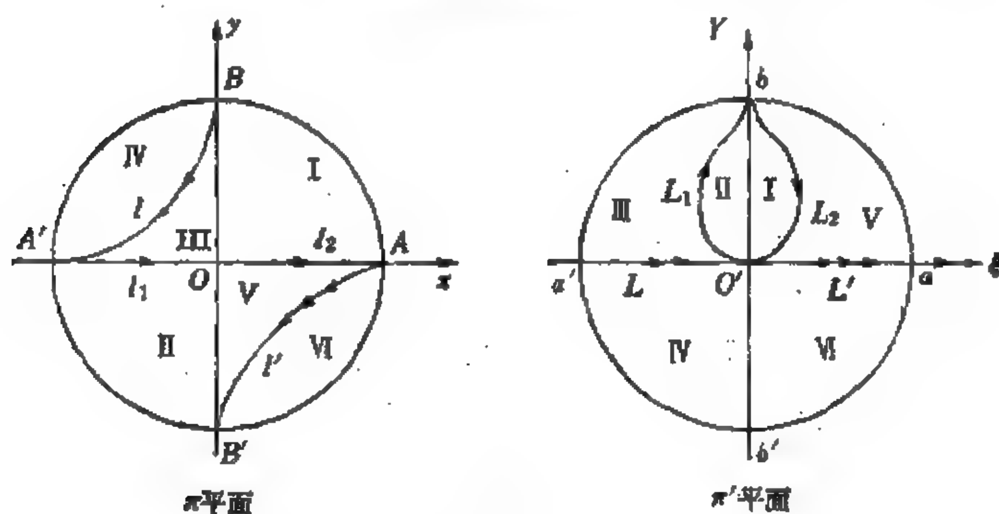



图 4.1

两图之间的对应关系如下：

$A,\ A'\longleftrightarrow O'$，$l_1\longleftrightarrow L_1$，$l_2\longleftrightarrow L_2$，$l\longleftrightarrow L$，$l'\longleftrightarrow L'$，

$y$ 轴$\longleftrightarrow b$，$B\longleftrightarrow \pi'$ 上的左半圆周，$B'\longleftrightarrow \pi'$ 上的右半圆周．

赤道上的 $\widehat{A'B'}=\widehat{AB}\longleftrightarrow\overline{O'b}$，$\widehat{A'B}=\widehat{AB'}\longleftrightarrow\overline{O'b'}$．

$l$ 与 $l'$ 的方程是 $1+xy=0$；$L_1$ 与 $L_2$ 的方程 $Y=\xi^2$．由此可见，$\pi$

1) 由 $\dot{x}=1+xy$ 可得 $\dot{\xi}=-Y$，再由 $y=\frac{Y}{\xi}-\xi$ 求导，可解出(4.17)．

2) 此图由陈一元同志得出．

平面上的$x>0(<0)$仍对应于$\pi'$平面上的$\xi>0(<0)$；$\pi$平面上的等倾线$1+xy=0$变为$\pi'$平面上的等倾线$Y=0$。又$\xi=0$对应于$\pi$平面上的赤道，因而是(4.17)的积分线。$\pi$平面上的四个有限远奇点到$\pi'$平面上都成为$Y=0$上的奇点了。$y$轴对(4.6)的第一个方程组为无切的，故闭轨不与之相交。在$\pi'$平面上，$Y$轴对应于$\pi$平面上的赤道，故闭轨线也不与它相交。所以研究$\pi$平面上的极限环问题(按二次系统的熟知性质，它只能与$l$或$l'$相交)化为研究$\pi'$平面上$Y$轴左方或右方的极限环问题。由于现在只有一支铅直等倾线$Y=0$可能与闭轨相交，所以问题就比原来平面上的要简单一些了。这里一个值得思考的问题是：

对(4.4)的(Ⅱ)能否仿照(4.16)再作非线性变换：

$$Y=\frac{1+ax+by}{x},\quad x=\frac{1}{\xi}? \tag{4.15'}$$

所得方程对二次系统$x=0$以外之处的定性理论的研究有无好处？

对(4.6)的前四个方程组在文献[4.7]中又给它们补充了六个方程组，从而构成了二次系统的完全分类。由此易看出：若二次系统属于后六个方程组之一的话，则必不存在闭轨线。

7) 方程组(4.7)显见有三个固定奇点$O(0,0)$、$A(1,0)$与$B(0,1)$，故适用于有三个或四个有限远奇点的二次系统。当第四个奇点存在时，它的坐标是$(\alpha,\beta)$。在文献[4.1]中已提到，用(4.7)来证明有关奇点的几何分布的Berlinskii定理时是很方便的。最近，在文献[4.8]中研究二次系统奇点性质的相互影响以及用三角剖分法研究结构稳定无环二次系统相图的拓扑分类也用到了方程(4.7)。若在(4.7)中$\alpha+\beta=1$，则可证$x+y=1$上充满奇点。

(4.7)的优点是：三个奇点$O$、$A$、$B$已固定，另一个奇点若存在，可设它位于由三条直线$x=0$, $y=0$, $x+y=1$将全平面划分成七个单连通区域的某一个的内部。这样，进入或跃出有限远与无穷远鞍点的分界线的另一端的去向有多少种可能性，不同的分界线有多少种可能的相对位置，便一目了然了；要用具体的二次系统来实现某种拓扑结构也比较容易办到。就后面这一点来说，过去的办

法全凭技巧，而无规则可循。我们相信，按文献[4.8]的方法去作，最终应可完全解决结构稳定无环二次系统的相图的拓扑分类问题。由于结构稳定无环系统在一切无环二次系统的集合中是开的且稠密的，所以若能解决这一问题的话，其意义是不小的[1]。

此外，在文献[4.9]中又利用与(4.7)类似的三次系统来研究过下面的问题：当三次系统有三个指标为 $-1$ 的奇点，六个指标为 $+1$ 的奇点时，$4-3+2$ 与 $3-3+3$ 型的奇点几何构形是否可能？(见 §3)。估计用同一方程和类似的方法还可进一步研究"这时6个指标为 $+1$ 的奇点能否都是焦点？"这一有趣的问题。

8) (4.8)是最一般的，以 $O(0, 0)$ 为细焦点或中心的二次系统，它的二次项的系数没有 $(4.3)_{\lambda_1=0}$、(4.4)的$(\mathrm{I})_{\delta=0}$和(4.5)中那种特殊性。文献[4.6]曾就(4.8)得到 $O$ 的三个焦点量表达式，以使人们更便于应用。但另一方面，当对焦点量之间的关系作更深入的研究时，[4.6]所得的焦点量公式就不如文献[4.1]中对方程(4.4)的(I)所得的焦点量公式那样方便了。

9) 将二次系统写成(4.9)那种向量形式始见于文献[4.10]、[4.11]，后来又在文献[4.12]、[4.13]中推广到

$$f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)=r^D f(\theta),\ D\geqslant 1$$

这种不一定是多项式系统的情况。写成方程(4.9)的好处是：可以把代数判据用到极限环的存在与唯一性的研究中。但应注意，能写成形式(4.9)的二次系统是非常特殊的。

10) 方程(4.10)是H.Zoladek在文献[4.14]中研究二次系统的Bautin理论所用的复变量形式。在[4.14]中证明了，写成这种复方程的形状以后，则 $O(0, 0)$ 是中心的条件变成很简单。亦即下列四条件之一成立：

(1) $\lambda=B=0$；(2) $\lambda=0,\ A=-1/2,\ B=1$；(3) $\lambda=I_mA=I_mC=0,\ B=1$；(4) $\lambda=0,\ A=2,\ B=1,\ |C|=1$。在[4.14]中还得到了三个焦点量 $\bar{v}_3$、$\bar{v}_5$、$\bar{v}_7$ 通过 $A$、$B$、$C$ 的表达式(详情见 §5)。

---

1) 最近Kooij R在文献[4.34]中又加了7个可被实现的结构图。

11) 方程(4.11)是在文献[4.15]中首先引进的。由于(4.11)可以看作是(4.4)的(Ⅱ)$_{a=0}$通过以$\lambda=\frac{a}{b}$为参数而产生的旋转向量场族，而(Ⅱ)$_{a=0}$的极限环问题已完全解决，所以由此可以导出一些关于二次系统的极限环个数与分布的结论（见文献[4.15]、[4.16]，其中[4.15]的部分结果在[4.1]中已有)。

缺点是：和[4.3]中所引进的三个半平面或全平面旋转向量场族$F_1$、$F_2$、$F_3$一样，这些旋转向量场族中的每一个在参数变动时，都要引起二次系统中线性项的变动。

12) 方程(4.12)是文献[4.17]中得到的，作者们证明了：以$O(0, 0)$为焦点且另外只有一个简单鞍点或焦点（别无其他实奇点)的二次系统必可化成(4.12)的形式，并证明了(4.12)关于参数$\alpha$或$\gamma$都构成全平面的旋转向量场族。最近文献[4.18]在$(\alpha, \gamma)$参数平面上画出了(4.12)的分支曲线图，并证明了：二次系统细分界线环分支出三个极限环的可能性，解决了这方面的一个长久悬而未决的问题。

13) 方程(4.13)在文献[4.19]研究(4.4)中三类方程互化的可能性时所提出来的。作者假设(4.4)的Ⅱ类方程中$b\neq0$，并且作线性变换，使$x$轴和$y$轴都成为等倾线，便可得到形如(4.13)的二次系统方程。

按照有限远奇点的个数和分布方式，还可以把函数$f$取得更特殊一些。例如，若四个奇点形成凸四角形的顶点，则可取

$f=1+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2-y^2$，$a_{20}<0, a_{11}-b_{11}>0$(或$<0$)，这时奇点的位置如图4.2或4.3。若四个奇点构成凹四角形的顶点，则可取

$$f=1+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+y^2, \quad a_{01}>2, \quad a_{20}<0.$$

这时奇点的位置如图4.4或4.5。

要用§3的方法判别(4.13)的无穷远奇点的个数和性质，所得判据也比较简单。但(4.13)对于研究极限环问题似乎并不方便。

14) 极坐标方程(4.14)在文献[4.20]与[4.21]中被十分有效

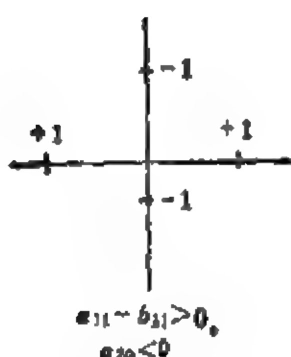



图 4.2

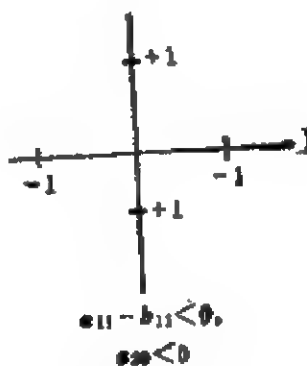



图 4.3

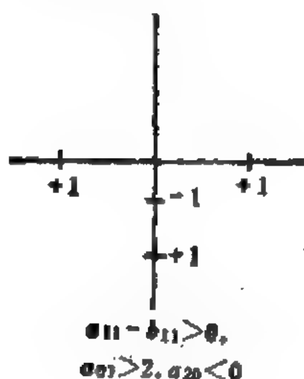



图 4.4




图 4.5

地用于研究只有一个有限远奇点的二次系统和有界二次系统，以及推广到形如

$$\dot{x}=c(x)+P_n(x,\ y),\quad \dot{y}=d(x)+Q_n(x,\ y) \tag{4.18}$$

(其中 $c(x)=ax-y$, $ax$ 或 $ax+y$; $d(x)=x+ay$, $\beta y$ 或 $ay$) 的 $n$ 次多项式系统的极限环问题。在文献[4.20]中对方程

$$\dot{x}=y+P_2(x,\ y),\ \dot{y}=-x+dy+Q_2(x,\ y),\ |d|<2 \tag{4.19}$$

定义

$$F(x,\ y)=(x-dy)P_2(x,\ y)+yQ_2(x,\ y),$$
$$g(x,\ y)=xQ_2-yP_2, \tag{4.20}$$

易见 $g=0$ 决定无穷远奇点的个数和位置；$F=0$ 决定 $O$ 点的特异方向，即 $O$ 与其他有限远奇点连线的方向。在[4.20]中充分考虑了这两种方向的个数对于极限环个数的影响。在把 (4.20) 化为 (4.14) 以后，即可见到在 (4.14) 中：

$$a(\theta)=d\sin^2\theta,\ b(\theta)=-1+d\sin\theta\cos\theta<0,$$
$$g(\theta)=g(\cos\theta,\ \sin\theta)。$$

于是可进一步作微分同胚(见文献[4.22]):

$$\rho = r[b(\theta) + g(\theta)r]^{-1}, \tag{4.21}$$

而(4.14)便化为$\rho$、$\theta$的Abel方程:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = A(\theta)\rho^3 + B(\theta)\rho^2 + C(\theta)\rho. \tag{4.22}$$

对(4.22)可以应用有周期系数的Abel方程的周期解理论(见文献[4.23]),并可作进一步的推广(见[4.21])。关于这方面还有许多工作(但变换(4.21)具有基本的重要性)在后面的§10中再详细介绍。

15) 方程(4.15)是R.Bamon和张平光得出的。他们证明了:凡无穷远有两个初等鞍点,且其特征根之比的乘积等于1的二次系统必可化为(4.15)的形式。如果能证明(4.15)只有有限个极限环,那末二次系统极限环个数的有限性便可以得到一个完整的实域证明了。因此(4.15)很有研究的价值.详细情况见本书§19。

研究二次系统分类的文章除了前面提到的那些以外,还有利用代数不变量理论由二元三次型的典范型导出二次齐次系统分类的文章(见文献[4.24])。例如其中证明了:

**定理** 一个二维实齐二次微分系统必仿射等价于下列10个典范型中的1个:

$$\dot{x} = -2xy + \frac{2}{3}x(p_1x + p_2y),$$

$$\dot{y} = -x^2 + y^2 + \frac{2}{3}y(p_1x + p_2y);$$

$$\dot{x} = -2xy + \frac{2}{3}x(p_1x + p_2y),$$

$$\dot{y} = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}y(p_1x + p_2y);$$

$$\dot{x} = \left(\frac{2}{3}p_1 - 1\right)x^2 + xy, \qquad \dot{y} = \frac{2}{3}(p_1 + 3)xy + y^2;$$

$$\dot{x} = \left(\frac{2}{3}p_1 - 1\right)x^2, \quad \dot{y} = \frac{2}{3}(p_1 + 3)xy;$$

$$\dot{x} = xy, \quad \dot{y} = x^2 + y^2;$$

$\dot{x} = -xy,\quad \dot{y} = x^2 - y^2;$

$\dot{x} = x^2,\quad \dot{y} = x^2 + xy;$

$\dot{x} = 0,\quad \dot{y} = x^2;$

$\dot{x} = xy,\quad \dot{y} = y^2;$

$\dot{x} = 0,\quad \dot{y} = 0.$

此文还写出了二次齐次微分系统的一些基本不变量 $D$、$H$、$F$、$J$ (其中 $J$ 为张量)，利用这些不变量就可判定一个齐二次微分系统究竟等价于上列十类中的哪一类。

关于二次系统分类的文章还有[4.25]与[4.26]。此外，在研究具有特定代数积分线的二次系统时，也得到一些标准型。除了熟知的有直线解的二次系统的标准型(4.4)中 $(\mathrm{II})_{a=0}$ 以外，还可以写出很多。例如在文献[4.27]中证明了：二次系统存在双曲线解 $xy=1$ 的充要条件是它可以写成：

$$\dot{x} = \alpha_1(xy-1) + \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2,$$
$$\dot{y} = \alpha_2(xy-1) - \beta_3 - \beta_2 y - \beta_1 y^2.$$

类似性质的文章还有不少，不在此一一列举了，以后将在 §17 中作专门介绍。

至于三次系统的典范型，已知类似于文献[4.24]的还有[4.28]与[4.29]。但这种分类法，不论是二次还是三次微分系统，对于研究极限环问题似乎没有多大用处。三次系统方面类似于[4.27]的文章也有一些，如在[4.30]中证明了：三次系统：

$$\dot{x} = P_3(x, y),\quad \dot{y} = Q_3(x, y)$$

具有积分曲线 $x^2+y^2=1$ 的充要条件是它可以写成：

$$\dot{x} = (k_1x + k_2y)(x^2+y^2-1) - y(k_3 + k_4x + k_5y),$$
$$\dot{y} = x(k_3 + k_4x + k_5y).$$

从纯理论的角度来看，对三次系统我们当然希望有类似于(4.4)或(4.6)之类的分类法。而且事实上，有不少从实际问题中导出的三次系统都具有：

$$\dot{x} = P_3(x, y),\quad \dot{y} = x$$

的形状(见文献[4.33])，它相当于二次系统的方程(4.4)(I)。但

缺陷是：分类(4.4)基于一个熟知的事实：若$P_2(x, y)=0$与$Q_2(x, y)=0$是两条二次曲线，则在二次曲线束$\lambda P_2+\mu Q_2=0$中必有退化为两直线的二次曲线。这一事实无法推广到三次曲线。

例　$\dot{x}=y^3-x$，　$\dot{y}=x^3+y$。

这里$P_3=y^3-x$与$Q_3=x^3+y$都是不可约三次式。如果存在实数$\lambda^3\neq 0$，使$\lambda^3(y^3-x)+x^3+y$为可约三次多项式，则必有

$$\lambda^3(y^3-x)+x^3+y=(x+\lambda y+\delta)(x^2-\lambda xy+\lambda^2y^2+\alpha x+\beta y+\gamma).$$

由此比较系数，可得到：

$$\delta\gamma=\alpha+\delta=\beta\lambda+\delta\lambda^2=\beta+\alpha\lambda-\delta\lambda=0,$$
$$\gamma+\alpha\delta=-\lambda^3,\quad \delta\beta+\gamma\lambda=1.$$

从而　$\alpha=\beta=\delta=0$，　$\gamma=-\lambda^3$，　$-\lambda^4=1$，

即$\lambda$必须为复数。

对于一般的三次系统：

$$\dot{x}=P_3(x, y),\quad \dot{y}=Q_3(x, y),$$

如果能够先用非异实线性变换消去$P_3$中的$y^3$（这件事不一定能办到，对前例中的方程要办到这一点，必须用复线性变换），则可对$y$再作线性变换$y\to y+kx+m$，把$P_3$化为四个标准型之一：

$$xy^2+ey-f_3(x),\quad y-f_3(x),\quad xy-f_3(x),\quad y^2-f_3(x)$$
（$f_3(x)$为三次多项式）。

而$Q_3$为任意的。这样得到的标准型与(4.6)的前四个方程组类似。

# 参考文献

[4.1]　叶彦谦等。极限环论。上海科学技术出版社，1984。

[4.2]　Sakhova L V. Straight isochines, Trud. Samar. Gos. Univ. (N.S.), 1966, (Russian), Vyp., 144, 93～105.

[4.3]　Ye Yanqian. On the relative position of limit cycles of a real quadratic differential system, Chin. Ann. of Math. 1990, 11B(1): 74～

[4.4] Ye Yanqian. Bifurcation theory of quadratic differential systems (to appear in Chin.Ann.of Math, 1992, 13B).

[4.5] 李承治。关于平面二次系统的两个问题。中国科学A辑，1982，12 期：1087～1096。

[4.6] Coppel W A.Quadratic systems with a critical point of higher multiplicity, Diff.and Integral Eqs.V.3 1990, no.4, 709～720.

[4.7] Gasull A.Sheng L R and Llibre J.Chordal quadratic systems, Rocky Mountain J.Math.16(1986), no.4, 751～782.

[4.8] Ye Yanqian, Ye Weiyin. Triangulation of fundamental triangles of the phase-portraits of a quadratic differential system, Ann.of Diff.Eqs.1991, 7(3): 362～383.

[4.9] Ye Yanqian.Relative position of the Critical points of a certain cubic system and a generalization of the Bendixson index formula, Ann.of Diff, Eqs.1990, 6(2): 241～262.

[4.10] Koditshek D E and Narendra K S. The stability of second order quadratic differential equations, IEEE, Trans. Automat. Control 1982, AC-27(4): 783～798.

[4.11] Koditschek D E and Narendra K S.Limit cycles of planar quadratic differential equations, J.Diff.Eqs.54(1984), 181～185.

[4.12] Chicone. C.Limit cycles of a class of polynomial vector fields in the plane, Univ.of Missouri, preprint, 1984.

[4.13] Gasull A、Llibre J and Sotomayor J. Limit cycles of vector fields of the form $X(v)=Av+f(v)Bv$, J.Diff.Eqs., 67(1987), 90～110.

[4.14] Zoladek.H Quadratic systems with center and their perturbations, J.Diff. Eqs. 109(1994), 223～273.

[4.15] 李孝贵。Ⅱ类方程的定性分析。数学学报，1976，19：107～118。

[4.16] 李孝贵。二次系统的极限环的某些分布。数学学报，1985，28，no. 2：261～265。

[4.17] Cherkas L A and Gaiko V A.Bifurcation of limit cycles of a quadratic system with two critical points and two field-rotation parameters, Diff.Uravn.v.23, 1987, no.9, 1544～1553.

[4.18] Ye Yanqian.Bifurcation diagrams of quadratic differential systems having one focus and one saddle (Research Report of Centre de Recerca Matematica, Spain, 1992).

[4.19] Zegeling A.Quadratic systems equivalent to class $\mathrm{I}_{a\neq0}$, Report 90—88, Delft Univ.of Tech., 1990.

[4.20] Coll B, Gasull A and Llibre J.Some theorems on the existence, uniqueness and nonexistence of limit cycles for quadratic systems, J. Dif. Eqs.67(1987), 372～399.

[4.21] Carbonell M, Llibre J. Limit cycles of polynomial systems with homogeneous non-linearities, J.Math.Appl.142(1989), 573～590.

[4.22] Cherkas L A. Bifurcation of limit cycles on quadratic differential system through the rotation of vector fields, Diff. Uravn.17(1981), no.11: 2002～2016.

[4.23] Pliss V A. Non local problems of the theory of oscillations, Acad. Press, New York, 1966.

[4.24] Date T. Classification and analysis of two-dimensional real homogeneous quadratic differential equation systems, J. Diff. Eqs., 32 (1979), 311～334.

[4.25] 田景黄。仿射变换下的二次微分系统。四川大学学报,1982, no.3, 1～18.

[4.26] 任供善,李继彬。平面二次系统叶彦谦分类法的奇点再分类。黑龙江大学自然科学学报,1991, 8, no.1, 22～29.

[4.27] 沈伯骞。二次系统存在双曲线分界线环的充要条件(预印本)。

[4.28] Cima A and Llibre J. Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane, J. of Math. Anal. Appl., v.147, (1990), no.2.

[4.29] Yang Xin-an, Zhang Jian-fen. Algebraic classification of polynomial system in the plane, Ann. of Diff. Eqs. 6(4), 1990, 463～480.

[4.30] 沈伯骞。具椭圆解的系统($E_3$)的极限环存在性问题(预印本)。

[4.31] Dumortier F, Roussarie R, Rousseau C. Hilbert 16th problem for quadratic vector fields. (Preprint).

[4.32] Ye Yanqian. Bifurcation problem of bounded quadratic system, (Research Report of Centre de Recerca Matematica, Spain, 1992).

[4.33] Yang Xin-an. A survey of cubic system, Ann, of Diff. Eqs. 7 (1991).

[4.34] Kooij R Structurally stable quadratic systems without limit cycles. (Preprient, 1992).

[4.35] Han Maoan, Properties in the large of quadratic systems in the plane, Chin. Ann. Math. 10B(3), 1989.

## §5. 焦点量、鞍点量与奇点量

在二十世纪初叶 H. Dulac [5.1]、W. Kapteyn [5.2]、M. Frommer[5.3] 等在研究二次微分系统存在中心的充要条件的文章中，其实已出现了焦点量和鞍点量。只是由于当时极限环问题还未得到足够的重视，所以在这些文章中只能看到一、二、三阶焦点量(或鞍点量)等于零的式子。他们没有注意到，当这些量不为零时，如果是实的话，是否有必要确定它们的符号，以利于进一步研究焦点或经扰动而产生的极限环的稳定性。在文献 [5.1] 中也已经注意到：对线性部分以 $O(0, 0)$ 为中心的二次系统：

$$\dot{x} = -y + ax^2 + 2bxy + cy^2, \ \dot{y} = x + a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 \quad (5.1)$$

可以经过复系数线性变换

$$u = x + iy, \quad v = x - iy, \quad \tau = it, \quad (5.2)$$

把它化为复系数二次系统：

$$\frac{du}{d\tau} = u + a_1u^2 + a_2uv + a_3v^2, \quad \frac{dv}{d\tau} = -v + b_1v^2 + b_2uv + b_3u^2 \quad (5.3)$$

(这时 $O(0, 0)$ 成为(5.3)的线性部分的鞍点了)，以便于用较少的计算来获得方程的可积条件。这时，[5.1] 所关心的只是方程(5.1)或(5.3)在什么条件下可积。而不关心 $O(0, 0)$ 到底是焦点还是鞍点。

对于实平面多项式系统来说，在计算焦点量时如果不用变换(5.2)，则对于二次系统，计算还不算太繁 (参看文献[5.4] 中 §9 及文献[5.5])，但对次数≥3 的多项式则否，因此变换 (5.2) 是有其实用价值的。

对可能具复系数的二次系统 (5.1)，不用变换(5.2)而直接推

导其可积性条件，最好的结果属于 W. Kapteyn[5.2]，其中证明了：

定理 5.1 二次系统 (5.1) 当下列条件之一成立时为可积：

i) $a'+c'=0,\ a'=b,\ a+b'=0$；

ii) $a'+c'=0,\ a'=b=0$；

iii) $a'+c'=0,\ a'=b,\ 2b'=3a+5c,\ ac+b^2+2c^2=0$；

iv) $a+c=a'+c'=0$；

v) $a'+c'=i(a+c),\ a+b'=c'+b=0$； (5.4)

vi) $2a'=i(a-2b'+c),\ 2c'=i(a+2b'+c),\ 2b=i(a-c)$；

vii) $a'=ic,\ c'=ia,\ 2b=i(3a+5c)=2ib'$。

这里条件 i)、ii)、iii)、iv) 分别相当于 Bautin 的下列四个条件：

1) $\lambda_4=\lambda_5=0$；

2) $\lambda_2=\lambda_5=0$；

3) $\lambda_5=\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6=\lambda_3\lambda_6-2\lambda_6^2-\lambda_3^2=0$；

4) $\lambda_3-\lambda_6=0$。

(见文献[5.4]中 § 9 的定理 9.2)

又在条件 v) 之下方程 (5.1) 有通积分：

$$x^2+y^2+\frac{2}{3}\left[a'x^3+(2b'-a)x^2y+(c'-2b)xy^2-cy^3\right]=\mathrm{const}. \tag{5.5}$$

在条件 vi) 之下有通积分：

$$\left\{\frac{a+c}{a'-2b'-c}\left[i(a-2b'+c)x^2-(a-2b'-c)xy+2icy^2\right]+x+iy-\frac{2i}{3a+2b'+c}\right\}^{a+2b'-c}$$
$$=\mathrm{const}\cdot\left(x+iy-\frac{2i}{a+2b'-c}\right)^{3a+2b'+c},$$

在条件 vii) 之下有通积分：

$$\frac{\{(a+3c)(x-iy)^3+3i(x^2+y^2)\}^2}{\left\{(a+3c)(x-iy)^2+2i(x+iy)+\frac{1}{a+c}\right\}^3}=\mathrm{const}.$$

证明从略。

显见，条件 i)、ii)、iii)、iv) 既适用于实系数方程(5.1)，也适用于复系数方程(5.1)，但条件 v)、vi)、vii) 只适用于复系数方程(5.1)。又(5.5)可以是实系数，也可以是复系数的，因为它也满足条件 i)。

**定理 5.2** (见文献 [5.6]) 实或复系数的系统(5.3)的三个鞍点量为：

$$
\begin{gathered}
R_1 = b_1 b_2 - a_1 a_2, \\
R_2 = a_2 b_3 (2a_2 - b_1)(a_2 + 2b_1) - a_3 b_2 (2b_1 - a_1)(b_2 + 2a_1), \\
R_3 = (a_1 b_1 + a_2 b_2 - 5a_3 b_3)\left[a_2 b_3 (4b_1^2 - a_2^2) - a_3 b_2 (4a_1^2 - b_2^2)\right].
\end{gathered}
\tag{5.6}
$$

又(5.3)为可积的充要条件是：

$$
R_1 = R_2 = R_3 = 0. \tag{5.7}
$$

证明思路大致如下：首先，找变换：

$$
\left\{
\begin{aligned}
x &= u + a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{02}v^2 + \cdots = u + \sum_{2\le i+j} a_{ij} u^i v^j, \\
y &= v + b_{20}v^2 + b_{11}vu + b_{02}u^2 + \cdots = v + \sum_{2\le i+j} b_{ij} v^i u^j
\end{aligned}
\right.
\tag{5.8}
$$

把(5.3)变为：

$$
\left\{
\begin{aligned}
\dot u &= u + c_1 u^2 v + c_2 u^3 v^2 + \cdots + c_k u^{k+1} v^k + O(|u|^{k+2}|v|^{k+1}), \\
\dot v &= -v + d_1 v^2 u + d_2 v^3 u^2 + \cdots + d_k v^{k+1} u^k + O(|v|^{k+2}|u|^{k+1}).
\end{aligned}
\right.
\tag{5.9}
$$

(这时 $a_{k+1,k}$ 与 $b_{k+1,k}$ 可任意选取，故不妨取为零，见文献[5.7])，于是[1]：

$$
R_i = k_i(c_i + d_i), \quad i = 1, 2, \cdots,
$$

即第 $i$ 阶鞍点量，其中 $k_i$ 为适当的正常数。当然，对二次系统(5.3)，由(5.7)即可利用文献[5.1]中的可积条件证明(5.3)为可积，由于计算过程太繁，故从略。

**注 5.1** 在定理 5.1 的前面四组条件中，每一组都含有条件 $a' + c' = 0$，这就是 Bautin 的典范型所必具的条件；其后面三组条件中的每一组都含有条件：

1) 关于鞍点量的定义以及当方程取法式时鞍点量的表达式可参考[5.12]。

$$(a'+c')^2+(a+c)^2=0 \quad 或 \quad a'+c'=i(a+c)。 \tag{5.10}$$

对实系数方程(5.1)，由(5.10)必然导出 $a'+c'=a+c=0$，即定理5.1中的条件iv)。但对复系数方程(5.1)则不一定，由(5.10)只能得到 $a'+c'=\pm i(a+c)$，因此还存在另外三组可积性条件v)、vi)和vii)。

注5.2 不论是公式(5.6)，还是文献[5.5]中关于 $W_1$、$W_2$、$W_3$ 的表达式，我们都有这样一个约定：在计算 $R_2(W_2)$ 时已假设 $R_1=0(W_1=0)$；在计算 $R_3(W_3)$ 时我们已假设 $R_1=R_2=0(W_1=W_2=0)$。因此，$R_2$ 与 $R_3$ 的表达式并不唯一。例如，代替(5.6)中的 $R_3$ 的表达式，文献[5.9]中有：

$$R_3=(a_2b_2-a_3b_3)[a_2b_1b_3(a_2+2b_1)-b_2a_1a_3(b_2+2a_1)]。 \tag{5.11}$$

现在注意：若(5.1)在变换(5.2)之下变为(5.3)，则易证：

$$\begin{aligned}
a_1&=\frac{1}{4}[a'-2b-c'+i(-a-2b'+c)],\\
b_1&=\frac{1}{4}[-a'+2b+c'+i(-a-2b'+c)],\\
a_2&=\frac{1}{2}[a'+c'-i(a+c)],\\
b_2&=\frac{1}{2}[-a'-c'-i(a+c)],\\
a_3&=\frac{1}{4}[a'+2b-c'+i(-a+2b'+c)],\\
b_3&=\frac{1}{4}[-a'-2b+c'+i(-a+2b'+c)]。
\end{aligned} \tag{5.12}$$

由此可见：

1) 当(5.4)的条件i)成立时，有 $a_2=b_2$，$2a_1+b_2=0$，$2b_1+a_2=0$，从而 $R_1=R_2=R_3=0$。

2) 当(5.4)的条件ii)成立时，有 $a_1=b_1$，$a_2=b_2$，$a_3=b_3$，从而 $R_1=R_2=R_3=0$。

3) 当(5.4)的条件iii)成立时，有 $a_2=b_2$，$2a_1+a_2=2b_1+b_2$，$a_1+b_1=2a_2+2b_2$，$a_2^2-a_3b_3=0$，从而 $a_1=b_1=2a_2=2b_2$，$a_1b_1+$

$a_2b_2-5a_3b_3=0$。故 $R_1=R_2=R_3=0$。

4) 当(5.4)的条件 iv) 成立时，有 $a_2+b_2=a_2-b_2=0$，从而 $a_2=b_2=0$，故 $R_1=R_2=R_3=0$。

5) 当(5.4)的条件 v)成立时，有 $a_2=0$，$2a_1+b_2=0$，$b_1=0$，从而 $R_1=R_2=R_3=0$。

6) 当(5.4)的条件 vi) 成立时，有 $b_1-a_2-a_3=0$，$a_2-a_3+b_1=0$，$a_3+b_1=0$，从而 $a_2=a_3=b_1=0$，故 $R_1=R_2=R_3=0$。

7) 当(5.4)的条件 vii)成立时，有 $a_2=b_1=b_3=0$，$a_1-2b_2=0$，从而 $R_1=R_2=R_3=0$。

总结起来，可得定理如下：

**定理 5.3** 系统 (5.3) 为可积的充要条件是下列七个条件之一成立：

i) $a_2=b_2$，$2a_1+b_2=0$，$2b_1+a_2=0$；

ii) $a_i=b_i\ (i=1,\ 2,\ 3)$；

iii) $a_1=b_1=2a_2=2b_2$，$a_2^2=a_3b_3$；

iv) $a_2=b_2=0$； (5.13)

v) $a_2=0$，$b_1=0$，$2a_1+b_2=0$（或 $b_2=0$，$a_1=0$，$2b_1+a_2=0$）；

vi) $a_2=a_3=b_1=0$（或 $b_2=b_3=a_1=0$）；

vii) $a_2=b_1=b_3=0$，$a_1-2b_2=0$（或 $b_2=a_1=a_3=0$，$b_1-2a_2=0$）。

**注 5.3** 变换 (5.12)的逆变换是：

$$\begin{cases} a=\dfrac{i}{2}[a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3], \\ a'=\dfrac{1}{2}[a_1+a_2+a_3-b_1-b_2-b_3], \\ b=\dfrac{1}{2}[a_3+b_1-a_1-b_3], \\ b'=\dfrac{i}{2}[a_1+b_1-a_3-b_3], \\ c=\dfrac{i}{2}[a_2+b_2-a_1-b_1-a_3-b_3], \end{cases} \tag{5.14}$$

$$c' = \frac{1}{2}[-a_1 + b_1 + a_2 - b_2 - a_3 + b_3].$$

注 5.4 文献[5.5]中对实系数方程(5.1)得出的可积性条件：

$$W_1 = W_2 = W_3 = 0 \qquad (5.15)$$

一般来说，不适用于当(5.1)具有复系数时，因为(5.15)是在条件 $(a'+c')^2+(a+c)^2\neq 0$ 之下推导出来的。对于复系数，当此条件不成立，即 $(a'+c')^2+(a+c)^2=0$ 时，不一定能得到 $a'+c'=a+c=0$，而只能得到 $a'+c'=\pm i(a+c)$。

关于条件(5.15)不适用于复系数方程(5.1)的最早的例子见文献[5.10]。

例 5.1 $$\frac{dx}{dt} = -y + ix^2,\quad \frac{dy}{dt} = x + y^2. \qquad (5.16)$$

这里 $W_1 = 2i - 2i = 0$，$W_2 = [2i(3i) + 2(5-2)]\gamma = 0$，$W_3 = 0$。但(5.16)经过变换(5.2)成为：

$$\frac{du}{d\tau} = u + uv,\quad \frac{dv}{d\tau} = -v + \frac{u^2+v^2}{2}. \qquad (5.17)$$

从而 $R_1 = 0$，$R_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\neq 0$，故(5.16)为不可积。

事实上，对于有鞍点 $O(0,0)$ 而与我们常用的(II)类二次系统(见§4中(4.4)的II)相类似的二次系统：

$$\dot{x} = y + lx^2 + mxy + ny^2,\quad \dot{y} = x(1 + ax + by), \qquad (5.18)$$

如果用变换 $u = x + y$，$v = x - y$ 把它化成(5.3)的形式，然后按(5.6)式计算鞍点量(见文献[5.11])，可得：

$$\begin{cases} R_1 = \dfrac{m(n-l) - a(2l+b)}{4}, \\ R_2 = \begin{cases} 0, & \text{当 } am = 0 \\ \dfrac{m(5a+m)}{8a}[a^2(n-2l-b) + (n-b)(l-n)^2], & \text{当 } am\neq 0; \end{cases} \\ R_3 = \begin{cases} 0, & \text{当 } am = 0 \\ \dfrac{15}{4}m[2a^2 + n(l-2n)][(b-n)(l-n)^2 + a^2(2l+b-n)], & \text{当 } am\neq 0. \end{cases} \end{cases} \qquad (5.19)$$

另一方面，若对(5.18)作变换 (5.2)，则得

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau}=-v-\dfrac{1}{4}[a-m+i(n-l-b)]u^2+\dfrac{1}{2}[a-i(l+n)]uv \\ \qquad -\dfrac{1}{4}[a+m+i(n-l+b)]v^2, \\ \dfrac{dv}{d\tau}=u+\dfrac{1}{4}[-a-m+i(n-l+b)]u^2+\dfrac{1}{2}[a+i(l+n)]uv \\ \qquad +\dfrac{1}{4}[-a+m+i(n-b-l)]v^2. \end{cases} \tag{5.20}$$

由此按文献[5.5]的方法计算 $W_1$、$W_2$、$W_3$，可得：

$$\begin{cases} W_1=\dfrac{i}{2}[a(2l+b)+m(l-n)]; \\ W_2=\begin{cases} 0, \text{ 当 } a=0 \\ \dfrac{im}{8a}(5a+m)[(l-\ )^2-a^2][(b-n)(l-n)^2 \end{cases} \\ \qquad +a^2(2l+b-n)], \text{ 当 } a\neq 0; \\ W_3=\begin{cases} 0, \text{ 当 } a=0 \\ \dfrac{im}{16}[(l-n)^2-a^2][2a^2+n(l-2n)][(b-n)(l-n)^2 \end{cases} \\ \qquad +a^2(2l+b-n)], \text{ 当 } a\neq 0. \end{cases} \tag{5.21}$$

因此，如果：

$$a(2l+b)+m(l-n)=0, \quad a^2=(l-n)^2, \tag{5.22}$$

则 $W_1=W_2=W_3=0$，但此时(5.18) 不一定可积。因为对应的方程(5.3)不一定满足可积条件。

**例 5.2** $\dot{x}=y+2x^2-2xy+y^2, \quad \dot{y}=x(1+x-2y)$。 (5.23)

这里条件(5.22)满足，故 $W_1=W_2=W_3=0$。但在变换 $u=x+y$，$v=x-y$ 之下，(5.23)变为：

$$\dot{u}=u+uv+2v^2, \quad \dot{v}=-v+\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2}u^2. \tag{5.24}$$

易见现在 $R_1=0$、$R_2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot 2=\dfrac{3}{2}\neq 0$，故 (5.23)不可积。

例 5.3 $\dot{x}=y+x^2-4xy-y^2,\quad \dot{y}=x(1+2x+2y)$. (5.25)

此方程也满足条件 (5.22)，但对应的方程(5.3)为：

$$\dot{u}=u+2uv+v^2,\quad \dot{v}=-v+v^2-2u^2.$$

由此易算出：$R_1=0$, $R_2=-4\cdot3\cdot4\neq0$，故(5.25)不可积分。

注 5.5 由(5.18)与(5.21)看出，当实系数有鞍点 $O(0,0)$ 的方程被化成复系数，且线性部分以 $O$ 为中心的方程(5.20)时，算出的三个焦点量都是纯虚数。同样，当实系数方程：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y-\lambda_3x^2+(2\lambda_2+\lambda_5)xy+\lambda_6y^2,\\ \dot{y}&=x+\lambda_2x^2+(2\lambda_3+\lambda_4)xy-\lambda_2y^2,\end{aligned}\tag{5.26}$$

被变换(5.2)化成(5.3)的形式然后计算鞍点量时得到的也都是纯虚数，且有关系(见文献[5.6])：

$$\overline{V}_3=i\pi R_1,\ \overline{V}_5=\frac{1}{3}\pi iR_2,\quad \overline{V}_7=\frac{5}{24}\pi iR_3.\tag{5.27}$$

注 5.6 文献[5.12]所得的方程 (5.18) 在鞍点 $O(0,0)$的鞍点量为：

$$\left\{\begin{aligned}&\overline{V}_1^*=m(n-l)-a(b+2l);\\ &\overline{V}_2^*=(5a+m)[ma(2l+b-n)-(2l+b)(l-n)(b-n)];\\ &\overline{V}_3^*=-a(2a^2-2n^2+ln)[ma(2l+b-n)\\ &\qquad-(2l+b)(l-n)(b-n)].\end{aligned}\right.\tag{5.28}$$

形式上与(5.19)不一样，实质上是一样的。在文献[5.12]中对平面解析或 $C^{2n+1}$ 类向量场在细焦点或细鞍点邻域中各种法式的比较，二者之间的对偶关系，焦点量(他们称为 Liapunov 常数)与鞍点量(对偶 Liapunov 常数)的计算，以及后者对过鞍点的分界环(loop)在扰动后产生极限环个数的影响(对二次系统来说是3)都有详细的讨论，在此从略。

关于二次系统中心条件及焦点量的研究，最近还有 H. Zoladek(见文献[5.13])的工作。他研究了具有复变量形式的二次系统：

$$\dot{z}=(i+\lambda)z+Az^2+Bz\bar{z}+C\bar{z}^2,\quad z=x+iy,\tag{5.29}$$

证明了以下定理：

**定理 5.4** 方程(5.29)在实$(x, y)$平面上以$O(0, 0)$为中心的充要条件是下面四个条件之一成立：

1) $\lambda = B = 0$；

2) $\lambda = 0,\ A = -\dfrac{1}{2},\ B = 1$； (5.30)

3) $\lambda = 0,\ I_m A = I_m C = 0,\ B = 1$；

4) $\lambda = 0,\ A = 2,\ B = 1,\ |C| = 1$。

证 记$A = \alpha_1 + i\alpha_2$，$B = \beta_1 + i\beta_2$，$C = \gamma_1 + i\gamma_2$，$\bar{z} = x - iy$。则(5.29)成为：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x - y + (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)x^2 + (\beta_1 - \alpha_1 - \gamma_1)y^2 + 2(\gamma_2 - \alpha_2)xy,\\ \dot{y} &= \lambda y + x + (\beta_2 + \gamma_2 + \alpha_2)x^2 + (\beta_2 - \alpha_2 - \gamma_2)y^2 + 2(\alpha_1 - \gamma_1)xy.\end{aligned} \tag{5.31}$$

与(5.1)式比较知当$\lambda = 0$而$a$，$b$、$c$、$a'$、$b'$、$c'$给定时，可以由(5.1)与(5.31)确定$\alpha_1$、$\alpha_2$、$\beta_1$、$\beta_2$、$\gamma_1$、$\gamma_2$，亦即$A$、$B$、$C$。故(5.29)表示最一般的平面二次多项式系统。

当(5.30)的条件1)成立时，有$a + c = a' + c' = 0$，即定理5.1的条件iv)成立；当(5.30)的条件2)成立时有$a' + c' = 0$，$a' = b$，$a + b' = 0$，即定理5.1的条件i)成立。当(5.30)的条件3)成立时，有$a' + c' = 0$，$a' = b = 0$，即定理5.1的条件ii)成立。最后，当(5.30)的条件(4)成立时，有$a' + c' = 0$，$a' = b$，$2b' = 3a + 5c$，$ac + b^2 + 2c^2 = 0$，即定理5.1的条件iii)成立。定理得证。▌

文献[5.13]还指出了与定理5.4等价，但形式上更为一般的是如下定理：

**定理 5.5** 方程(5.29)以$O$为中心的充要条件是下面四个条件之一成立：

1) $\lambda = B = 0$；

2) $\lambda = 2A + \bar{B} = 0$；

3) $\lambda = I_m(AB) = I_m(\bar{B}^3 C) = I_m(A^3 C) = 0$； (5.32)

4) $\lambda = A - 2\bar{B} = |C| - |B| = 0$。

这是因为当$z$经过非异线性变换$z \to \xi z$以后，有$\lambda \to \lambda$，$A \to$

$\zeta A$, $B \to \bar{\zeta} B$, $C \to \bar{\zeta}^2 \zeta^{-1} C$。故当 $B \neq 0$ 时可化 $B$ 为 1。

文献[5.13]还得到二次系统的三个焦点量 $\overline{V}_3$、$\overline{V}_5$、$\overline{V}_7$ 的如下的表达式：

$$\overline{V}_3 = -2\pi I_m(AB);$$

$$\overline{V}_5 = -\frac{2\pi}{3} I_m[(2A+\bar{B})(A-2\bar{B})\bar{B}C]; \tag{5.33}$$

$$\overline{V}_7 = -\frac{5\pi}{4} I_m[(|B|^2-|C|^2)(2A+\bar{B})\bar{B}^2C].$$

证明从略。此外，[5.13]还得到如下一个表示 $z=0$ 的焦点阶数的简洁的定理：

**定理 5.6** (5.29)的奇点 $z=0$ 的焦点阶数为：

$$\begin{aligned}
&0\text{ 阶，当 } \lambda \neq 0;\\
&1\text{ 阶，当 } \lambda = 0,\ I_m(\tilde{B}) \neq 0;\\
&2\text{ 阶，当 } \lambda = I_m(\tilde{B}) = 0,\ A \neq 2\bar{B};\\
&3\text{ 阶，当 } \lambda = A - 2\bar{B} = 0.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

这里 $\tilde{B} = B|A|/\bar{A}$。

注意，由前面引进的记号知：

$$\tilde{B} = \frac{\beta_1\alpha_1 - \beta_2\alpha_2 + i(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2)}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}}. \tag{5.35}$$

故 $I_m(\tilde{B}) = \dfrac{\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}}$。另一方面 $A - 2\bar{B} = 0$ 表示 $\alpha_1 = 2\beta_1$，$\alpha_2 = -2\beta_2$。故当 $I_m(\tilde{B}) = 0$ 时不一定有 $A - 2\bar{B} = 0$。反之，由 $A - 2\bar{B} = 0$ 可导出 $I_m(\tilde{B}) = 0$。这就是 (5.34) 式中 $z=0$ 为 3 阶焦点的条件特别简单的原因，也是当二次系统具有 §4 中典范型 (4.4) 或(4.9)时所办不到的。

近年来，国内研究二次系统的中心及焦点量的文章还有文献[5.14]、[5.15]、[5.31]。

关于缺二次项的三次系统（线性部分以 $O(0, 0)$ 为中心或细鞍点）为可积分的充要条件问题早已得到解决，见文献 [5.16]。但关于它的鞍点量的公式则在近年中才看到，见文献 [5.12]、[5.14]。例如[5.12]中有如下的结果：

**定理 5.7** 系统

$$\dot{x} = y + ax^3 + bx^2y + cxy^2 - y^3,\ \dot{y} = x + dx^3 + ex^2y + fxy^2 \tag{5.36}$$

在 $O(0, 0)$ 的五个鞍点量为：

$$\begin{aligned} &V_1^* = 3a - c + e,\ V_2^* = (a+e)(b+f) + (3a+e)(1-d);\\ &V_3^* = (2e+a)[(b+f)(f+1) + a(3a+e)];\\ &V_4^* = e(d-b-4)[(b+f)(f+1) + a(3a+e)];\\ &V_5^* = -e(3e^2-4d)[(b+f)(f+1) + a(3a+e)]. \end{aligned} \tag{5.37}$$

若 $V_1^* = \cdots = V_5^* = 0$，则(5.36)为可积分。

注意到焦点与鞍点在变换(5.2)之下可以“互化”（就线性部分而言），而对应的焦点量与鞍点量之间又有简单的关系，文献[5.14]对复自治微分系统引入了奇点量的概念把两者统一起来。又定义了复系统的李不变量的概念，并由此得到奇点量结构定理。从而从另一角度推导出二次系统和缺二次项的三次系统的奇点量公式，使人们对鞍点量与焦点量的性质有更深刻的认识。下面就简要地介绍一下[5.14]的结果。

考虑复自治解析微分系统：

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dT} = z + \sum\limits_{\alpha+\beta=2}^{\infty} a_{\alpha\beta} z^{\alpha} w^{\beta} = Z(z, w), \\ \dfrac{dW}{dT} = -w - \sum\limits_{\alpha+\beta=2}^{\infty} b_{\alpha\beta} w^{\alpha} z^{\beta} = -W(z, w). \end{cases} \tag{5.38}$$

其中 $z$、$w$、$T$ 都是复数。

**定理 5.8** （见文献[5.7]）对于(5.38)可以唯一地确定一形式幂级数：

$$\varphi(z, w) = z + \sum_{i+j=2}^{\infty} A_{ij} z^i w^j,\ \psi(z, w) = w + \sum_{i+j=2}^{\infty} B_{ij} w^i z^j. \tag{5.39}$$

它把(5.38)化为下面的规范型：

$$\frac{d\varphi}{dT} = \varphi \sum_{k=0}^{\infty} p_k (\varphi \cdot \psi)^k,\quad \frac{d\psi}{dT} = -\psi \sum_{k=0}^{\infty} q_k (\varphi \cdot \psi)^k. \tag{5.40}$$

在(5.39)中可取 $A_{k+1,k} = B_{k+1,k} = 0$，而在(5.40)中有 $p_0 = q_0 = 1$，

$p_k$, $q_k$ 则为诸 $a_{\alpha\beta}$ 与 $b_{\alpha\beta}$ 的有理系数多项式。

**定义 5.1** 1) 对系统 (5·40)，记

$$\mu_0=0,\ \mu_k=p_k-q_k\quad (k=1,\ 2,\ \cdots),\tag{5.41}$$

称 $\mu_k$ 为(5.40)在其奇点 $O(0,\ 0)$ 的第 $k$ 个奇点量。

2) 若 $\mu_1=\cdots=\mu_{k-1}=0$, $\mu_k\neq 0$，则称 $O$ 是(5.40)的 $k$ 阶细奇点。

3) 若(5.40)在 $O$ 的所有奇点量全部为零，则称(5.40)以 $O$ 为广义中心。

由本节前段的分析可知：当 $z$、$w$、$T$ 为实数时，$\mu_k$ 即 $O$ 的第 $k$ 个鞍点量。又若(5.38)是由实解析系统化来的复系统，则前者在 $O$ 的第 $k$ 个焦点量与后者在 $O$ 的第 $k$ 个奇点量之间有如下关系：

$$V_{2k+1}=i\mu_k\quad (k=1,\ 2,\ \cdots)。$$

**定理 5.9** 系统(5.40) 在 $O$ 的邻域中存在正则积分的充要条件是 $O$ 为广义中心，即(5.40)在 $O$ 的一切奇点量都等于零(证明见文献[5.7])。

**定理 5.10** 系统 (5.40) 在 $O$ 的邻域中存在正则积分 $F(z,w)=C$ 的充要条件是存在原点邻域中的解析函数 $J(z,\ w)$ (称为积分因子)满足 $J(0,\ 0)\neq 0$，且

$$\frac{\partial}{\partial z}(JZ)-\frac{\partial}{\partial w}(JW)=0。$$

**证** 充分性是显然的；为证必要性，取变换(5.39)的Jacobi行列式

$$J(z,w)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial w}\\[2mm] \dfrac{\partial\psi}{\partial z} & \dfrac{\partial\psi}{\partial w}\end{vmatrix},$$

则易证

$$\frac{\partial}{\partial z}(JZ)-\frac{\partial}{\partial w}(JW)=J\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\mu_k(\varphi\psi)^k,\tag{5.42}$$

当正则积分存在时，上式右边恒等于零，故 $J$ 为积分因子，且 $J(0,0)=1$。 ∎

**定理 5.11** 对系统 (5.38) 可逐项确定形式级数 $F(z, w) = zw + h.o.t.$ 使

$$\frac{dF}{dT} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (zw)^{k+1}, \tag{5.43}$$

且当 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{k-1} = 0$, $\lambda_k \neq 0$ 时，必有 $\mu_1 = \cdots = \mu_{k-1} = 0$, $\mu_k \neq 0$, 且与 $\lambda_k$ 同号。

证明见文献[5.1]或[5.7]。

**定理 5.12** 对系统 (5.38) 及 $\gamma \neq 0$ 可逐项确定形式级数

$$M(z, w) = 1 + h.o.t.,$$

使有

$$\frac{dM}{dT}_{(39)} = \gamma\left[\left(Z\frac{\partial}{\partial z} - W\frac{\partial}{\partial w}\right)M - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (wz)^k\right], \tag{5.44}$$

且当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{k-1} = 0$, $\lambda_k \neq 0$ 时，必有 $\mu_1 = \cdots = \mu_{k-1} = 0$, $\mu_k = \frac{1}{k+1}\lambda_k$。（证明略）

现在引进双参数变换群：

$$z = \rho e^{i\theta}\tilde{z}, \quad w = \rho e^{-i\theta}\tilde{w}, \tag{5.45}$$

其中 $\rho$ 与 $\theta$ 为实参数。若记 $z = x + iy$, $w = x - iy$, $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$, $\tilde{w} = \tilde{x} - i\tilde{y}$。其中 $x$、$y$、$\tilde{x}$、$\tilde{y}$ 为实数，则 (5.45) 成为：

$$x = \rho(\tilde{x}\cos\theta - \tilde{y}\sin\theta), \quad y = \rho(\tilde{x}\sin\theta + \tilde{y}\cos\theta). \tag{5.46}$$

它表示实平面中的相似-旋转变换。

系统 (5.38) 在变换 (5.45) 之下变为：

$$\frac{d\tilde{z}}{dT} = \tilde{z} + \sum_{\alpha+\beta=2}^{\infty} \tilde{a}_{\alpha\beta}(\tilde{z})^\alpha(\tilde{w})^\beta, \quad \frac{d\tilde{w}}{dT} = -\tilde{w} - \sum_{\alpha+\beta=2}^{\infty} \tilde{b}_{\alpha\beta}(\tilde{w})^\alpha(\tilde{z})^\beta. \tag{5.47}$$

显见以下等式成立：

$$\tilde{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}\rho^{\alpha+\beta-1}e^{i(\alpha-\beta-1)\theta}, \quad \tilde{b}_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}\rho^{\alpha+\beta-1}e^{-i(\alpha-\beta-1)\theta}, \tag{5.48}$$

今后以 $f(a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta})$ 记 (5.38) 的诸系数 $a_{\alpha\beta}$ 与 $b_{\alpha\beta}$ 的多项式，记

$$\tilde{f} = f(\tilde{a}_{\alpha\beta}, \tilde{b}_{\alpha\beta}), \quad f^* = f(a^*_{\alpha\beta}, b^*_{\alpha\beta}),$$

其中 $a^*_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}$, $b^*_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta \geq 2$。

**定义 5.2** 若

$$\tilde{f}=\rho^{I_s}e^{iI_r\theta}f, \tag{5.49}$$

则称 $I_s$ 为 $f$ 在变换 (5.45) 之下的相似指数，$I_r$ 为 $f$ 的旋转指数。

**定义 5.3** 若 $f(a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta})$在变换(5.45) 之下变为 $\tilde{f}=\rho^{2k}f$，即 $I_r=0$, $I_s=2k$，则称 $f$ 为 $k$ 级李不变量。若 $f$ 为单项式李不变量，且不能表示为两个单项式李不变量的乘积，则称 $f$ 为一个基本李不变量。

**定理 5.13** 单项式

$$g=\prod_{i=1}^{n}a_{\alpha_i\beta_i}\prod_{j=1}^{m}b_{\alpha'_j\beta'_j} \tag{5.50}$$

是 $k$ 级李不变量，当且仅当

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i-1)+\sum\limits_{j=1}^{m}(\alpha'_j+\beta'_j-1)=2k,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i-\beta_i-1)-\sum\limits_{j=1}^{m}(\alpha'_j-\beta'_j-1)=0.\end{cases} \tag{5.51}$$

证明由(5.49)、定义 5.2 和定义 5.3 可立刻得到。 ▮

**定理 5.14** 若(5.50)中的 $g$ 是 $k$ 级单项式李不变量（或基本李不变量），则 $g^*$ 亦然。（证明略）

**定理 5.15** 系统(40) 的奇点 $O(0, 0)$ 的第 $k$ 个奇点量 $\mu_k=\mu_k(a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta})$ 是一个 $k$ 级李不变量，即 $\tilde{\mu}_k=\rho^{2k}\mu_k \quad (k=1, 2, \cdots)$。

证 系统 (5.47) 的奇点 $O(0, 0)$ 的第 $k$ 个奇点量显见为 $\tilde{\mu}_k=\mu_k(\tilde{a}_{\alpha\beta}, \tilde{b}_{\alpha\beta})$。另一方面，(5.47)可经变换

$$\tilde{\varphi}=\frac{1}{\rho}e^{-i\theta}\varphi(\rho e^{i\theta}z, \rho e^{-i\theta}\tilde{w}),$$

$$\tilde{\psi}=\frac{1}{\rho}e^{i\theta}\psi(\rho e^{i\theta}z, \rho e^{-i\theta}\tilde{w})$$

化为

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dT}=\tilde{\varphi}\sum_{k=0}^{\infty}\rho^{2k}p_k(\tilde{\varphi}\cdot\tilde{\psi})^k,\quad \frac{d\tilde{\psi}}{dT}=-\tilde{\psi}\sum_{k=0}^{\infty}\rho^{2k}q_k(\tilde{\varphi}\cdot\tilde{\psi})^k. \tag{5.52}$$

由定义 5.1 知(5.52)在 $O$ 的第 $k$ 个奇点量为

$$\tilde{\mu}_k=\rho^{2k}(p_k-q_k)=\rho^{2k}\mu_k \quad (k=1,\ 2,\ \cdots)。$$

定理证毕。∎

现在引进反对称变换

$$z=w^*,\ w=z^*,\ T=-T^*, \tag{5.53}$$

则系统(5.38)在变换(5.53)之下变为

$$\frac{dz^*}{dT^*}=z^*+\sum_{\alpha+\beta=2}^{\infty}a^*_{\alpha\beta}(z^*)^{\alpha}(w^*)^{\beta},$$

$$\frac{dw^*}{dT^*}=-w^*-\sum_{\alpha+\beta=2}^{\infty}b^*_{\alpha\beta}(w^*)^{\alpha}(z^*)^{\beta}, \tag{5.38*}$$

故 (5.38*) 的奇点 $O$ 的第 $k$ 个奇点量是 $\mu^*_k=\mu_k(a^*_{\alpha\beta},\ b^*_{\alpha\beta})$。另一方面(5.38*)可借变换

$$\varphi^*=\psi(w^*,\ z^*),\ \psi^*=\varphi(w^*,\ z^*)$$

化为规范型

$$\frac{d\varphi^*}{dT^*}=\varphi^*\sum_{k=0}^{\infty}q_k(\varphi^*\psi^*)^k,\quad \frac{d\psi^*}{dT^*}=-\psi^*\sum_{k=0}^{\infty}p_k(\varphi^*\psi^*)^k.$$

由此知

$\mu^*_k=q_k-p_k=-\mu_k$, 亦即 $\mu_k(a^*_{\alpha\beta},\ b^*_{\alpha\beta})=\mu_k(b_{\alpha\beta},\ a_{\alpha\beta})=-\mu_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$, 这说明 $\mu_k$ 具有反对称性。

结合定理5.15，可得如下定理：

**定理 5.16** 系统(5.38)的奇点 $O(0,\ 0)$ 的第 $k$ 个奇点量 $\mu_k$ 是(5.38)的 $k$ 级单项式李不变量的有理系数反对称线性组合，即：

$$\mu_k=\sum_{j=1}^{s}\gamma_{kj}(g_{kj}-g^*_{kj}) \quad (k=1,\ 2,\ \cdots), \tag{5.54}$$

其中 $s=s(k)$ 是正整数，$\gamma_{kj}$ 为有理系数，$g_{kj}$ 与 $g^*_{kj}$ 是(5.38) 的 $k$ 级单项式李不变量(奇点量结构定理)。

**推论** 若(5.38) 的任一基本李不变量都是自对称的，即 $g=g^*$，则奇点 $O$ 的一切奇点量都等于零，故(5.38)为可积(广义对称原理)。

**例 5.4** 当平面实系数自治微分系统所定义的向量场以 $x$ 轴为对称轴时，我们有

$$\dot{x}=X(x,\ y),\ \dot{y}=Y(x,\ y), \tag{5.55}$$

其中 $X(x, -y)=-X(x, y)$, $Y(x, -y)=Y(x, y)$，于是经变换(5.2)所得的系统 (5.38) 将满足关系 $Z(w, z)=W(z, w)$，从而 $a_{\alpha\beta}=b_{\alpha\beta}$ 对一切 $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $\alpha+\beta\geqslant 2$, 此时推论的条件显然成立。

**定理 5.17** 若(5.38)右端的系数满足下列二条件之一，则方程为可积：

$$
\begin{aligned}
&1)\ a_{\alpha\beta}=0 \text{ 当 } \alpha-\beta-1\geqslant 0;\ b_{\alpha\beta}=0 \text{ 当 } \alpha-\beta-1\leqslant 0;\\
&2)\ a_{\alpha\beta}=0 \text{ 当 } \alpha-\beta-1\leqslant 0;\ b_{\alpha\beta}=0 \text{ 当 } \alpha-\beta-1\geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{5.56}
$$

**证** 当条件1)或2)成立时，能使(5.51)的第二式成立的单项式只有 $g=0$，即任一单项式李不变量必为零，故必满足 $g=g^*$。▌

**例 5.5** 系统

$$
\begin{cases}
\dfrac{dz}{dT}=z+a_{12}zw^2+a_{03}w^3+a_{22}z^2w^2+a_{13}zw^3+a_{04}w^4,\\
\dfrac{dw}{dT}=-w-b_{30}w^3-b_{40}w^4-b_{31}w^3z.
\end{cases}
\tag{5.57}
$$

满足(5.56)的条件1)，故为可积。

为了说明寻找和组合基本李不变量的方法，在此以三次多项式系统为例：

$$
\begin{cases}
\dfrac{dz}{dT}=z+a_{20}z^2+a_{11}zw+a_{02}w^2+a_{30}z^3+a_{21}z^2w+a_{12}zw^2+a_{03}w^3,\\
\dfrac{dw}{dT}=-w-b_{20}w^2-b_{11}wz-b_{02}z^2-b_{30}w^3-b_{21}w^2z-b_{12}wz^2-b_{03}z^3.
\end{cases}
\tag{5.58}
$$

按照(5.58)在变换(5.45)之下旋转指数的不同，它的系数可以分为九类：

$$
\begin{gathered}
C_0=\{a_{21},\ b_{21}\},\ C_1=\{a_{20},\ b_{11}\},\ C_2=\{a_{30},\ b_{12}\},\ C_3=\{b_{02}\},\\
C_4=\{b_{03}\},\ C_{-1}=\{b_{20},\ a_{11}\},\ C_{-2}=\{b_{30},\ a_{12}\},\\
C_{-3}=\{a_{02}\},\ C_{-4}=\{a_{03}\}.
\end{gathered}
\tag{5.59}
$$

其中 $I_r(C_{\pm j})=\pm j\ (j=0, 1, \cdots, 4)$。

显见 $C_0$ 中的 $a_{21}$ 或 $b_{21}$ 都是基本李不变量，这是只有一个一次因子的最简单的基本李不变量。除此以外，基本李不变量都至

少含有两个或更多个数的不同因子。一般地，假设在 $C_\alpha(\alpha=1,$ $2, 3$ 或 $4)$ 中取出 $k_\alpha$ 个元素来（它们之中可能有相同的），再在 $C_{-\alpha}(\alpha=1, 2, 3$ 或 $4)$ 中取出 $l_\alpha$ 个元素来，它们相乘后所得的单项式要是一个基本李不变量，则 $k_1, \cdots, k_4, l_1, \cdots, l_4$ 应是方程

$$k_1+2k_2+3k_3+4k_4=l_1+2l_2+3l_3+4l_4 \tag{5.60}$$

的一组无公因数的正整数解。例如 $a_{30}b_{30}$, $a_{30}a_{12}$, $a_{30}^2a_{03}$, $a_{30}b_{12}a_{03}$ 都是基本李不变量。它们分别对应于(5.60)的解组：$(0, 1, 0, 0; 0, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0; 0, 1, 0, 0)$, $(0, 2, 0, 0; 0, 0, 0, 1)$ 及 $(0, 2, 0, 0; 0, 0, 0, 1)$。由此可见(5.60)的一组解可以对应于不只一个单项式基本李不变量。事实上，同 $(0, 1, 0, 0; 0, 1, 0, 0)$ 对应的还有 $b_{12}b_{30}$ 和 $a_{12}b_{12}$。且以上这四个单项式的相似指数都是 4，因此它们都是 2 级基本李不变量。但 2 级基本李不变量除了这四个以外，还有其他 33 个，如 $a_{03}b_{03}$（对应于(5.60)的解 $(0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, 1)$），$a_{20}b_{11}b_{30}$（对应于 $(2, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0)$），$a_{20}^2b_{11}a_{02}$（对应于 $(3, 0, 0, 0; 0, 0, 1, 0)$），等等。又前面所写的 $a_{30}^2a_{03}$ 与 $a_{30}b_{12}a_{03}$ 的相似指数都是 6，所以它们是 3 级基本李不变量。

总计 3 级基本李不变量共有 58 个。此外还有 1, 2, 4, 5 级基本李不变量各为 7, 37, 16, 2 个。故系统 (5.58) 共有 120 个基本李不变量，不在此一一列举了（见文献[5.14]）。

对于缺二次项的三次系统

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dT}=z+a_{30}z^3+a_{21}z^2w+a_{12}zw^2+a_{03}w^3, \\ \dfrac{dw}{dT}=-w-b_{30}w^3-b_{21}w^2z-b_{12}wz^2-b_{03}z^3. \end{cases} \tag{5.61}$$

则情况比较简单，它只有 13 个基本李不变量。见表 5.1。

又对以 $O(0, 0)$ 为细奇点的二次系统

$$\frac{dz}{dT}=z+a_{20}z^2+a_{11}zw+a_{02}w^2,$$

$$\frac{dw}{dT}=-w-b_{20}w^2-b_{11}wz-b_{02}z^2, \tag{5.62}$$

表 5.1

| | |
|---|---|
| 一　级 | $a_{21}$, $b_{21}$ |
| 二　级 | $a_{30}b_{30}$, $a_{12}b_{12}$, $a_{03}b_{03}$, $a_{30}a_{12}^2$, $b_{30}b_{12}$ |
| 三　级 | $a_{30}^3a_{03}$, $a_{30}b_{12}a_{03}$, $b_{12}^3a_{03}$, $b_{30}^2b_{03}$, $b_{30}a_{12}b_{03}$, $a_{12}^2b_{03}$ |

也只存在13个基本李不变量，见表 5.2。

表 5.2

| | |
|---|---|
| 一级自对称 | $a_{20}b_{20}$, $a_{11}b_{11}$, $a_{02}b_{02}$ |
| 一级非自对称 | $a_{20}a_{11}$, $b_{20}b_{11}$ |
| 二级非自对称 | $a_{20}^3a_{02}$, $b_{20}^3b_{02}$; $a_{20}^2b_{11}a_{02}$, $b_{20}^2a_{11}b_{02}$; $a_{20}b_{11}^2a_{02}$, $b_{20}a_{11}^2b_{02}$; $b_{11}^3a_{02}$, $a_{11}^3b_{02}$ |

关于利用奇点量结构定理和表 5.2 来计算 (5.62) 的三个鞍点量，在文献[5.14]中提出用待定系数法。在另一篇文献[5.15]中计算特殊三次系统

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dT}=z+a_{02}w^2+a_{30}z^3+a_{21}z^2w+a_{12}zw^2, \\ \dfrac{dw}{dT}=-w-b_{02}z^2-b_{30}w^3-b_{21}w^2z-b_{12}wz^2 \end{cases} \tag{5.63}$$

的奇点量公式时则采用定理 5.12 来逐步确定 $M(z,\ w)$ 的系数和各个 $\lambda_k(=(k+1)\mu_k)$。看来用此法确定 (5.62) 的三个奇点量可能是最最简便的。具体地说，可以假设

$$M(z,\ w)=1+C_{10}z+C_{01}w+C_{20}z^2+C_{02}w^2+C_{30}z^3 +C_{21}z^2w+C_{12}zw^2+C_{03}w^3+\cdots$$

(其中 $C_{00}=1$, $C_{kk}=0$, $k=1,\ 2,\ \cdots$)，又取 $\gamma=1$，则

$$\frac{dM}{dT}=(C_{10}+2C_{20}z+3C_{30}z^2+2C_{21}zw+C_{12}w^2+\cdots)(z+a_{20}z^2 +a_{11}zw+a_{02}w^2)+(C_{01}+2C_{02}w+C_{21}z^2+2C_{12}zw$$

$$+3C_{03}w^2+\cdots)(-w-b_{20}w^2-b_{11}wz-b_{02}z^2) \tag{5.64}$$

而

$$\left(Z\frac{\partial}{\partial z}-W\frac{\partial}{\partial w}\right)M-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(zw)^k$$
$$=(1+C_{10}z+C_{01}w+C_{20}z^2+C_{02}w^2+C_{30}z^3$$
$$+\cdots)((2a_{20}-b_{11})z+(a_{11}-2b_{20})w)$$
$$-\lambda_1wz-\lambda_2w^2z^2-\lambda_3w^3z^3-\cdots. \tag{5.65}$$

令(5.64)的右边与(5.65)的右边相等，我们看到，在$M$的展开式中只要算到$z$与$w$的六次方项，就可以把$\lambda_1$、$\lambda_2$、$\lambda_3$完全确定了。

下面再列出(5.61)的五个奇点量公式如下（见文献[5.14]）：

**定理 5.18** 系统(5.61)的前五个奇点量为：

$$\mu_1=a_{21}-b_{21}\ \text{（一级，反对称）；}$$

$$\mu_2=b_{30}b_{12}-a_{30}a_{12}\ \text{（二级，反对称）；}$$

$$\mu_3=(3a_{30}-b_{12})(a_{30}+3b_{12})a_{03}-(3b_{30}-a_{12})(b_{30}+3b_{12})b_{03}$$

（三级，反对称）； (5.66)

$$\mu_4=(a_{21}+b_{21})[(3a_{30}-b_{12})^2a_{03}-(3b_{30}-a_{12})^2b_{03}]\ \text{（四级，反对称）；}$$

（一级，对称） （三级，反对称）

$$\mu_5=(4a_{12}b_{12}-a_{03}b_{03})[(3a_{30}-b_{12})^2a_{03}-(3b_{30}-a_{12})^2b_{03}]$$

（二级，对称） （三级，反对称） （五级，反对称）。

且当$\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_5=0$时，(5.61)为可积分。

**注 5.7** 系统(5.36)须经过变换$z=x+y$, $w=x-y$，才能化成(5.61)的形式，因此(5.37)中$V_i^*$的表达式与(5.66)中$\mu_i$的表达式很不一样。由于(5.36)的第二个方程右方不含$y^3$项，故定理5.18的结果应包含定理5.7的结果作为特例。此外，有关计算(5.61)的奇点量的文章还有文献[5.19]。

关于计算特殊三次系统奇点量公式的文章还有文献[5.17]、[5.32]与[5.18]，其中研究了方程：

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-x+a_1x^2+a_2xy+a_3y^2+a_4x^3+a_5x^2y+a_6xy^2+a_7y^3, \tag{5.67}$$

并证明当$a_1=0$时，$O(0,0)$最多只能是五阶细焦点，给出五个焦

点量的表达式。在文献[5.39]中证明了：若在 (5.67) 的第二方程右方存在 $a_7y^3$ 项，并令 $a_2=0$，则系统有可能存在 6 个小振幅环，6 是最大数目。文献[5.20]则研究了系统

$$\dot{x}=y+Cy^2+Hxy^2+Ky^3,$$
$$\dot{y}=-x+D(x^2-y^2)+Lx^3-Hx^2y+Nxy^2,$$

并给出前面六个焦点量的表达式，但第五、六个焦点量中的系数已非常大。同样，[5.32]研究了缺二次项的三次系统：

$$\dot{x}=y+ax^3+bx^2y+(c-3h)xy^2+dy^3,$$
$$\dot{y}=-x+ex^3+(f-c-3a)x^2y+(g-b)xy^2+hy^3$$

给出前六个焦点量公式，其中第五、六个焦点量的表达式也很繁，数字系数达数百万之巨。对这同一方程，[5.33]把它改写为：

$$\dot{x}=-y-b_{30}x^3-b_{21}x^2y-b_{11}xy^2-b_{03}y^3,$$
$$\dot{y}=x+C_{30}x^3+C_{21}x^2y+C_{12}xy^2+C_{03}y^3,$$

得到前面五个焦点量的比较简单的表达式，并证明这五个量都等于零是 $O(0,0)$ 为中心的充要条件。

对于最一般的三次系统 (5.58)，其奇点量的最高阶数至今尚未解决，虽然[5.14]已得出它的全部 120 个基本李不变量。但根据最近 H.Zoladek (见[5.34]) 所得三次系统细焦点可以产生 11 个小振幅极限环的结果，有理由猜测三次系统的奇点量最高是 11 阶。

请注意，对于实多项式系统，焦点量最高阶数确定系统经过小扰动以后，能由此焦点产生极限环的最多个数，但不能保证一定可以产生这么多的极限环。在文献[5.21]中提到下一事实：

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-x+a_1x^4+a_2x^3y+a_3x^2y^2-a_2xy^3+a_5y^4$$

能以 $O(0,0)$ 作为二阶或四阶细焦点，但不能以 $O$ 作为三阶细焦点。

其次，要确定系统经过小扰动以后能由过细鞍点的分界线环产生几个环，则除了鞍点量以外，还有其他因素起作用。这就是，位于分界线邻近但在鞍点的小邻域之外的轨线段。它所起的作用与鞍点量同样重要，(详见文献[5.8]与[5.12])。正是由于这一原

因，根据定理 5.7，[5.12]只能肯定方程(5.36)在其焦点 (0, 1)外围最多只能有 11 个极限环(而不是 5 个)。在文献[5.8]中的论证有不够严密之处，已在[5.40]中得到纠正。

表明上述差异的还有[5.22]中的如下定理：

**定理 5.19** 若在实二次系统(5.3)中细鞍点 $O(0, 0)$ 为二阶或三阶，即：

$$R_1=0,\ R_2\neq 0 \quad 或 \quad R_1=R_2=0,\ R_3\neq 0.$$

则(5.3)不存在闭或奇闭轨线(证明见本书§7)。

但是对实二次系统，我们最近得知(见本书§14或文献[5.23]) 过细鞍点的分界线环经过扰动有可能产生三个极限环。由定理 5.19，对这种细鞍点必须 $R_1\neq 0$，这与能产生三个极限环的细焦点相比，情况是不一样的。关于细鞍点的文章还有[5.41]。

对于某些大于 3 次的多项式系统以 $O(0, 0)$ 为中心的充要条件，以及(5.1)和

$$\dot{x}=-y+P_3(x, y),\quad \dot{y}=x+Q_3(x, y);$$
$$\dot{x}=y+P_3(x, y),\quad \dot{y}=Q_3(x, y).$$

以 $O(0, 0)$ 为等时中心的充要条件，前苏联数学家曾做了许多工作(详见文献[5.7]及[5.24]、[5.26]、[5.27])。又[5.28]最近研究了一个特殊的三次系统，证明了可由八阶细焦点经扰动而产生八个小振幅极限环。又关于 Liapunov 常数的代数性质的文章最近有 [5.29]。关于二次系统的中心条件的还有 [5.30]。关于 $n=2m$ 次多项式系统的细焦点的阶数最近还有文章[5.35]。关于焦点量计算方法的文章有[5.36]、[5.37]、[5.38]和[5.42]。

## 参 考 文 献

[5.1] Dulac H. Détermination et integration d'une certaine classe d'equations differentielles ayant pour point singulier un centre, Bull. Sci. Math. (2), 32(1908), 230~252.

[5.2] Kapteyn W. Over de middelpunten der integral krommen van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde en den eerstengraad,

Kon. Ned. Akad. Wet. Versl. 19 (1911), 1446～1457; Nieuw onderzoek omtrent de middelpunten der integralen van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde en den eersten grad, ibid, Versl, 20 (1912), 1354～1365; ibid, Versl. 21 (1912), 27～33.

[5.3] Frommer M, Über das Auftrefen vem Wirbeln und Strudeln (geschlossener und spiralieger Integralkurven) in der Umbegung rationaler Unbestimmtheitsstellen, Math, Ann, 109 (1933/34), 395～424.

[5.4] 叶彦谦等。极限环论。(再版)上海科学技术出版社，1984.

[5.5] 李承治。关于平面二次系统的两个问题。中国科学，1982, no.12, 1087～1096。

[5.6] Zhu Deming, Saddle values and integrability conditions of quadratic differential systems, Chin, Ann. of Math. 8B (4), 1987, 466～478.

[5.7] Амелкин В В, Лукашевич Н А и Садовский А П. Нелинейные калебания в системах второго порядка, Минск. Изд. БГУ им Ленина, В, И. 1982.

[5.8] Roussarie R, On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields, Bol. Soc, Bras Mat. v. 17 (1986), no. 2, 67～101.

[5.9] 蔡燧林。二次系统的细鞍点与分界线环。数学学报，30, 1987, no. 4, 553～559。

[5.10] Сибирский К С. Центроиффенно инвариантные условия центра в смысле дюлака квадратичной дифференциалной системы, ду, 22 (1986), no. 6. 954～961.

[5.11] 叶惟寅。二次系统的鞍点量公式。南京师范大学学报，1988,

[5.12] Joyal P and Rousseau C, Saddle quantities and applications, J. of Diff. Eqs. 78 (1989), 374～399.

[5.13] Zoladek H, Quadratic systems with center and their perturbations. J. Diff. Eqs. 109, (1994), 223～273.

[5.14] 刘一戎，李继彬。论复自治微分系统的奇点量。中国科学，A辑 (1989), no. 3, 245～255。

[5.15] 刘一戎。一类三次系统的奇点量公式和可积条件，M(3)≥7(预印本)。

[5.16] Садовский А П, О проблеме различения центра и фокуса, Д. У. Т, 9 (1973), no. 4, 650～659.

[5.17] Christopher C J, Lloyd N G, On the paper of Jin and Wang concerning the conditions for a centre in certain cubic systems, Bull, Lond, Math. Soc. v. 22 (1990), no. 8, 5～12.

[5.18] Lloyd N G, Pearson J M, Computing centre conditions for certain cubic systems (Preprint, 1991).

[5.19] 杨世藩，陈军。缺二次项的三次系统中心焦点的判定(预印本)。

[5.20] Lloyd N G, Blows T R, Kalenge M C, Some cubic system with several limit cycles, Nonlinearity, 1(1988), 653～669.

[5.21] Lloyd N G, The number of limit cycles of polynomial, systems in the plane, Bull.Inst.Math.Appl.24(1988): 161～165.

[5.22] Zhu Deming. A general property of the quadratic differential systems, Chin.Ann.of Math.10B(1), 1989, 26～32.

[5.23] Ye Yanqian Bifurcation diagrams of quadratic differential systems having one focus and one saddle. (Research Report of CRM, Institut d'Estudis Catalans, 1992).

[5.24] Andreev A F. Solution of the problem of centre and focus in one case, Diff.Uravn.1(1965): 333～338.

[5.25] Yang Xin'an. A survey of cubic systems, Ann.of Diff.Eqs. 7(3), 1991, 323～363.

[5.26] Lunkevich V A, Sibirskii K S. On the conditions for a centre, Diff.Uravn. 1(1965), 176～181.

[5.27] Rudenok A E. On the generation of limit cycles of two-dimensional autonomous systems with a third degree of nonlinearity, Diff. Uravn.23(1987), 825～834.

[5.28] James E N and Lloyd N G. A cubic system with eight small-amplitude limit cycles (Preprint).

[5.29] Gasull A. Algebraic properties for the Liapunov constants, (Preprint, 1992).

[5.30] Bularas D, Vulpe N I and Sibirskii K S. The problem of center in the large for a general quadratic system, Soviet Math.Dokl. v. 41(1990), no.2, 287～290.

[5.31] 刘一戎，李继彬。论复自治微分系统的奇点量。数学年刊，1990，A11 (6)，717～724.

[5.32] Blows T R and Lloyd N G. The number of limit cycles of certain polynomial differential equations, Proc. Roy. Soc. Edinb. 98A (1984), 215～239.

[5.33] Liu Yirong: Formula of focal value, condition of centre and central integral for a class of planar cubic system, Kexue Tongbao, 1987, no.2, 85～87.

[5.34] Zoladek H. The solution of the center-focus problem, Preprint, 1992.

[5.35] Bai Jingxin and Liu Yirong. A class of planar n(even number)-polynomial system with a weak focus of order $n^2-n$, Chin Sci. Bull. v.37(1992), no.19, 1590～1593.

[5.36] Kertesz V and Kooij R E. Degenerate Hopf bifurcation in

two dimensions, Nonlinear Anal, Theory and Appl. v.17 (1991), 267～283.

[5.37] 陈理、王铎, Vertesz 与 Kooij 计算 Liapunov 量公式的简单证明与公式的改进(预印本), 1992.

[5.38] Cima A, Gasull A and Mañosas F. Algebraic properties of the Liapunov constants, Preprint, 1992, Math. Dept. Univ. Aut. de Barcelona.

[5.39] Lloyd N G and Pearson J M. Conditions for a centre and the bifurcation of limit cycles in a class of cubic systems, Lect. Notes in Math. v.1455 (1989), 230～242.

[5.40] 韩茂安. 同宿异宿奇闭轨分支出极限环的个数. 中国科学 (A), v.23, 1993, no.2, 113～122.

[5.41] Tian Jinghuang. On weak singular points of quadratic systems, Res. Rep. Math. Sci., 1991, v.41, 1～13, Acad. Sinica, Chengdu, China.

[5.42] Farr W W, Li Chengzhi, Labouriau I S and Langford W F. Degenerate Hopf bifurcation formulas and Hilbert's 16th problem, SIAM J. Math. Anal., 1989, v.20, no.1, 13～30.

# §6. 积分直线、无切直线、Dulac 函数和发散量

在研究二次多项式系统极限环的不存在性和集中分布问题时，Dulac 函数法起了很重要的作用。在文献[6.1]中除了§16专门讨论这一方法以外，其他各节中还有不少的具体例子。近年来此方法的应用又有了新的发展。在构成 Dulac 函数时除了应用无切直线以外，又用到积分直线和曲线，有实的也有复的。借此不但可以证明某些方程的无环性，还可以证明极限环的唯一性，唯二性，等等。易见，用 Dulac 函数的好处是改变了发散量的表达式，从而有可能较容易证明极限环的不存在性或唯一性。另一方面，对发散量本身，除了 $(x, y)$ 平面上的表达式以外，在文献[6.2]中发现它在 $(x, 1, z)$ 和 $(1, y, z)$ 坐标系之下又有别的表达式，它们和 $(x, y)$ 平面上原来的表达式之间存在着有趣的关系。

由于 Dulac 函数法和发散量对于研究即使是二次系统的极限环问题所起的作用，迄今尚未被人们所充分了解，而此法又显然可被同样地应用于 $n\geqslant 3$ 次多项式系统中，因此，对它再作一些介绍，特别是这方面的新进展，就显得很有必要。

首先研究一直线

$$y = kx + \alpha \tag{6.1}$$

是二次系统：

$$\dot{x} = -y + \delta x + lx^2 + mxy + ny^2,\ \dot{y} = x(1 + ax + by) \tag{6.2}$$

的积分直线的条件。以 (6.1) 代入 $\dot{y} - k\dot{x} = 0$ 中，得到

$$\begin{aligned} \dot{y} - k\dot{x} = & [a + (b-l)k - mk^2 - nk^3]x^2 \\ & + (1 + b\alpha - k\delta - km\alpha + k^2 - 2nk^2\alpha)x \end{aligned}$$

$$+k\alpha(1-n\alpha)=0. \tag{6.3}$$

因此，(6.1)是(6.2)的积分直线的充要条件为：

$$a+(b-l)k-mk^2-nk^3=0, \tag{6.4}$$

$$1+b\alpha-k\delta-km\alpha+k^2-2nk^2\alpha=0, \tag{6.5}$$

$$k\alpha(1-n\alpha)=0. \tag{6.6}$$

(6.4)式表示：$k$是无限远奇点的三次方程的一个根，即(6.1)与赤道的交点$(1, k, 0)$应是无限远奇点。

要(6.6)式成立，有三种可能：

1) $k=0$，这时由(6.5)式可得$\alpha=-\frac{1}{b}$，由(6.4)式得$a=0$，于是(6.2)成为：

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\ \dot{y}=x(1+by).$$

它以直线$y=-\frac{1}{b}$或$1+by=0$为积分直线。后者通过无限远奇点$(1, 0, 0)$和$y$轴以外的其他有限奇点。

2) $\alpha=0$，这时(6.5)成为$1-k\delta+k^2=0$。故当$\delta=\frac{k^2+1}{k}$时，(6.2)有过原点的积分直线$y=kx$。对给定的$\delta$，当$|\delta|\geqslant 2$时$O(0, 0)$为结点，$k$有实值，$y=kx$是实的积分直线。当$|\delta|<2$时$O$为焦点，$k$有复值，$y=kx$是复积分直线。在每一种情况下，$y=kx$除了过$O$和无穷远奇点$(1, k, 0)$以外，还经过实或复的奇点$M\left(\frac{-1}{a+bk}, \frac{-k}{a+bk}\right)$，这是因为由(6.4)式易证$y=kx$和$1+ax+by=0$的交点必位于

$$-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2=0$$

之上，因此$M$是奇点。

特别是，当$\delta=0$时要有过$O$的积分直线，则它必为$y=\pm ix$。且由(6.4)知道，若(6.2)是实系数方程，则必须$m=-a$，$b+n=l$才行。这时(6.2)成为：

$$\dot{x}=-y+lx^2+mxy+ny^2, \dot{y}=x(1-mx+(l-n)y), \tag{6.7}$$

它有过$O$的复直线解$y=\pm ix$或点椭圆解$x^2+y^2=0$。$y=\pm ix$还

经过奇点$\left(\frac{-1}{a\pm bi}, \frac{\mp i}{a\pm bi}\right)$。类似的结果也在 [6 3] 的命题6.2中得到。

由 $1-k\delta+k^2=0$ 与(6.4)式消去 $k$，可得(6.2) 的系数所应满足的条件为[1]：

$$
\begin{aligned}
&an\delta^3+[am+bn-nl]\delta^2+[(m-a)(b-l)-n(m+3a)]\delta \\
&\quad +2n(l-b)-(b-l)^2-(m+a)^2-n^2=0。
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

当 $n=0$ 时，(6.8) 退化为：

$$am\delta^2+(a-m)(l-b)\delta-(b-l)^2-(m+a)^2=0, \quad (6.8)_{n=0}$$

或

$$\delta=\frac{(m-a)(l-b)\pm(m+a)\sqrt{(l-b)^2+4am}}{2ma}.$$

3) $a=\frac{1}{n}$：这时直线(6.1)经过奇点 $N\left(0, \frac{1}{n}\right)$。现在(6 5)成为

$$(n+b)-(n\delta+m)k-nk^2=0, \tag{6.9}$$

这表示直线(6.1)是沿 $N\left(0, \frac{1}{n}\right)$的特征方向的。如果$N$是鞍点，则(6.1)是过$N$的一条分界线，它是$N$和无限远奇点$(1, k, 0)$的连线。其上还有有限远奇点$\left(-\frac{nb}{n(a+bk)}, \frac{a+bk-k(n+b)}{n(a+bk)}\right)$。

由(6.9)与 (6.4) 式消去 $k$，可得(6.2)的系数所应满足的条件为：

$$
\begin{aligned}
&an^2\delta^3+n[(n+b)(b-l)+2ma]\delta^2 \\
&\quad +[m^2a+n(al+2ab+3an)-m(n+l)(n+b)]\delta \\
&\quad +a^2n+am(l+n)-(n+b)(l+n)^2=0。
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

以上的解法排除了 $k=\infty$ 的情况。为了补救这一点，可改求直线

$$x=hy+\beta \tag{6.11}$$

---

[1] 求二次系统存在积分直线的条件对于研究它的全局分支问题是很重要的，见本书§14和§16。

成为(6.2)的积分直线的条件。以(6.11)代入$\dot{x}-h\dot{y}=0$中，得到：

$$\begin{aligned}\dot{x}-h\dot{y}=&[-ah^3+(l-b)h^2+mh+n]y^2\\&+[-1+\delta h+2l\beta h-h^2-2a\beta h^2-b\beta h+m\beta]y\\&+(\delta\beta+l\beta^2-ah\beta^2-h\beta)=0.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{cases}-ah^3+(l-b)h^2+mh+n=0,\\-1+\delta h+2l\beta h-h^2-2a\beta h^2-b\beta h+m\beta=0,\\\delta\beta+l\beta^2-ah\beta^2-h\beta=0.\end{cases}\tag{6.12}$$

当$h\neq0$时，由(6.12)出发算得的结果显然必与前面一致，故不必细算。当$h=0$时，由(6.12)看出应有$l=-\frac{\delta}{\beta}$、$n=0$和$\beta=\frac{1}{m}$。这时(6.2)成为：

$$\dot{x}=(1-mx)(\delta x-y),\quad \dot{y}=x(1+ax+by),$$

它以$x=\frac{1}{m}$为积分直线，后者经过无穷远奇点(0, 1, 0)和有限远奇点$\left(\frac{1}{m},\ \frac{-m-a}{bm}\right)$。积分直线$x=\frac{1}{m}$和前面已得到的那些积分直线不同，它上面只有唯一的有限远奇点（另一奇点跑向无穷远）。

其次，研究发散量直线：

$$P_x+Q_y=\delta+(2l+b)x+my=0\tag{6.13}$$

在什么时候能成为积分直线？仿前，由这一条件可得：

$$l(2l+b)+\frac{n(2l+b)^3}{m^2}-(2l+b)^2+ma-b(2l+b)=0,\tag{6.14}$$

$$\frac{(2l+b)^2}{m}+\frac{2n\delta}{m^2}(2l+b)^2+m-b\delta=0,\tag{6.15}$$

$$(2l+b)\delta(m+n\delta)=0.\tag{6.16}$$

1) $\delta=0$，这时由(6.15)得$\frac{(2l+b)^2}{m}+m=0$。若(6.2)为实系数，则应有$m=2l+b=0$，从而$P_x+Q_y\equiv0$，(6.2)为可积方

程。若(6.2)不限于实系数，则应有 $2l+b=\pm im$。$P_x+Q_y=0$ 成为 $y=\pm ix$。由(6.14)知这时方程(6.2)可以取如下的形式：

$$\dot{x}=-y+lx^2\pm i(2l+b)xy+(l-b)y^2,$$
$$\dot{y}=x(1\mp i(2l+b)x+by).$$

它是(6.7)式当 $m=\pm i(2l+b)$ 时的特例。

2) $2l+b=0$：这时由(6.15)及(6.16)导出 $m=b\delta=-2l\delta$，$a=0$。而(6.2)成为：

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2-2l\delta xy+ny^2,\quad \dot{y}=x(1-2ly).$$

$2ly-1=0$ 既是积分直线，又是 $P_x+Q_y=0$ 直线，其上还有两个有限远奇点 $\left(\pm\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{2l-n}{l}},\ \frac{1}{2l}\right)$。

3) $m+n\delta=0$：这时直线(6.13)通过 $N\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$，故 $N$ 是细奇点，其特征方程为 $\lambda^2-\frac{n+b}{n}=0$。当(6.13)为实直线时，$N$ 不能是焦点，故或是 $n+b=0$，或是 $n(n+b)>0$。在前一情况，$N$ 是鞍结点，(6.13)是过 $N$ 的一条分界线；在后一情况，$N$ 是鞍点，(6.13)也是过 $N$ 的一条分界线。又此分界线通过无限远奇点

$$\left(1,\ -\frac{2l+b}{m},\ 0\right)$$

及有限远奇点

$$\left(\frac{m(n+b)}{n[b(2l+b)-ma]},\ \frac{-am-n(2l+b)}{n[b(2l+b)-ma]}\right).$$

**注 6.1**　显然，当(6.13)是实积分直线时，(6.2)不存在闭轨线。

**注 6.2**　由(6.14)、(6.15)、(6.16)消去 $m$ 与 $l$ 可得关系式：

$$\delta\sqrt{n(n+b)}+2a\sqrt{\frac{n}{n+b}}-2n+b=0。\qquad(6.17)$$

我们不知道(6.17)式有什么几何意义。

以上这种求积分直线的一般方法对于三次系统虽然理论上可行，但实际上计算起来是非常麻烦的。例如对右边缺二次项，以 $O(0,0)$ 为焦点型奇点的三次系统：

$$\dot{x}=y+Ax^3+Bx^2y+Cxy^2+Dy^3,$$
$$\dot{y}=-x+Lx^3+Mx^2y+Nxy^2+Py^3 \qquad (6.18)$$

如果求 $y=kx+\alpha$ 形式的积分直线，则代入 (6.18)，比较系数，首先可得

$$\alpha[k+Dk\alpha^2-P\alpha^2]=0,\ 从而\ \alpha=0\ 或\ \alpha^2=\frac{k}{P-Dk}. \qquad (6.19)$$

由 $\alpha=0$ 可得 $k=\pm i$，由此可导出：

$$A=-P,\ B=N=-3D,\ C=-M=3P,\ D=L, \qquad (6.20)$$

这时有积分直线 $y=\pm ix$。其次，由 $\alpha^2=\frac{k}{P-Dk}$ 可得：

$$2Dk^3+(C-2P)k^2-(D+N)k+P=0, \qquad (6.21)$$
$$3Dk^3+(2C-3P)k^2+(B-2N)k-M=0, \qquad (6.22)$$
$$Dk^4+(C-P)k^3+(B-N)k^2+(A-M)k-L=0. \qquad (6.23)$$

由其中任二式消去 $k$，可以得到(6.18) 的系数所应满足的两个关系式，但很繁。亦可由此三式求解 $k$，而得

$$k=\frac{3CL+9DP+6DM}{3PC+3AC+9D^2+6DB-3DN}.$$

但若确实知道(6.18)有一积分直线 $y=kx+\alpha(\alpha\neq0)$，则由于方程关于原点的对称性，可知 $y=kx-\alpha$ 也是积分直线。这两条积分直线共通过 6 个奇点（可能有复的或有的跑向无穷远）。(6.18) 最多还有三个不在上述两条积分直线上的奇点 $O$、$A(x_1,\ y_1)$、$B(-x_1,\ -y_1)$。$A$ 与 $B$ 的性质相同；若为焦点，则其阶数也相同。研究在这些奇点外围的极限环的存在性与个数是很有趣的，更具体的，例如

$$\dot{x}=-y+ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3,\ \dot{y}=x(1-y^2).$$

**例 6.1** 对方程

$$\dot{x}=-y+x-\frac{x^2}{2}-xy+y^2,\quad \dot{y}=x(1-3x+3y),$$

发散量直线 $1+2x-y=0$ 是积分直线，其上有细鞍点 $N(0,\ 1)$，还

有另一奇点$\left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right)$亦为鞍点。方程没有极限环。

**例 6.2** 方程

$$\dot{x}=-y+x+\frac{5}{2}x^2-4xy+4y^2,\quad \dot{y}=x\left(1+\frac{9}{4}x-3y\right)$$

的发散量直线 $1+2x-4y=0$ 也是积分直线，它通过鞍点 $N\left(0, \frac{1}{4}\right)$和另一鞍点$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{12}\right)$。方程没有极限环。

**例 6.3** 方程

$$\dot{x}=-y-3x+4x^2+3xy+y^2,\quad \dot{y}=x(1+2x+3y)$$

有过细鞍点 $N(0, 1)$ 的积分直线 $y+2x=1$，其上还有结点 $(1, -1)$。但发散量直线为 $11x+3y-3=0$，它也通过 $N$。由于 $O(0, 0)$ 也是结点，故方程无极限环。

下面研究，什么时候(6.1)是(6.2)的无切直线？为此目的，我们可以有多种选择。

1) 令(6.3)式中 $x^2$ 与 $x$ 的系数为零，则有

$$\dot{y}-k\dot{x}=k\alpha(1-n\alpha)。$$

当上式右边不为零时，(6.1) 便是(6.2)的无切直线，由(6.4)与(6.5)知 $k$ 是无限远奇点方程的根，而

$$\alpha=\frac{k^2-k\delta+1}{2nk^2+km-b}。\tag{6.24}$$

这就是文献[6.4]或[6.5]中已得到的过无穷远奇点的无切直线。在[6.5]中已证明了：当 $O(0, 0)$ 与 $N\left(0, \frac{1}{n}\right)$都是焦点时，如上所得的无切直线 $l$ 交 $y$ 轴于 $O$ 与 $N$ 之间，并且利用 $l$ 的这一性质帮助研究极限环的相对位置。由于无穷远奇点可以有三个，所以对某些方程这种无切直线可能有三条。

**例 6.4** 方程

$$\dot{x}=-y-x-6x^2+xy+y^2,\quad \dot{y}=x(1+4x-2y)\tag{6.25}$$

的无穷远奇点方程 $4x^3+4x^2-x-1=0$ 有三个实根 $x=\frac{1}{2}、-\frac{1}{2}、-1$。所对应的无穷远奇点为：

$\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$为鞍结点；$\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$为鞍点；$(-1, 1, 0)$为结点。有限远奇点为[1]：

$O(0, 0)$ 为焦点；$N(0, 1)$ 为焦点；$S\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$为鞍点。过无穷远奇点的三条无切直线为：

$$y=2x+\frac{7}{12}, \quad y+2x=\frac{3}{8}, \quad y+x=\frac{1}{3}.$$

此外，鞍点 $S\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$的分界线的两切线：

$$y+\frac{1}{2}=k_i\left(x+\frac{1}{2}\right) \quad (i=1, 2) \text{ 与 } 5k_i^2-7k_i-4=0 \tag{6.26}$$

也都是无切直线(除了$S$点以外)。

2) 令(6.3)式中的常数项与$x$的系数为零。如前，又可分为三种情况：

(a) 若$k=0$，则由(6.5)式得$\alpha=-\frac{1}{b}$，当$a\neq 0$时，有无切直线为$1+by=0$。

(b) 若$\alpha=0$，由(6.5)式得$1-kb+k^2=0$，仅当$O$为结点(即$|b|\geqslant 2$)且$k$不是(6.4)的根时(6.1)是无切直线(除$O$点外)，它过$O$而不过无穷远奇点。

(c) 若$\alpha=\frac{1}{n}$，由(6.5)式及(6.9)式知$k$为$N(0, 1)$的特征方向。当$N$为结点或鞍点且$k$不是(6.4)的根时，(6.1)是无切直线($N$点除外)。

**注 6.3** 对无切直线，当其上有一奇点时，(6.1)的轨线在奇点的两边都从同一方向穿过此直线。而对过奇点的其他直线，轨线在奇点的两边却从不同的方向穿过此直线。

3) 令(6.3)式中$x$的系数为零，并要求常数项与$x^2$项的系数同号，这时$k$与$\alpha$的取值没有一定的规则，要按具体的需要而定。

1) 有一奇点趋向无穷远而与$\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$重合，$P(x, y)$的二次项与$Q(x, y)$的二次项有公因式$(y-2x)$。

4) 取适当的 $k$ 与 $\alpha$ 使(6.3)式成为完全平方。

例 6.5 对方程 (6.25)，过鞍点 $S\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ 的两切线(6.26)都是无切直线。由(6.23)可以看出，现在(6.1)式中的

$$k=k_i,\quad \alpha=\frac{k_i-1}{2}\quad (i=1,\ 2)。$$

以之代入(6.3)式，可得：

$$(4+4k_i-k_i^2-k_i^3)x^2+\frac{1}{2}[4+k_i+3k_i^2-2k_i^3]x$$
$$+\frac{-k_i^3+4k_i^2-3k_i}{4}=0。\qquad (6.27)$$

它的判别式为：

$$\frac{1}{4}(5k_i^2-7k_i-4)^2=0,$$

根据(6.26)式。故(6.27)式为完全平方，它有重根

$$x=\frac{2k_i^3-3k_i^2-k_i-4}{4(4+4k_i-k_i^2-k_i^3)}=-\frac{1}{2}。$$

此根所对应的点正是(6.25)的鞍点 $S\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$。

5) 改以 (6.10) 代替 (6.1)，而求其为无切直线的条件。注意：$x=\mathrm{const}$ 是(6.10)的特例，但不是(6.1)的特例。

例 6.6 求 $\dot{x}=-y+\delta x+mxy-y^2,\quad \dot{y}=x(1+ax)\qquad (6.28)$
的形如 $x=\mathrm{const}$ 的无切直线。

由[6.1]中§14的定理14.1知道，当 $m\delta\leqslant 0$ 时，$x=\frac{1}{m}$ 是无切直线，在其上有 $\dot{x}=-y^2+\frac{\delta}{m}\leqslant 0$。这一事实也可由(6.11)出发证明之。

利用积分直线和无切直线来构成 Dulac 函数 $B(x,\ y)$，然后根据 $\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)$ 的表达式来判定方程在全平面或某一

平面区域中不存在闭轨线。对于二次系统，这种例子在[6.1]中已屡见不鲜，不再在此重复了。此外，在[6.1]中还有用指数函数(它是幂函数的极限形式)的，如[6.1]中§12的定理12.4。值得注意的是：在多数情况下，Dulac函数中的积分直线或无切直线往往就是不存在闭轨的区域的边界，或边界的一部分，但也不全是这样。此外，在一定条件下，Dulac定理还存在逆定理(见[6.16]、[6.17])。

**例6.7**　文献[6.1]中§16习题5)试用Dulac函数 $\dfrac{1}{x(x+y)}$ 证明

$$\dot{x}=3xy,\quad \dot{y}=y^2-2x^2-4xy+2x \tag{6.29}$$

不存在极限环。

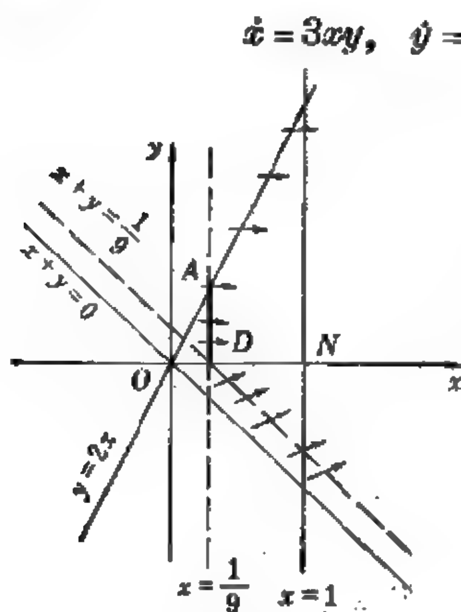



图 6.1

**证**　(6.29)有奇点 $O(0,0)$ 和 $N(1,0)$，过 $O$ 有积分直线 $x=0$，故 $O$ 外围不能有极限环。令 $B=\dfrac{1}{x(x+y)}$，则

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)=\frac{y-2x}{x(x+y)}-\frac{2}{(x+y)^2}, \tag{6.30}$$

故在 $y-2x=0$ 的上半直线(从 $O$ 开始)的右边与 $x+y=0$ 的下半直线(从 $O$ 开始)的上边这一角域中(6.30)式的右边为负。但在 $y=2x$ 的上半直线上轨线未必都从同一方向穿过。为此，令

$$U=y-2x,$$

则

$$\left.\frac{dU}{dt}\right|_{U=0}=2x(1-9x)<0 \text{ 仅当 } x>\frac{1}{9}.$$

其次，在 $x=\dfrac{1}{9}$ 上有

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}y>0 \text{ 仅当 } y>0。$$

再令 $V=x+y-\frac{1}{9}$，则

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{V=0}=\frac{15}{9}x+\frac{1}{81}>0 \text{ 当 } x>0。$$

因此，我们应取 $y=2x$ 上 $x>\frac{1}{9}$ 的部分，$x=\frac{1}{9}$ 上 $0\leqslant y<\frac{2}{9}$ 一段，即 $\overline{AD}$，以及 $x+y=\frac{1}{9}$ 上点 $D\left(\frac{1}{9}, 0\right)$ 以下的半直线来围成一个区域，在其中 (6.30) 式右方常为负，而且轨线与区域的边界相交时都从外入内，然后由 Dulac 定理即知 (6.29) 在 $N$（稳定结点）外围也不可能存在极限环。▊

以上的讨论启发我们：如果改取 $B(x, y)=\left(x-\frac{1}{9}\right)^{-1}\left(x+y-\frac{1}{9}\right)^{-2}$，则 $(BP)_x+(BP)_y$ 在 $x>\frac{1}{9}$ 时为负定，立刻可证明 $N$ 外无环。

利用无切直线作 Dulac 函数以证明不存在闭轨的，还有下面一个有趣的例子：(见文献[6.6])

**例 6.8**　证明在方程

$$\dot{x}=dx-y+bx^2+cxy+ny^2, \quad \dot{y}=x+bxy+cy^2 \qquad (6.31)$$

中若 $d=0$, $c\neq 0$；或 $d\neq 0$, $c=0$；或 $cdn>0$，则不存在绕 $O(0, 0)$ 的闭轨。

**证**　仿本节开始时的方法（但不能直接应用那里的结果，因为 (6.31) 不属于 (6.2) 的类型）可证

$$V=1-cx+(b+cd)y=0$$

是 (6.31) 的无切直线或积分直线，因为

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{V=0}=-cny^2,$$

故 $O$ 外围若有闭轨，则它应在 $cx-(b+cd)y<1$ 半平面中。现取

$B(x, y)=[1-cx+(b+cd)y]^{-3}$，则有

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)=[d+3cny^2B^{\frac{1}{3}}]B,$$

在所设的任一组条件之下，上式右边在该半平面中为定号，故不存在绕 $O$ 的闭轨。∎

类似的例子还可见文献[6.14]中命题3.7，其目的是肯定某些无界分界环的存在。此外还有文献[6.18]和[6.19]。

下面介绍应用其他形式的 Dulac 函数来证明极限环唯一性的成果。这方面的工作有[6.7]、[6.8]、[6.9]、[6.10]、[6.11]、[6.12]、[6.13]等。由于[6.13]推广了不少前面的工作，在这里只介绍[6.13]的三个定理(有些将在别处介绍)：

**定理 6.1**　设 $n$ 为奇数，$P_n(x, y)$ 与 $Q_n(x, y)$ 是 $n$ 次齐次多项式，则

$$\begin{aligned}\dot{x}&=P_n(x, y)+\alpha x(x^{n+1}+y^{n+1})=P(x, y),\\ \dot{y}&=Q_n(x, y)+\alpha y(x^{n+1}+y^{n+1})=Q(x, y)\end{aligned}\tag{6.32}$$

至多存在一个极限环。

**证**　先证 $F(x, y)=xQ_n-yP_n=0$ 是(6.32)的解。事实上，

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}P+\frac{\partial F}{\partial y}Q=&\left(Q_n+x\frac{\partial Q_n}{\partial x}-y\frac{\partial P_n}{\partial x}\right)(P_n+\alpha x(x^{n+1}+y^{n+1}))\\&+\left(x\frac{\partial Q_n}{\partial y}-P_n-y\frac{\partial P_n}{\partial y}\right)(Q_n+\alpha y(x^{n+1}+y^{n+1}))\text{。}\end{aligned}\tag{6.33}$$

对 $P_n$ 与 $Q_n$ 应用 Euler 公式，

$$x\frac{\partial Q_n}{\partial x}+y\frac{\partial Q_n}{\partial y}=nQ_n,\qquad x\frac{\partial P_n}{\partial x}+y\frac{\partial P_n}{\partial y}=nP_n\text{。}$$

由(6.33)得，

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}P+\frac{\partial F}{\partial y}Q=F(x, y)&\left[\frac{\partial P_n}{\partial x}+\frac{\partial Q_n}{\partial y}\right.\\&\left.+\alpha(n+1)(x^{n+1}+y^{n+1})\right],\end{aligned}\tag{6.34}$$

即

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}P+\frac{\partial F}{\partial y}Q\right]_{F=0}=0,$$

故 $F=0$ 是(6.32)的解。为了证明定理 6.1，不妨设 $\alpha\neq0$。今取 Dulac 函数

$$B(x, y)=\frac{1}{F(x, y)}=\frac{1}{xQ_n-yP_n}.$$

于是对(6.32)有：

$$\operatorname{div}(BP, BQ)=\operatorname{div}(BP_n, BQ_n)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\alpha x}{F}(x^{n+1}+y^{n+1})\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\alpha y}{F}(x^{n+1}+y^{n+1})\right].$$

由(6.34)式易见 $\operatorname{div}(BP_n, BQ_n)\equiv0$，从而

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(BP, BQ)&=\frac{\alpha}{F^2}\Big\{[(n+2)x^{n+1}+y^{n+1}]F\\&\quad-x\frac{\partial F}{\partial x}(x^{n+1}+y^{n+1})\Big\}\\&\quad+\frac{\alpha}{F^2}\Big\{[x^{n+1}+(n+2)y^{n+1}]F\\&\quad-y\frac{\partial F}{\partial y}(x^{n+1}+y^{n+1})\Big\}\\&=\frac{\alpha}{F^2}\Big[(n+3)(x^{n+1}+y^{n+1})F\\&\quad-(x^{n+1}+y^{n+1})\Big(x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}\Big)\Big]\\&=\frac{2\alpha}{F}(x^{n+1}+y^{n+1}).\end{aligned}\tag{6.35}$$

若 $F=0$ 的轨迹是一孤立点 $O$，则 $B$ 在双连通域 $R^2\backslash O$ 上连续，可微，定号；又(6.35)式右边亦为定号，故(6.32)在 $R^2\backslash O$ 上最多有一个极限环(见[6.1]中§1 定理 1.12)。

若 $F=0$ 的轨迹是一些过 $O$ 的直线，则它们分平面为许多单连通的角域，闭轨线要存在，只能全部位于某一角域之中，但这是不可能的，因为(6.35)式右边在每一角域中为定号($n$ 是奇数)。∎

仿此可证以下定理：

**定理 6.2** 设 $P_n(x, y)$ 与 $Q_n(x, y)$ 是 $n$ 次齐次多项式，则

$$\begin{cases} \dot{x} = P_n(x, y)(ax+by+c) + k(xQ_n - yP_n) \\ \dot{y} = Q_n(x, y)(ax+by+c) \end{cases} \quad (P_n, Q_n \text{ 如前}) \tag{6.36}$$

至多存在一个极限环。

此时如前可证 $F = xQ_n - yP_n = 0$ 是(6.36)的解。又若 $a \neq 0$，则 $ax+by+c=0$ 是无切直线。故在 $F$ 为定号的区域内极限环不与此直线相交。取

$$B(x, y) = \frac{1}{F(x, y)(ax+by+c)},$$

则

$$\operatorname{div}(BP, BQ) = \operatorname{div}\left(\frac{P_n}{F}, \frac{Q_n}{F}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{k}{ax+by+c}$$
$$= \frac{-ak}{(ax+by+c)^2}.$$

由此知：当 $n$ 为偶数时必无极限环；当 $n$ 为奇数时最多只能有一个极限环，若存在，它必包围 $O(0, 0)$，且整个位于使 $ax+by+c$ 与 $F(x, y)$ 定号的区域中。

若 $a=0$，则方程(6.36)为可积，没有极限环。∎

**定理 6.8** 若 $P_n(x, y)$ 与 $Q_n(x, y)$ 是满足条件

$$\frac{\partial P_n}{\partial x} = \frac{\partial Q_n}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P_n}{\partial y} = -\frac{\partial Q_n}{\partial x} \tag{6.37}$$

的多项式，且 $G = P_n^2 + Q_n^2 = 0$ 的轨迹是 $k$ 个孤立点，则

$$\begin{cases} \dot{x} = P_n(x, y)(ax+by+c) + m(P_n^2+Q_n^2) = P(x, y) \\ \dot{y} = Q_n(x, y)(ax+by+c) + l(P_n^2+Q_n^2) = Q(x, y) \end{cases} \tag{6.38}$$

至多存在 $k$ 个极限环。

**证** 由(6.37)式知 $\frac{1}{G}$ 是 $\dot{x} = P_n$, $\dot{y} = Q_n$ 的积分因子，故

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{G}P_n, \frac{1}{G}Q_n\right) \equiv 0.$$

现记 $L = ax+by+c$，则

$$\left.\frac{dL}{dt}\right|_{L=0}=(am+bl)(P_n^2+Q_n^2).$$

故 $L=0$ 为无切直线或积分直线。取 Dulac 函数 $B=\frac{1}{GL}$，可算出：

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(BP,\ BQ)&=\operatorname{div}\left(\frac{1}{G}P_n,\ \frac{1}{G}Q_n\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m}{L}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{l}{L}\right)\\&=\frac{-am-bl}{(ax+by+c)^2}.\end{aligned}$$

设在 $L>0$ 区域中有 $G=0$ 的 $k_1$ 个孤立点，则 $L=0$ 与 $G=0$ 的这些孤立点一起构成 $k_1+1$ 连通域，在其中最多存在 $k_1$ 个极限环。同样，若在 $L<0$ 区域中有 $G=0$ 的 $k_2$ 个孤立点，则在其中最多有 $k_2$ 个极限环。显见 $k_1+k_2\leqslant k$。▌

例 6.9 在(6.38)中取

$$a=1,\ c=l=0,\ P_n=k-kx^2+2xy+ky^2,\ Q_n=1-x^2-2kxy+y^2, \tag{6.39}$$

得到方程：

$$\left\{\begin{aligned}\dot{x}&=(k-kx^2+2xy+ky^2)(x+by)\\&\quad+(k^2+1)q[(1-x^2+y^2)^2+4x^2y^2],\\\dot{y}&=(1-x^2-2kxy+y^2)(x+by).\end{aligned}\right. \tag{6.40}$$

显见(6.37)式成立，又 $G=P_n^2+Q_n^2=0$ 的轨迹只有两点：$A_1(1,\ 0)$ 与 $A_2(-1,\ 0)$。由定理 3 知(6.40)最多存在两个极限环。不难证明：当 $k=0$ 而 $q>0$ 时，$A_1$ 是稳定细焦点；$A_2$ 是不稳定细焦点。取 $k<0$ 但 $|k|\ll 1$，则可证 $A_1$ 成为不稳定粗焦点；$A_2$ 成为稳定粗焦点，因此 $A_1$ 与 $A_2$ 外围都将出现极限环。

以上我们看到，应用 Dulac 函数可以改变发散量的形式，而使证明极限环的不存在或唯一性更为方便。[6.2] 注意到：当引进 $(1,\ y,\ z)$ 坐标或 $(x,\ 1,\ z)$ 坐标以研究轨线在赤道附近的性态时，$\operatorname{div}=0$ 已不是由原来的(6.13)式所导出的方程

$$\delta z+(2l+b)+my=0 \quad 或 \quad \delta z+(2l+b)x+m=0. \tag{6.41}$$

具体计算如下：由(6.2)化为齐次坐标，得到：

$$\begin{cases} z\dot{x} - x\dot{z} = -yz + \delta xz + lx^2 + mxy + ny^2, \\ z\dot{y} - y\dot{z} = xz + ax^2 + bxy. \end{cases} \tag{6.42}$$

在(6.42)中令 $x=1$, $\dfrac{dt}{d\tau}=z$, 得到:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{d\tau} = z(yz - \delta z - l - my - ny^2) = S(y, z), \\ \dfrac{dy}{d\tau} = z + a + by + y(yz - \delta z - l - my - ny^2) = R(y, z). \end{cases} \tag{6.43}$$

计算(6.43)的发散量,得到:

$$\operatorname{div}\Big|_{(y,z)} = \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial y} = -4ny^2 - 3my + 4yz - 3\delta z + b - 2l. \tag{6.44}$$

其次, 在(6.42)中令 $y=1$, $\dfrac{dt}{d\tau}=z$, 得到

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{d\tau} = z(-xz - ax^2 - bx), \\ \dfrac{dx}{d\tau} = -z + \delta xz + lx^2 + mx + n + x(-xz - ax^2 - bx). \end{cases} \tag{6.45}$$

仿前,计算(6.45)的发散量,得到:

$$\operatorname{div}\Big|_{(x,z)} = -4ax^2 + (2l - 3b)x + m - 4xz + \delta z. \tag{6.46}$$

如果记: $\overline{P}(x, y, z) = -yz + \delta xz + lx^2 + mxy + ny^2$,

$$\overline{Q}(x, y, z) = xz + ax^2 + bxy, \tag{6.47}$$

即 $P$ 与 $Q$ 的齐次化多项式,并且把(6.44)与(6.46)也齐次化:

$$\operatorname{div}\big|_{(6.44)} = -4ny^2 - 3mxy + 4yz - 3\delta xz + (b - 2l)x^2, \tag{6.48}$$

$$\operatorname{div}\big|_{(6.46)} = -4ax^2 + (2l - 3b)xy + my^2 - 4xz + \delta yz. \tag{6.49}$$

则立刻看出,(6.48)式右端可改写为:

$$x(\overline{P}_x + \overline{Q}_y) - 4\overline{P}, \tag{6.50}$$

而(6.49)式右边可以改写为：

$$y(\bar{P}_x+\bar{Q}_y)-4\bar{Q}. \tag{6.51}$$

由此即见：在 $(1, y, z)$ 坐标下，发散量等于零的轨迹是一条二次曲线：

$$b-2l-3my-3\delta z+4yz-4ny^2=0, \tag{6.52}$$

它又可写为：

$$[x(\bar{P}_x+\bar{Q}_y)-4\bar{P}]_{x=1}=0. \tag{6.53}$$

又在 $(x, 1, z)$ 坐标下，发散量等于零的轨迹是另一条二次曲线：

$$m+\delta z+(2l-3b)x-4xz-4ax^2=0, \tag{6.54}$$

或即

$$[y(\bar{P}_x+\bar{Q}_y)-4\bar{Q}]_{y=1}=0. \tag{6.55}$$

最后，在 $(x, y, 1)$ 坐标下，发散量等于零的轨迹(6.13)现在可以改写为

$$[z(\bar{P}_x+\bar{Q}_y)]_{z=1}=0. \tag{6.56}$$

**定理 6.7** 如果(6.53)、(6.55)、(6.56)三式中有某两个为恒等，则(6.2)或为可积，或无极限环。(见文献[6.2])

**证** 为计算方便起见，不妨设(6.2)中的系数 $b=-1$。今设(6.53)与(6.55)恒等，即有

$$x(\bar{P}_x+\bar{Q}_y)-4\bar{P}\equiv k[y(\bar{P}_x+\bar{Q}_y)-4\bar{Q}], \tag{6.57}$$

或

$$\begin{aligned}&3\delta xz-4yz+(2l+1)x^2+3mxy+4ny^2\\&\equiv k[4xz-\delta yz+4ax^2-(2l+3)xy-my^2].\end{aligned}$$

由此得：

$$\frac{3\delta}{4}=\frac{-4}{-\delta}=\frac{2l+1}{4a}=\frac{3m}{-(2l+3)}=\frac{4n}{-m}=k.$$

故 $k\neq 0$, $k\neq\infty$，且有

$$\delta=\pm\frac{4}{\sqrt{3}},\quad k=\pm\sqrt{3},\quad a=\pm\frac{1+2l}{4\sqrt{3}},$$

$$m=\mp\frac{2l+3}{\sqrt{3}},\quad n=\frac{3+2l}{4}. \tag{6.58}$$

这样，(6.2)成为(其中 $b=-1$)：

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \pm \dfrac{4}{\sqrt{3}}x + lx^2 + \dfrac{2l+3}{4}y^2 \mp \dfrac{2l+3}{\sqrt{3}}xy, \\ \dot{y} = x\left(1 \pm \dfrac{1+2l}{4\sqrt{3}}x - y\right). \end{cases} \tag{6.59}$$

当 $\dfrac{4}{2l+3} > 1$ 即 $N\left(0,\ \dfrac{4}{2l+3}\right)$ 是非鞍点时，可再作变换：

$$x = -\sqrt{\frac{3+2l}{1-2l}}\,u,\quad y = v \pm \frac{4}{3+2l},\quad t = \sqrt{\frac{3+2l}{1-2l}}\,\tau, \tag{6.60}$$

(6.59)变为：

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = -v + \dfrac{l(3+2l)}{2l-1}u^2 \mp \dfrac{3+2l}{\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{3+2l}{1-2l}}\,uv \mp \dfrac{3+2l}{4}v^2, \\ \dfrac{dv}{d\tau} = u\left[1 \pm \dfrac{(1+2l)(3+2l)}{4\sqrt{3}(1-2l)}\sqrt{\dfrac{3+2l}{1-2l}}\,u + \dfrac{3+2l}{1-2l}v\right]. \end{cases} \tag{6.61}$$

而 $N\left(0,\ \pm\dfrac{4}{3+2l}\right)$ 变为 (6.61) 的原点 $O'(0,0)$。不难验证对(6.61)有：

$$\overline{W}_1 = \overline{W}_2 = \overline{W}_3 = 0, \tag{6.62}$$

即 $O'$ 为(6.60)的中心，从而(6.2)在 $O$ 外围无极限环[1]。

其次，设(6.53)与(6.56)恒等。则有一种可能是 $\overline{P} \equiv 0$，这时(6.2)显然为可积。第二种可能是：$P$ 可被 $P_x + Q_y$ 整除，即：

$$-y + \delta x + lx^2 + mxy + ny^2 \equiv (\delta + (2l-1)x + my)(\alpha x + \beta y + \gamma).$$

由此可导出：

$$\gamma\delta = 0,\ m\beta = n,\ (2l-1)\alpha = l,\ m = m\alpha + \beta(2l-1),$$
$$m\gamma + \delta\beta = -1,\ \delta = \delta\alpha + \gamma(2l-1).$$

i) 设 $\gamma = 0$，则由以上诸恒等式，可得：

$\alpha = 1,\ l = 1,\ \beta = -\dfrac{1}{\delta},\ m + n\delta = 0,\ \beta = 0$。导出矛盾。

ii) 设 $\delta = 0$，则：

---

1) 判别可积的条件(6.62)当 $N$ 为鞍点或(6.60)为复变换时仍然有效。

$$\gamma=-\frac{1}{m},\ l=\frac{1}{2},\ \alpha=1,\ l=0。导出矛盾。$$

故$P$不可能被$P_x+Q_y$所整除。

最后，设(6.55)与(6.56)恒等。如前，若$Q\equiv 0$，则(6.2)为可积。若$Q$可被$P_x+Q_y$整除，即：

$$x(1+ax-y)\equiv(\delta+(2l-1)x+my)(\alpha x+\beta y+\gamma)\text{。}$$

则有：

$$\gamma\delta=0,\ \alpha\delta+\gamma(2l-1)=1,\ \beta\delta+m\gamma=0,\ \alpha(2l-1)=a,$$
$$m\beta=0,\ \alpha m+\beta(2l-1)=-1\text{。}$$

i) 若$\gamma=0$，则$\alpha=\frac{1}{\delta}$，$a=\frac{2l-1}{\delta}$，$\beta=0$，$m=-\delta$，而(6.2)成为：

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2-\delta xy+ny^2,\ \dot{y}=x\left(1+\frac{2l-1}{\delta}x-y\right).\tag{6.63}$$

由于(6.63)的发散量直线$\delta+(2l-1)y-\delta y=0$就是水平等倾线的一部分，故(6.63)既无绕$O(0,0)$或$N\left(0,\frac{1}{n}\right)$的极限环（若存在，它只能与$x=0$相遇，不能与$1+\frac{2l-1}{\delta}x-y=0$相遇），亦无绕$1+\frac{2l-1}{\delta}x-y=0$上的奇点的极限环（因为发散量直线通过两个细奇点，故不存在极限环）。

ii) 若$\delta=0$，$\gamma\neq 0$，则$m=0$，$\beta=\frac{1}{1-2l}$，$\alpha=\frac{a}{2l-1}$，$\gamma=\frac{1}{2l-1}$。熟知的是：

$$\dot{x}=-y+lx^2+ny^2,\quad \dot{y}=x(1+ax-y)$$

或是有中心$\left(当\ a=0\ 或\ l=\frac{1}{2}\right)$，或是没有极限环。定理证毕。■

同(6.13)对于方程(6.2)一样，(6.52)与(6.54)应该对方程(6.43)与(6.45)的定性研究有用处，但这方面的研究迄今还未见到过。

**注 6.4**　当(6.13)是(6.2)的积分直线时，(6.52)或(6.54)不一定是(6.43)或(6.45)的积分曲线，例如对方程(6.20)，发散量曲线(6.54)是

$$F(x,\ z)=12x^2-4xz+z-10x-1=0.$$

(6.45)成为：

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= 1-x-z+xz-\frac{7}{2}x^2-x^2z+3x^3=R(x,\ z), \\ \frac{dz}{d\tau} &= z(-3x-xz+3x^2)=S(x,\ z), \end{aligned} \tag{6.64}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}R+\frac{\partial F}{\partial z}S &= 72x^4+4x^2z^2-36x^3z+48x^2z-4xz^2-114x^3 \\ &\quad +11x^2-30xz+4z^2+34x+6z-10. \end{aligned} \tag{6.65}$$

如果 $F(x,\ z)=0$ 是(6.64)的积分曲线，则(6.65)式右端应能被 $F(x,\ z)$ 所整除。但易见 $x=1,\ z=\frac{1}{3}$ 在 $F=0$ 上，却不能使(6.65)式的右端等于零，这说明 $F(x,\ z)=0$ 不是(6.64)的积分曲线。

最后介绍无切直线族的包络及其对极限环问题的应用。下面仅就方程

$$\dot{x}=-y+x(x^2+y^2-1), \quad \dot{y}=x+y(x^2+y^2-1) \tag{6.66}$$

来说明其求法和用处。设直线(6.1)是(6.66)的无切直线(可能除一点以外)，则在(6.1)上有

$$\begin{aligned} \dot{y}-k\dot{x} &= \alpha(1+k^2)x^2+(1+2k\alpha^2+k^2)x+\alpha(k+\alpha^2-1) \\ &\geqslant 0(\leqslant 0). \end{aligned} \tag{6.67}$$

现要求(6.67)式右端成为完全平方，其条件是：

$$k^4+(2+4x^2)k^2+1+4\alpha^2(1-\alpha^2)=0. \tag{6.68}$$

由此解得：

$$k^2=2(\sqrt{2}-1)\alpha^2-1, \tag{6.69}$$

代入(6.1)式，得

$$y=\sqrt{2(\sqrt{2}-1)\alpha^2-1}\,x+\alpha. \tag{6.70}$$

将(6.70)对 $\alpha$ 求导，得：

$$\frac{-2\alpha+2\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{2(\sqrt{2}-1)\alpha^2-1}}x+1=0,$$

从而

$$x=\frac{\sqrt{2(\sqrt{2}-1)\alpha^2-1}}{(2-2\sqrt{2})\alpha}.$$

代入(6.70)，得

$$y=\frac{-1}{2\alpha(1-\sqrt{2})}.$$

于是

$$x^2+y^2=\frac{2(\sqrt{2}-1)\alpha^2-1+1}{(2-2\sqrt{2})^2\alpha^2}=\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}. \qquad (6.71)$$

这就是无切直线族(6.70)的包络。它是以 $O(0,0)$ 为中心，而半径大于1的圆。显见，(6.71)与(6.70)的切点不是(6.70)与(6.66)的轨线的切点，否则，(6.71)将成为(6.66)的积分线，这是不可能的。不难看出，(6.66)的轨线都从此圆的内部转向外部。另一方面，$O(0,0)$ 是(6.66)的稳定焦点。因此在圆(6.71)内部存在极限环。实际上，它就是单位圆 $x^2+y^2=1$。

以上是我们所能找到的最凑巧的一个例子。对于二次系统，即使是$(\mathrm{I})_{n=0}$或$(\mathrm{II})_{m=n=0}$这样简单的方程，按上法作时，或是与(6.68)相当的方程不能就 $k$ 或 $\alpha$ 解出，或是由直线族求包络时，出现困难，以致无法得知包络曲线的形状。注意：给(6.67)加上其他附加条件(如令常数项与 $x$ 的系数同时为零，或令 $x^2$ 与 $x$ 的系数同时为零)，都不可能得到一族的无切直线。但是对(6.66)以外的其他方程，这样做也许是有效的。

最后应提到，当(6.2)满足条件 $n(n+b)<0$ 时，$1+ax+by=0$ 与 $y$ 轴交于 $O$ 与 $N\left(0,\frac{1}{n}\right)$ 之间。这时为了研究 $O$ 与 $N$ 外围能否同时存在极限环，可以取 Dulac 函数为 $\frac{1}{1+ax+by}$，(见文献[6.15]，其中所得的一部分结果已见于文献[6.5])。此外，近年来对计算机掌握得较好的数学家也用计算机来帮助求 Dulac 函数，例如见本书 §17 中 R.Kooij 的例 17.3 和他的其他论文。

# 参 考 文 献

[6.1] Ye Yanqian and others. Theory of limit cycles, Trans. Math. Monographs, v.66, AMS. (1986).

[6.2] Ye Yanqian. Divergence and uniqueness of limit cycles of a quadratic differential system, Ann. of Diff. Eqs. 6(1), 1990, 117~122.

[6.3] Schlomiuk D. Algebraic particular integrals, integrability and the problem of center (to appear in Trans, AMS).

[6.4] Cherkas L A. Bifurcation of limit cycles of a quadratic system with variation of the parameter rotating the field, Diff. Uravn. 17, no.11 (1981), 2002~2016.

[6.5] 张平光。二次系统极限环的集中分布及唯一性问题(预印本)。

[6.6] Coppel W A. Quadratic systems with a critical point of higher multiplicity, Research Report 24(1988), Dept. Math. IAS, The Australian National University.

[6.7] Bautin N N. On the theory of Synchronization, J. of Tech. Physics, 9(1939), 510~515.

[6.8] Suo Guangjian, Chen Yongshau. The real quadratic system with two conjugate imaginary straight line solutions, Ann. of Diff. Eqs. 2(1986), 197~207.

[6.9] Suo Guangjian. Quadratic systems having two real or complex conjugate straight line solutions, Jilin Teachers College Journal, 1(1986), 1~2.

[6.10] Shen Boqian and Suo Guangjian. The system $\dot{x}=-ax-by+\sum_{i+j=2} a_{ij}x^iy^j$, $\dot{y}=cx+dy$ with two real or imaginary straight line solutions, J. of Liaoning Normal Univ 1(1987).

[6.11] Chen Yongshau. An application of Dulac function, Journ. of Huanan Normal Univ. (1984), 94~99.

[6.12] Suo Guangjian, Shen Boqian. The system $\dot{x}=y$, $\dot{y}=x(1-x^2)+M(\alpha-x^2)y$, $(M>0,\ \alpha>2)$ possesses at most one limit cycle containing three critical points., J. Math. Res. Exp. 1(1987).

[6.13] Suo Guangjian, Shen Boqian. Use Dulac function method to estimate the upper bound of the number of limit cycles for certain polynomial systems, Ann. of Diff. Eqs. 3(2), 1987, 185~197.

[6.14] Dumortier F, Roussarie R and Rousseau C. Hilbert 16th problem for quadratic vector fields (Preprint, 1991).

[6.15] 徐思林。二次系统极限环的不存在性。数学研究与评论，1992.

[6.16] 陈翔炎。旋转向量场理论的应用 (I). 南京大学学报，1963, no.1; 19～25.

[6.17] 叶彦谦。极限环论(初版)(§3). 上海科学技术出版社，1965.

[6.18] 吕启龙。二次系统极限环的不存在性。吉林大学自然科学学报，1987, no.1; 17～22.

[6.19] Ye Yanqian. Qualitative theory of the quadratic differential systems(I), Preprint, 1994.

# §7· 奇点的指标与次数、闭轨的相对位置、奇闭轨

关于二次系统的闭轨的相对位置问题，如果不计个数，则此问题早已解决了（见文献[7.1]）。即：闭轨只能套在同一焦点或中心外围，或分别套在两个不同的焦点或中心外围，其他的相对位置如  和  都不可能存在。如果还要考虑个数，则已知(1, 0)、(2, 0)、(3, 0)、(1, 1)、(1, 2)、(1, 3)等极限环分布都是可能的。但(2, 2)分布不可能(很难证明)，而(0, 4)分布与(2, 3)分布是否可能，迄今还不清楚。至于三次系统，有李继彬、李存富、黄其明等用扰动对称 Hamilton 系统的方法曾得到多种极限环的不同分布方式(本节只作简介，详细介绍在 §15)，其中最多可以出现 11 个极限环，但由此看不出普遍规律。

对多项式系统的闭轨的相对位置问题（不计个数），近年来 A.Cima 与 J.Llibre(见文献[7.2])利用相交数、奇点的次数与指标的性质为工具，引进闭轨的扇(fan)与巢(nest)的概念，得到许多关于扇与巢的一般性结果，并用以解决 (1, 3)、(2, 3)、(3, 3)型多项式系统[1)]最多可能有多少个最大巢的问题，在闭轨的相对位置问题上可说是迈出了较大的一步。本节主要介绍文献 [7.2] 的工作，顺便在最后再介绍国内外对二次系统的奇闭轨的研究动态。

假设已给多项式系统：

$$\dot{x}=P_n(x,\ y),\quad \dot{y}=Q_m(x,\ y), \tag{7.1}$$

1) 系统$\dot{x}=P_n(x,y)$，$\dot{y}=Q_m(x,y)$，其中 $P_n$、$Q_m$ 分别为 $n$ 次与 $m$ 次多项式，称为$(n,m)$型多项式系统。

其中 $P_n$、$Q_m$ 分别为 $n$ 与 $m$ 次多项式，不妨设 $n\geqslant m$，假设(7.1)只有孤立奇点(即 $P_n$ 与 $Q_m$ 没有除常数以外的公因子)，且 $O(0, 0)$ 是奇点之一。设

$$P_n(x, y)=\bar{P}_k(x, y)+h.o.t.,$$
$$Q_m(x, y)=\bar{Q}_k(x, y)+h.o.t. \tag{7.2}$$

其中 $\bar{P}_k$ 与 $\bar{Q}_k$ 是 $x$、$y$ 的 $k$ 次齐次式，且 $\bar{P}_k^2+\bar{Q}_k^2\neq 0$，则称(7.1)在奇点 $O$ 的次数为 $k(\geqslant 1)$。易见有以下引理成立：

**引理 7.1** 设 $O$ 是(7.2)的 $k$ 次孤立奇点，则(7.2)在 $O$ 的指标满足 $|i|\leqslant k$。

为证明引理，只须注意，若 $\bar{P}_k\neq 0$，则实代数曲线 $P_n(x, y)=0$ 最多有 $2k$ 个实分支从 $O$ 出发。今作一个以 $O$ 为中心的小圆 $C$，沿此圆按 Poincaré 的古典方法计算 $O$ 的指标，应有

$$i=\frac{1}{2}(p-q),$$

其中 $p$ 表示沿 $C$ 逆时针移动而经过与 $P_n=0$ 的分支的交点时，轨线的斜率从 $-\infty$ 跳到 $+\infty$ 的次数，而 $q$ 表示斜率从 $+\infty$ 跳到 $-\infty$ 的次数。但 $p+q\leqslant 2k$，因此

$$|i|=\left|\frac{p-q}{2}\right|\leqslant\frac{2k}{2}=k.$$

仿此可证以下引理：

**引理 7.2** 设 $(1, y_0, 0)$ 是(7.1)的一个无限远奇点，若 $y_0$ 是 $Q_m(1, y)-yP_n(1, y)=0$ 的 $k$ 重根，又 $(1, y_0, 0)$ 的指标为 $i$，则 $|i|\leqslant k$。

关于(7.1)的有限远奇点的指标总和的问题，早在文献[7.3]中已得到解决，后来在文献[7.4]、[7.2]、[7.5]中又各自独立地解决了。下面介绍[7.5]中的结果如下：

**定理 7.1** 设方程(7.1)有最多个数的 $nm$ 个初等奇点，则其中指标为 $+1$(或 $-1$)的奇点的最多个数为：

$$S_{n,m}=\frac{nm}{2}+\frac{1+(-1)^{n+m}}{4}\min(n, m). \tag{7.3}$$

**证** 以 $\bar{P}_n$ 与 $\bar{Q}_m$ 分别记 $P_n$ 与 $Q_m$ 中的齐 $n$ 次与齐 $m$ 次部

分。先设 $\bar{P}_n(x, y)$ 与 $\bar{Q}_m(x, y)$ 没有公因式，则

$$\frac{dx}{dt}=\bar{P}_n(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=\bar{Q}_m(x, y) \tag{7.4}$$

是只有唯一孤立奇点 $O(0,0)$ 的齐 $(n, m)$ 型多项式系统。根据[7.6]的定理5.2，(7.1) 在一切有限远奇点的指标的总和等于 (7.4) 在 $O$ 的指标 $J(\bar{P}_n, \bar{Q}_m)$，而后者由文献[7.6]中定理4.1与4.2知有

$$J(\bar{P}_n, \bar{Q}_m)\begin{cases}=0, \text{ 当 } m+n \text{ 为奇数；}\\ \leqslant\min(n, m), \text{ 当 } m+n \text{ 为偶数。}\end{cases} \tag{7.5}$$

于是有：

$$\sum_i \operatorname{ind}.O_i\Big|_{(1)}=J(\bar{P}_n, \bar{Q}_m)\leqslant\frac{1+(-1)^{n+m}}{2}\cdot\min(n, m). \tag{7.6}$$

今设(7.1)有 $a_i$ 个有限远奇点具有指标 $i(i\geqslant1)$，$b_j$ 个有限远奇点具有指标 $-j(j\geqslant1)$，则(7.6)式可写为：

$$\sum ia_i+\sum(-j)b_j\leqslant\frac{1+(-1)^{n+m}}{2}\min(n, m). \tag{7.7}$$

由引理7.2以及"有限远奇点的重数之和 $\leqslant nm$"即得

$$a_1-(nm-a_1)\leqslant a_1-\sum jb_j\leqslant\sum ia_i$$
$$+\sum(-j)b_j\leqslant\frac{1+(-1)^{n+m}}{2}\min(n, m).$$

从而由此可解出指标为 $+1$ 的奇点的个数为：

$$S_{n,m}=a_1\leqslant\frac{nm}{2}+\frac{1+(-1)^{n+m}}{4}\min(n, m). \tag{7.8}$$

当 $\bar{P}_n$ 与 $\bar{Q}_m$ 有公因式时可将方程(7.1)作微小扰动，而使扰动后的 $\bar{P}'_n$ 与 $\bar{Q}'_m$ 没有公因式，但奇点的指标不变。故(7.8)式仍成立。

另一方面由以下例子可知(7.8)中的等式是可以成立的。

**例 7.1** $\dot{x}=\prod_{i=1}^{n}[y-(2i-1)(x+1)]$，$\dot{y}=\prod_{k=1}^{m}(y-2kx)$

的指标为 $+1$ 的奇点恰有 $\frac{nm}{2}+\frac{1+(-1)^{n+m}}{4}\min(n, m)$ 个（可仿§3定理3.16证明）。从而定理7.1得证。

**系 7.1** 设 $n\geqslant m$，则(7.3)可改写为：

$$S_{n,m}=\begin{cases}\dfrac{m(n+1)}{2}, & 当\ n\equiv m(\mathrm{mod}.2);\\[2mm] \dfrac{nm}{2}, & 当\ n\not\equiv m(\mathrm{mod}.2).\end{cases}$$

**定理 7.2** 设(7.1)只有孤立奇点，则其有限远奇点的指标总和满足关系式：

1) $\left|\sum i\right|\leqslant\min(n,\ m)$；

2) $\sum i=0$ 当 $n\not\equiv m(\mathrm{mod}.2)$；

3) $\sum|i|\leqslant nm$，

其中 $i$ 表示任一奇点的指标。

当一切有限远奇点都是单奇点，且奇点总数 $=nm$ 时，由定理 7.1 立刻可推出定理 7.2。因为这时有 $\sum\limits_{|i|=1}|i|=nm$，并且将

$$\sum_{i>0}i=\sum_{i=1}i=\frac{nm}{2}+\frac{1+(-1)^{n+m}}{4}\min(n,\ m),$$

$$\sum_{i<0}i=\sum_{i=-1}i=-nm+\left(\frac{nm}{2}+\frac{1+(-1)^{n+m}}{4}\min(n,\ m)\right)$$

相加即可得：

$$\sum_i i=2\cdot\frac{1+(-1)^{n+m}}{4}\min(n,\ m)$$

$$\begin{cases}=\min(n,\ m), & 当\ n\equiv m(\mathrm{mod}.2);\\ =0, & 当\ n\not\equiv m(\mathrm{mod}.2).\end{cases}$$

一般情况的证明可由此以及引理 7.1 得到。

**定理 7.3** 设 $a$ 是(7.1)的一个孤立奇点，$i$ 与 $I$ 分别为(7.1)在 $a$ 的指标及 $P_n=0$ 与 $Q_m=0$ 在 $a$ 的相交数[1)]，则 $I\geqslant|i|^2$。

**证** 设(7.1)在 $a$ 的次数为 $k$，则由相交数的性质知有 $I\geqslant k^2$。再由引理 7.1 即得 $I\geqslant|i|^2$。

**定理 7.4** 设在(7.1)中有 $n\geqslant m$，且 $O(0,\ 0)$ 为(7.1)的孤立奇点，若有一系闭轨 $O\subset C_1\subset C_2\subset\cdots\subset C_{n+1}$，使 $C_i$ 与 $C_{i+1}$ 有相反

1) 两代数曲线的相交数的定义见文献 [7.7] 或 [7.8]。对于某些特殊的非代数曲线，也可以定义相交数，见文献[7.9]。

的定向，则必 $k \leqslant \frac{m-1}{2}$。特别是，若 $n=m$ 为奇数，又 $k=\frac{n-1}{2}$，则在 $C_{k+1}$ 外部有 $\frac{d\theta}{dt} \neq 0\left(\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$，又 (7.1) 在无限远没有奇点。

**证** 在定理的假定之下，(7.1)所定义的向量场在每一过 $O$ 的直线上至少有 $2k+1$ 次方向逆转。例如，$k=1$ 时，有如图 7.1 所示的至少三次方向逆转。这表示对每一 $\theta=\theta_0$，$F(\gamma)=0$ 与 $G(\gamma)=0$ 各至少有 $k$ 个正实根。这里

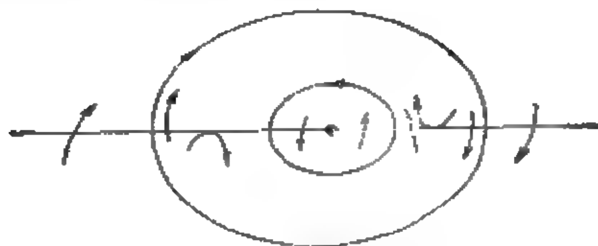


图 7.1

$$F(\gamma)=\dot\theta|_{\theta=\theta_0}, \quad G(\gamma)=\dot\theta|_{\theta=\theta_0+\pi}.$$

由于 $F(\gamma)=0$ 当且仅当 $G(-\gamma)=-F(\gamma)=0$ 而知

$$F(\gamma)=g_1(\theta)+g_2(\theta)\gamma+\cdots+g_n(\theta)\gamma^{n-1}$$

至少有 $2k$ 个实根，其中 $k$ 个为正根，$k$ 个为负根，注意

$$g_i(\theta)=-\sin\theta P_i(\cos\theta, \sin\theta) \text{对} i=m+1, \cdots, n.$$

故若取 $\theta_0$ 使 $\sin\theta_0=0$，则 $F(\gamma)$ 是 $\gamma$ 的 $m-1$ 次多项式。由此得 $2k \leqslant m-1$，从而 $k \leqslant \frac{m-1}{2}$。

若 $n=m$，$k=\frac{n-1}{2}$，则在每一过 $O$ 的直线上恰有 $k$ 次方向逆转。若 $\dot\theta=0$ 在 $C_{k+1}$ 外部一点 $p$，过 $p$ 的射线为 $\theta=\theta_0$，则此射线上至少有 $n+1$ 个与轨线相切之点，导致矛盾。若此时 $X$ 有一无穷远奇点，则 $g_n(\theta)=0$ 对某 $-\theta_0$，于是 $F(\gamma)$ 至多有 $n-2$ 个实根。仍有矛盾。定理证毕。∎

今设 $C$ 是(7.1)的一个极限环。以 $\text{Int}(C)$ 记 $C$ 的内部区域。$\text{Int}(C)$ 中所含奇点的集合记为 $s(C)$，$\text{Int}(C)$ 中指标 $+1$ 的奇点

集合记为 $s_+(C)$。

**定义 7.1** 两极限环 $C_1$ 与 $C_2$ 称为 $f$ 等价，如果 $s(C_1)=s(C_2)$，一切 $f$ 等价的极限环的全体称为一个扇 (fan)，以 $\bar{C}$ 记一切与 $C$ 为 $f$ 等价的极限环全体所成的扇。定义 $s(\bar{C})=s(C)$。

**定义 7.2** 设 $\bar{C}_1$ 与 $\bar{C}_2$ 为两个扇，称 $\bar{C}_1\prec\bar{C}_2$，当且仅当 $s(\bar{C}_1)\subset s(\bar{C}_2)$（真子集）。显见"$\prec$"是一顺序关系。

**定义 7.3** $\bar{C}$ 中最小的极限环的内域记为 $L(\bar{C})$，$\bar{C}$ 中最大的极限环的内域记为 $U(\bar{C})$。

**定义 7.4** 称 $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, $\cdots$, $\bar{C}_k$ 构成一相应于 $\bar{C}$ 的长度为 $k$ 的链，如果

$$\bar{C}_1\prec\bar{C}_2\prec\cdots\prec\bar{C}_k=C.$$

称 $\bar{C}$ 为 $k$ 阶扇，如果存在一个相应于 $\bar{C}$ 的长度为 $k$ 的链，并且任何其他相应于 $\bar{C}$ 的链的长度都不超过 $k$。

**定义 7.5** 两极限环 $C_1$ 与 $C_2$ 称为 $n$ 等价，当且仅当 $s(C_1)\subset s(C_2)$ (或 $s(C_2)\subset s(C_1)$) 又不存在其他的极限环 $C_3\neq C_1$ (或 $C_2$)，使 $C_3\subset\mathrm{Int}(C_2)\setminus\mathrm{Int}(C_1)$ (或 $C_3\subset\mathrm{Int}(C_1)\setminus\mathrm{Int}(C_2)$)。一切 $n$ 等价的极限环全体称为一个巢 (nest)。以 $\tilde{C}$ 记一切与 $C$ 为 $n$ 等价的极限环全体所成的巢。定义 $s(\tilde{C})=s(C)$。其中 $C$ 是巢 $\tilde{C}$ 中的最大极限环。

$L(\tilde{C})$、$U(\tilde{C})$ 以及 $k$ 阶巢的定义都和扇的情况相类似。

**注 7.1** $f$ 等价必为 $n$ 等价，反之则不一定。

**注 7.2** $n$ 等价的两极限环内部所含的奇点个数可能不同。

**注 7.3** 若 $\tilde{C}$ 为 $k$ 阶巢，且

$$\tilde{C}_1\prec\tilde{C}_2\prec\cdots\prec\tilde{C}_k=\tilde{C}$$

为一相应的最长链，则对每一 $i=1, 2, \cdots, k-1$ 必至少存在一极限环 $C\in L(\tilde{C}_{i+1})\setminus U(\tilde{C}_i)$。

图 7.2 中的两图可以帮助弄清楚极限环的扇与巢的概念。图 7.2(a) 中只有一个巢，它的阶是 1；但却有 3 个扇，其中 $C_1$ (或 $C_2$)、$C_3$ (或 $C_4$) 与 $C_5$ 定义不同的扇。图 7.2(b) 中 $\tilde{C}$ 是一个 4 阶巢，而 $\bar{C}$ 是一个五阶扇。在 $C$ 内部有长度为 4 的巢链，但也有长度为 2

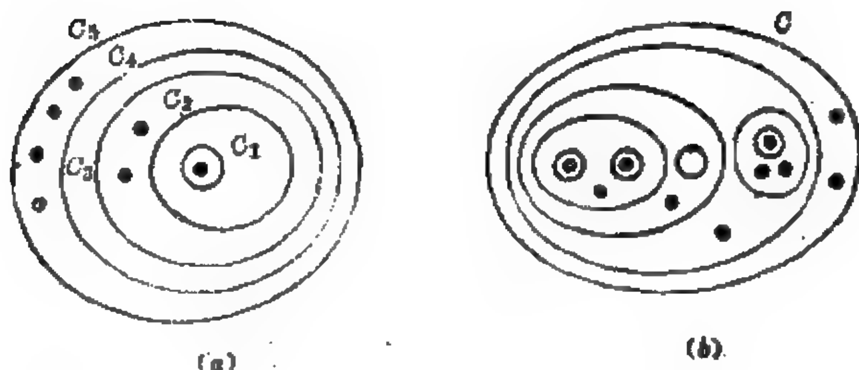



图 7.2

及3的巢链。

今对(7·1)的一个极限环$C$，我们以$\sum\limits_{C} i$、$\sum\limits_{\overline{C}} i$ 和 $\sum\limits_{\overset{\circ}{C}} i$ 分别记$s(C)$、$s(\overline{C})$ 和 $s(\overset{\circ}{C})$ 中一切奇点的指标之和。类似地可以定义$\sum\limits_{C}|i|$、$\sum\limits_{\overline{C}}|i|$、$\sum\limits_{\overset{\circ}{C}}|i|$ 和$\sum\limits_{C} I$、$\sum\limits_{\overline{C}} I$、$\sum\limits_{\overset{\circ}{C}} I$。

**定理 7.5** 设 $\overline{C}$ 是一$k$阶扇，则 $\sum\limits_{\overline{C}} I \geqslant 2k-1$。

**证** 用归纳法：当$k=1$时，由定理7.3及熟知的"极限环内部奇点的指标之和为1"的事实可以推出：

$$\sum_{\overline{C}} I \geqslant \sum_{\overline{C}}|i| \geqslant \left|\sum_{\overline{C}} i\right| = 1 = 2k-1.$$

今设 $\overline{C}$ 是一$k(>1)$阶扇，$\overline{C}_1 \prec \overline{C}_2 \prec \cdots \prec \overline{C}_k = \overline{C}$ 是一相应的长度为$k$的链，则$\overline{C}_{k-1}$是一阶数为$k-1$的扇。由归纳法的假设，应有$\sum\limits_{\overline{C}_{k-1}} I \geqslant 2k-3$。另一方面，由于$\overline{C}_{k-1} \neq \overline{C}_k = \overline{C}$，故在$S = L(\overline{C}_k) \backslash \overline{U}(\overline{C}_{k-1})$中存在一些奇点$p_1$，…，$p_r$，满足$\sum\limits_{j=1}^{r} i(p_j)=0$。若$r=1$，即在$S$中只有一奇点，则它的指标应是零。这时显见相应的$I \geqslant 2$(否则，若$I=1$，则此奇点应是初等奇点，从而$|i(P_1)|=1$，这与前所说矛盾)。若$r=2$，则也应有$\sum\limits_{S} I \geqslant 2$。总之，我们有：

$$\sum_{\overline{C}_k} I = \sum_{\overline{C}_{k-1}} I + \sum_{S} I \geqslant 2k-3+2 = 2k-1.$$

**推论 7.1** 若 $\overline{C}$ 为(7.1)的一个$k$阶扇，则$k \leqslant \left[\dfrac{nm+1}{2}\right]$，这

里[ ]表示有理数的整数部分。

**证** 已知(7.1)的各有限奇点处的相交数的总和$\leqslant nm$。故由定理7.5得$2k-1\leqslant nm$，从而$k\leqslant\left[\frac{nm+1}{2}\right]$。

**注 7.4** 当$n=m=2$时，由推论1只能得到$k\leqslant 2$，实际上，对二次系统显见有$k=1$。

**定理 7.6** 设在(7.1)中有$m\leqslant n$，又$\overline{C}_1$，$\overline{C}_2$，…，$\overline{C}_r$是$r$个扇，其阶数依次为$k_1$，$k_2$，…，$k_r$。又设$U(\overline{C}_i)\cap U(\overline{C}_j)=\phi$对$i\neq j$，则：

(i) 当$n\equiv m(\mathrm{mod}.2)$时，有

$$k_1+k_2+\cdots+k_r\leqslant\min\left\{\frac{nm+r}{2},\ \frac{nm+m}{2}\right\}.$$

(ii) 当$n\not\equiv m(\mathrm{mod}.2)$时，有$k_1+\cdots+k_r\leqslant\frac{nm}{2}$。

**证** 先设(7.1)的奇点都是初等奇点，则它们都具有指标$+1$或$-1$。因为$\overline{C}_j$是$k_j$阶扇，故在$U(\overline{C}_j)$中至少存在$k_j$个指标为$+1$的奇点。由定理7.1的系7.1即得：

$$k_1+k_2+\cdots+k_r\leqslant\frac{(n+1)m}{2},\ 当\ n\equiv m(\mathrm{mod}.2);$$

$$\leqslant\frac{nm}{2},\ 当\ n\not\equiv m(\mathrm{mod}.2).$$

其次，由定理7.5知$\sum\limits_{\overline{C}_j}I\geqslant 2k_j-1$对$j=1, 2, \cdots, r$。因此有：

$$2(k_1+\cdots+k_r)-r=\sum_{j=1}^{r}(2k_j-1)\leqslant\sum_{\underset{j}{\cup}\overline{C}_j}I\leqslant nm.$$

由此即得

$$k_1+k_2+\cdots+k_r\leqslant\frac{nm+r}{2}.$$

两个不等式一起导出(i)与(ii)。

当(7.1)可能有高阶奇点时，可以用具有初等奇点的方程来逼近(7.1)，从而可证上述不等式对(7.1)依然成立。

**推论 7.2** 设在 (7.1) 中 $m\leqslant n$, $\overline{C}_1, \cdots, \overline{C}_r$ 是 $r$ 个扇，使

$$U(\overline{C}_i)\cap U(\overline{C}_j)=\varnothing \quad \text{对 } i\neq j.$$

则：(i) 当 $n=m(\text{mod}.2)$ 时有 $r\leqslant\frac{1}{2}m(n+1)$；

(ii) 当 $n\neq m(\text{mod}.2)$ 时有 $r\leqslant\frac{nm}{2}$。

**证** 因为 $k_1+\cdots+k_r\geqslant r$。∎

**定理 7.7** 设(7.1)共有 $l$ 个扇(这 $l$ 个扇可能相互包含)，则

(i) 当 $n\equiv m(\text{mod}.2)$时，$l\leqslant nm$；

(ii) 当 $n\neq m(\text{mod}.2)$ 时 $l\leqslant nm-1$。

证明从略(见文献[7.2])。这个定理当 $n=m=1$ 或 $n=2$, $m=1$ 时，(i)或(ii)中的不等式等号成立。对其他的 $n$、$m$，猜想不等式还可以改进许多。例如 $n=m=2$ 时，由(i)得到 $l\leqslant4$，而实际上 $l\leqslant2$。

**定理 7.8** 设 $C$ 是(7.1)的极限环，扇 $\overline{C}$ 与巢 $\tilde{C}$ 的阶分别为 $k$ 与 $k'$，则 i) $k'\leqslant k$; ii) $\sum_{\tilde{C}} I\geqslant 2k'-1$。

**证** 由扇与巢的定义以及定理 7.5 立即可得。∎

由定理 7.8 的(ii) 知道定理 7.5 与推论 7.1 对于巢也成立。

由定理 7.8 的(i)与定理 7.6 知道定理 7.6 与推论 7.2 对于巢也成立。又因扇的个数不少于巢的个数，故定理 7.7 对巢也成立。

下面应用上述诸定理来导出 $(P_2, Q_2)$、$(P_1, Q_3)$和 $(P_2, Q_3)$ 的极限环分布的一些结论。

对 $(P_2, Q_2)$，推论 7.1 和推论 7.2 的结果都不是最好的。实际上，有以下定理(见文献[7.1])：

**定理 7.9** 对二次系统 $(P_2, Q_2)$ 有

(i) 若 $\tilde{C}_1, \cdots, \tilde{C}_r$ 为 $r$ 个巢，$U(\tilde{C}_i)\cap U(\tilde{C}_j)=\varnothing$，当 $i\neq j$，则 $r\leqslant2$。

(ii) 一巢或扇中的极限环都有相同的定向；

(iii) 设 $\tilde{C}$ 是$(P_2, Q_2)$的一个 $k'$ 阶巢，则 $k'=1$；

(iv) $(P_2, Q_2)$的巢与扇一致，其拓扑图如图7.3所示。以上的事实也可以用本文的方法来证明，今从略。

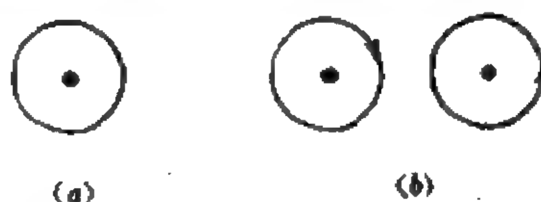



图 7.3

**定理 7.10** $(P_1, Q_3)$的巢的拓扑图如图7.4所示。每一巢中的极限环都有相同的定向（注意在图3(b)中两环定向相反）。




图 7.4

**证** 由推论7.1知道，若$\widetilde{C}$是$(P_1, Q_3)$的一巢，则其阶数$k'\leqslant 2$。今设$\widetilde{C}_1, \cdots, \widetilde{C}_r$是$(P_1, Q_3)$的一切最大巢，由推论7.2知道$r\leqslant 2$。若$r=1$，则$k'=1$或2。现在证明：这时只可能出现图7.4的(a)、(b)两种构图。为此只须证明：在一个二阶巢的内部恰有两个一阶巢，但这由奇点个数$\leqslant 3$立即看出。若$r=2$又$\widetilde{C}_i$的阶为$k_i (i=1, 2)$，由定理7.6知有$k_1+k_2\leqslant 2$，从而$k_1=k_2=1$，故得图7.4(c)。又由定理7.4知道图7.4(b)中的极限环都应有相同的定向。最后由定理7.2知道在图7.4(c)的情况应有$|\Sigma i|\leqslant 1$，即在$S=R^2\backslash\{U(\widetilde{C}_1)\cup U(\widetilde{C}_2)\}$中至少还有一个奇点，它是鞍点。显见三奇点应在同一直线$P_1(x, y)=0$上，而鞍点应在两指标为$+1$的奇点之间，从而$C_1$与$C_2$有相同的定向。

对$(P_2, Q_3)$，设$r$是最大巢的个数，$k_i$为第$i$个最大巢的阶数。则由定理7.6有$r\leqslant k_1+\cdots+k_r\leqslant 3$。再注意$\sum|i|\leqslant 6$，$|\sum i|\leqslant 2$，可知有下列构图(图7.5)，在$(2)_1$、$(2)_2$、(3)及(1, 2)中诸

极限环都有相同的定向(证明从略)。此外，图7.5中七种构图是否确能被$(P_2, Q_3)$所实现?未见证明。

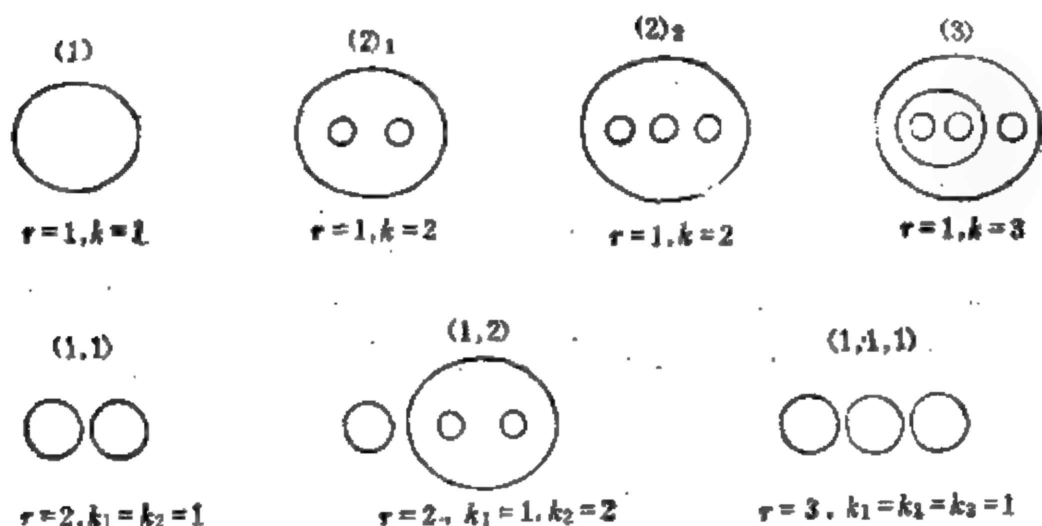
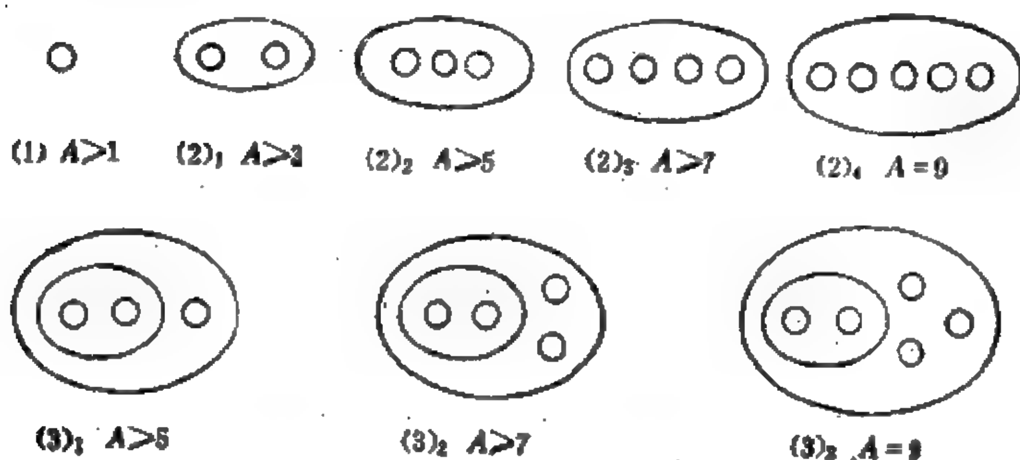


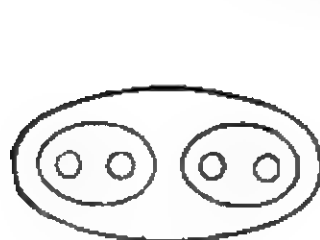

图 7.5

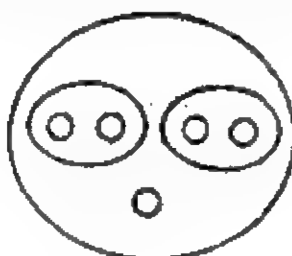
在A.Olma的博士论文中还得到$(P_3, Q_3)$的极限环的一切可能拓扑分布共有54种。承她向作者提供了全部这些图(图7.6)，有兴趣的读者可以进一步研究是否这些图都能被三次系统所实现。

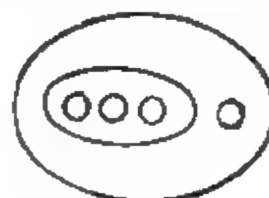
对$(P_3, Q_3)$的情况，以$n_r$表示有$r$个最大巢的可能拓扑结构，以$A$表示实有限远奇点的个数，则有图7.6。

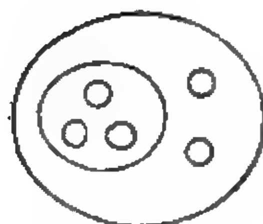
$n_1=21$

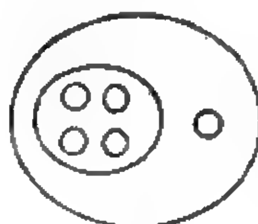


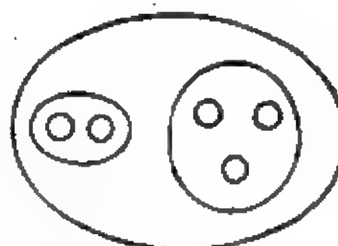

$(3)_4$ $A\geqslant 7$

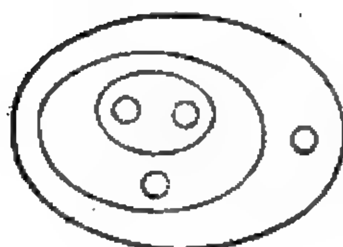

$(3)_5$ $A=9$

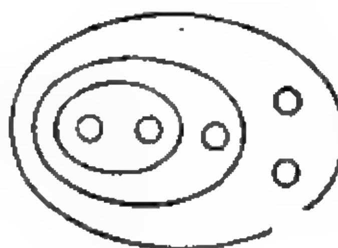

$(3)_6$ $A\geqslant 7$

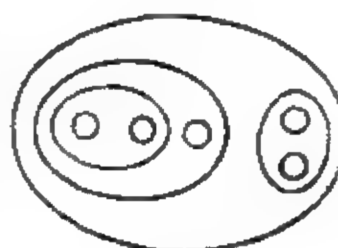

$(3)_7$ $A=9$

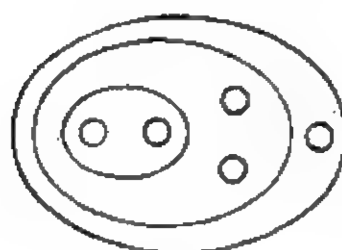

$(3)_8$ $A=9$

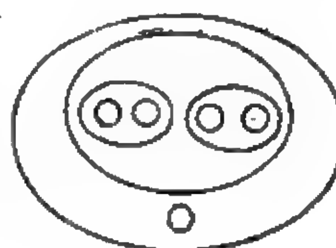

$(3)_9$ $A=9$

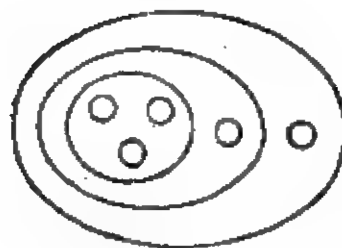

$(4)_1$ $A\geqslant 7$

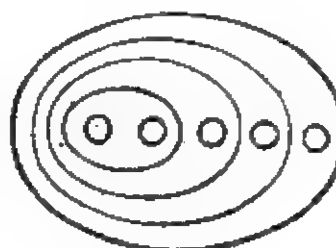

$(4)_2$ $A=9$


$(4)_3$ $A=9$


$(4)_4$ $A=9$


$(4)_5$ $A=9$


$(4)_6$ $A=9$


$(5)_1$ $A=9$

$n_2=12$



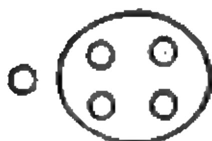
(1,1) $A>2$



(1,2) $A>4$



(1,2) $A>6$



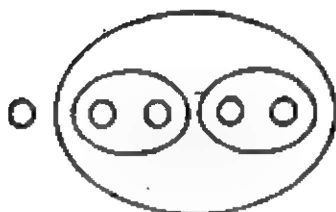
(1,2) $A>8$



(1,3) $A>6$



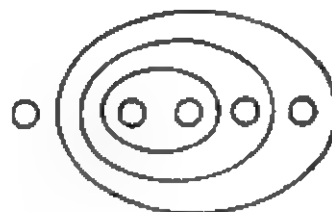
(1,3) $A>8$



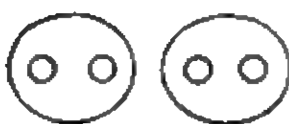
(1,3) $A>8$



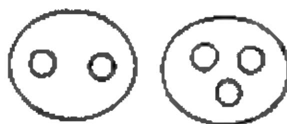
(1,3) $A>8$



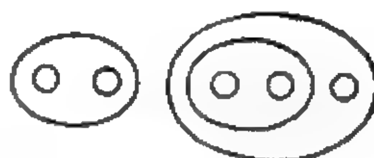
(1,4) $A>8$



(2,2) $A>6$



(2,2) $A>6$



(2,3) $A>8$

$n_2=13$



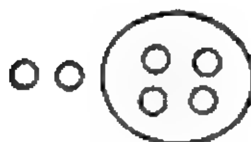
(1,1,1) $A>3$



(1,1,2) $A>5$



(1,1,2) $A>7$



(1,1,2) $A=9$



(1,1,3) $A>7$



(1,1,3) $A=9$

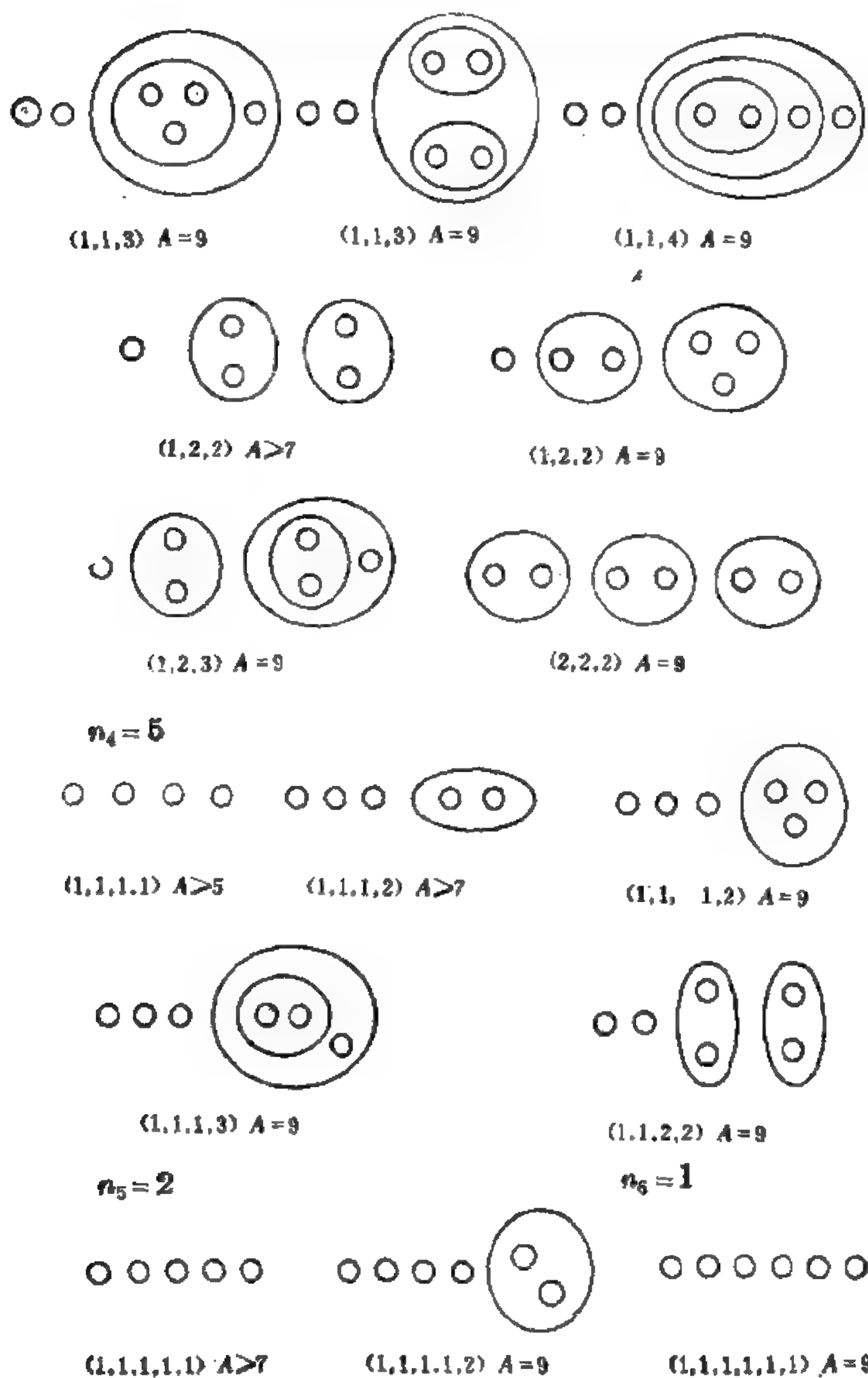

(1,1,3) A=9
(1,1,3) A=9
(1,1,4) A=9
(1,2,2) A>7
(1,2,2) A=9
(1,2,3) A=9
(2,2,2) A=9
n4=5
(1,1,1,1) A>5
(1,1,1,2) A>7
(1,1,1,2) A=9
(1,1,1,3) A=9
(1,1,2,2) A=9
n5=2
n6=1
(1,1,1,1,1) A>7
(1,1,1,1,2) A=9
(1,1,1,1,1,1) A=9

图 7.6

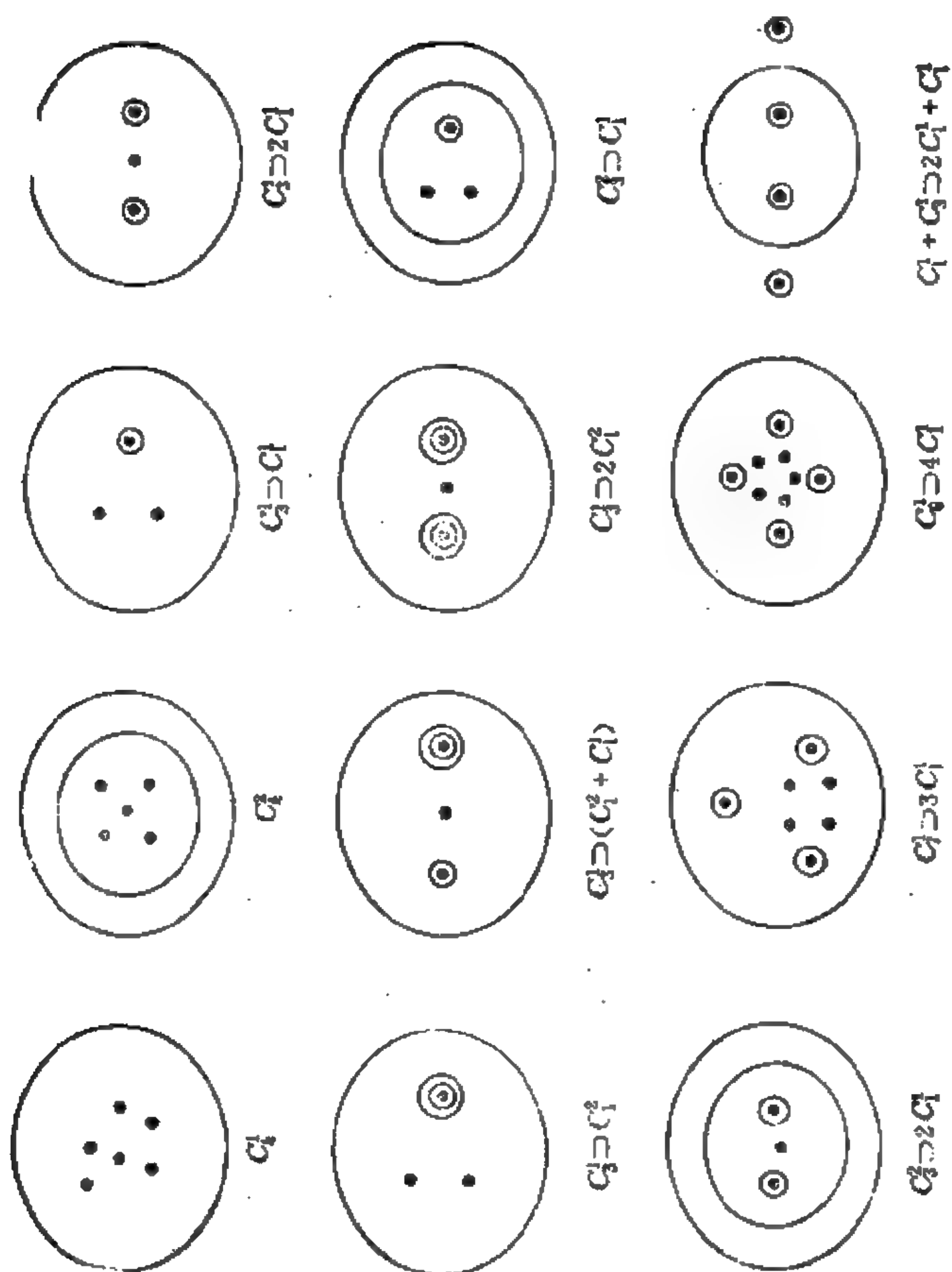


图 7.7

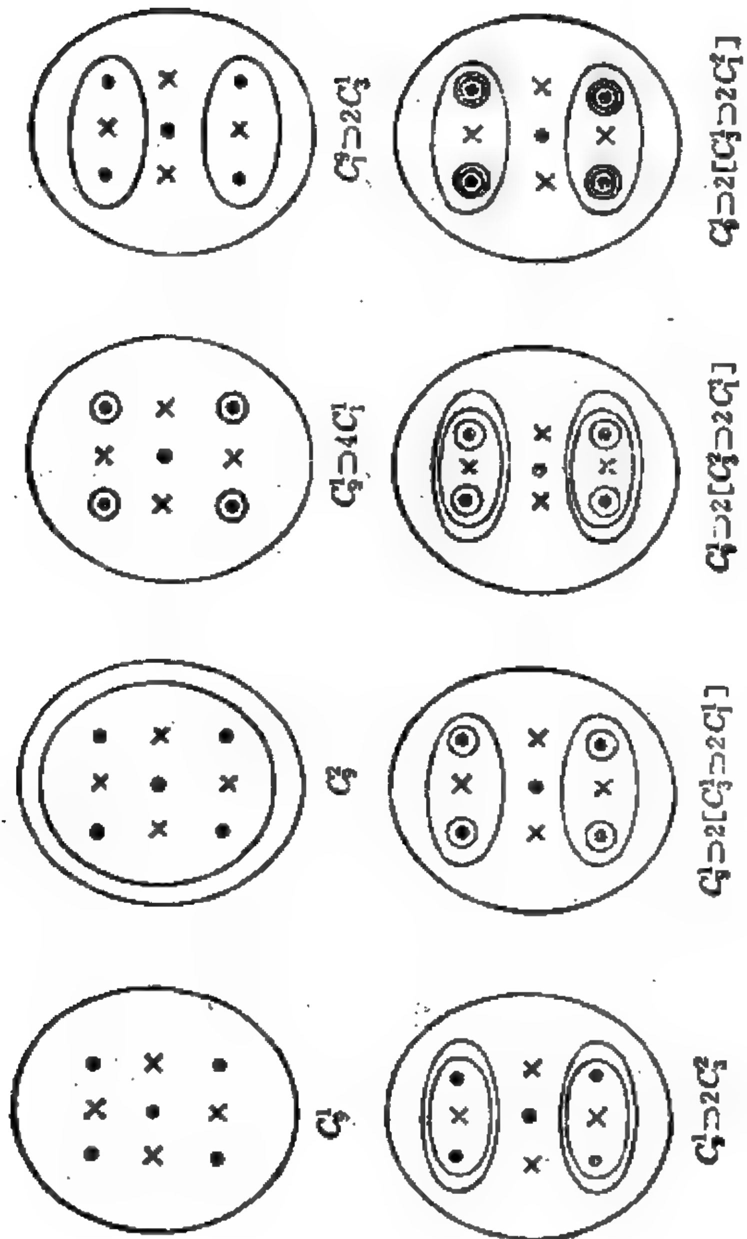

$C_9^1$
$C_9^2$
$C_9^1 \supset 4C_1^1$
$C_9^1 \supset 2C_3^1$
$C_9^1 \supset 2C_3^2$
$C_9^1 \supset 2[C_3^1 \supset 2C_1^1]$
$C_9^1 \supset 2[C_3^2 \supset 2C_1^1]$
$C_9^1 \supset 2[C_3^1 \supset 2C_1^2]$

图 7.8

注 7.5　在图 7.3、7.4、7.5、7.6 中每一个圈都可以代表多于一个极限环，它们之间没有奇点。因此，即使对于 $(P_2, Q_2)$、$(P_2, Q_3)$，极限环的分布问题也仍未解决。

对于 $(P_3, Q_3)$，在文献 [7.2] 以前，在文献 [7.10] 中研究 Hamilton 系统的扰动时，就已得到如前这样一些构图(见图 7.7)。

图下 $C$ 的上标数字表示极限环的个数，$C$ 的下标数字表示这些极限环所包含的奇点个数。与图 7.6 相比，图 7.7 中某些图肯定了同一扇中极限环可以有两个。这是在文献 [7.2] 中的理论所无法得到的。

又在文献[7.11]中作者们研究了系统

$$\dot{x} = y(1 - cy^2) + \mu x(mx^2 + ny^2 - \lambda),$$
$$\dot{y} = -x(1 - ax^2) + \mu y(mx^2 + ny^2 - \lambda)$$

(其中 $a > c > 0$, $0 < \mu \ll 1$) 的 Poincaré 分支，得到如下一些分布(见图 7.8)：其中·与×分别表示指标 +1 与 −1 的奇点。在图 7.8 的最后一图中出现的极限环多达 11 个。

在文献[7.12]中同是这两位作者又讨论了系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y(1 + x^2 - cy^2) + \mu x(mx^2 + ny^2 - \lambda), \\ \dot{y} = x(1 + ax^2 - y^2) + \mu y(mx^2 + ny^2 - \lambda). \end{cases}$$

(其中 $a > 1$, $c < 1$, $ac > 1$, $0 < \mu \ll 1$)，也得到与图 7.8 相同的极限环分布，但奇点则从 9 个减为 7 个。

此外，在文献[7.13]中又得到：

$$C_9^2 \supset [(C_3^1 \supset 2C_1^1) + C_1^1 + (C_3^1 \supset 2C_1^1)]$$

型的分布。类似的工作还有文献[7.14]、[7.15]、[7.16]、[7.17]、[7.37]。在[7.16]中得到了三次系统的型为 $C_9^1 \supset 4C_1^2$ 及 $5C_1^1$ 的极限环分布。在[7.17]中得到下列一些分布(见图 7.9) [1]：

关于奇闭轨的研究仅有对二次系统有较多的工作。粗略地说，二次系统的有界奇闭轨只有三种(图 7.10)；无界奇闭轨只有

1) 由图 7.5 的(2)、及图 7.9 的(b)看出，若不考虑奇闭轨，而只考虑闭轨，则由文献[7.2]中的扇与巢的理论并不能确定唯一的拓扑结构，即使不考虑属于同一扇的闭轨个数。因此，我们认为对文献[7.2]中的理论有必要把奇闭轨也考虑进去。

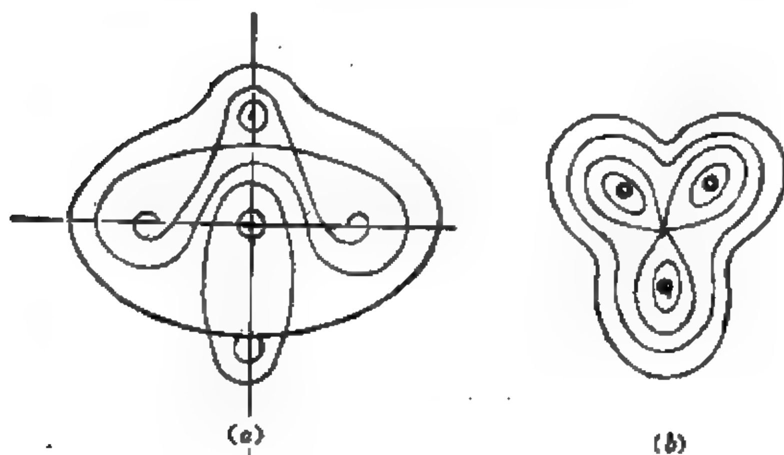



图 7.9

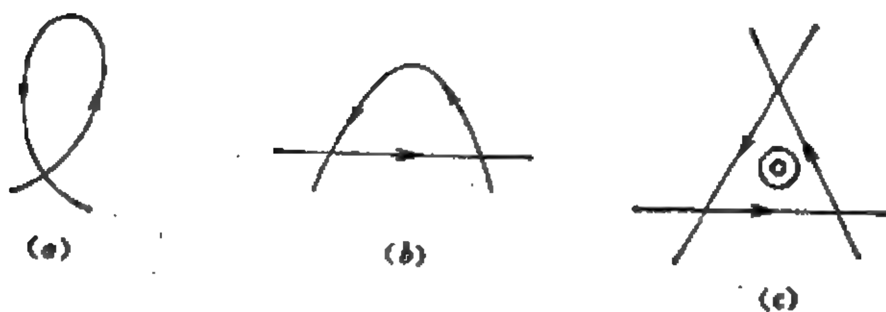



图 7.10

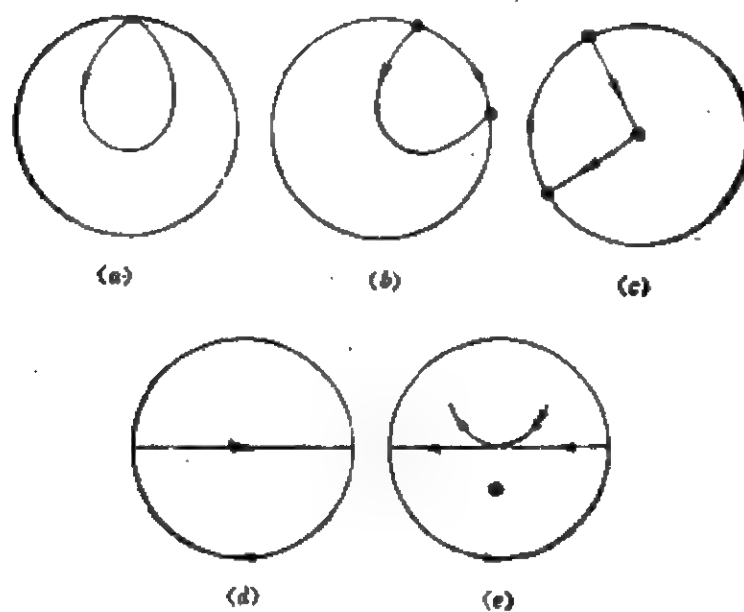



图 7.11

五种(图7.11)；但若细分，则有界奇闭轨可分为10种；无界奇闭轨可分为70种(见文献[7.18])，不在此详细介绍了，有兴趣的读者可参看文献[7.18]原文。应当指出，图7.10(c)只有唯一的情况，即三条直线包围一中心区域。图7.10(a)又可细分为5种，图7.10(b)又可细分为4种。在[7.19]中详细研究了其上奇点的性质和内部奇点的性质以及可能存在极限环的个数。对图7.10(b)早几年在文献[7.20]已获得其中若干结果。

图7.11(a)与(b)将在§19中再详细讨论，图7.11(c)有两条积分直线，故无极限环。对于图7.11(d)早在[7.21]中就知道分界线环的内稳定性不能用Cherkas方法(即由两无穷远鞍点的特征根之比的乘积)来判定，Cherkas(在文献[7.22]中)为此将方程在无穷远奇点邻域内的通积分展开为渐近级数，然后用计算后继函数的方法来确定分界环的内稳定性，计算很繁。在文献[7.23]中指出了[7.22]中有两处计算错误，作了更正。在[7.23]中除得到分界环稳定性的判别方法以外，还研究了极限环的存在条件及稳定性判别。文献[7.24]改为在Poincaré半球面上研究分界线环附近轨线的走向，对不同的轨线段采用不同的坐标系，所得结果比文献[7.23]中的更完备。下面引进[7.23]与[7.24]中的两个定理，证明从略。

**定理7.11** 设有二次系统：

$$\dot{x}=a_{00}+a_{10}x+ax^2+a_{11}xy+a_{01}y+a_{02}y^2,\ \dot{y}=xy,\tag{7.9}$$

它满足条件：

$$\left.\begin{array}{ll}1)\ a_{10}^2-4a_{00}a<0 & (y=0\text{ 上没有有限远实奇点})；\\ 2)\ a_{11}^2-4a_{02}(a-1)<0 & (\text{赤道上只有唯一的实奇点}\\ & \qquad (\pm1,\,0,\,0))；\\ 3)\ 0<a<1 & ((\pm1,\,0,\,0)\text{是初等鞍点})。\end{array}\right\}\tag{7.10}$$

(由此显见可导出 $a_{00}>0$, $a_{02}<0$)。又记：

$$D=[4a_{00}a-a_{10}^2]^{\frac{1}{2}},\ E=[4a_{02}(a-1)-a_{11}^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$\gamma=\frac{a_{10}}{D}+\frac{a_{11}}{E}.$$

则当 $\gamma>0$ 时，由 $y=0$ 与上半赤道所构成的分界线环 $L_1$ 是稳定的；当 $\gamma<0$ 时，$L_1$ 是不稳定的[1]。

注 7.6　系统(7.9) 的位于 $y=0$ 上的有限远复奇点的 $x$ 坐标为 $\frac{-a_{10}\pm iD}{2a}$，位于赤道上的复奇点的 $x$ 坐标为 $\frac{a_{11}\pm iE}{2(1-a)}$。由此可见 $\gamma$ 的表达式与有限异宿奇异环的 Cherkas 判据有类似之处。

易见(7.9)的两个有限远实奇点$(0, Y_+)$与$(0, Y_-)$的纵坐标为：

$$Y_-=\frac{-a_{01}-\sqrt{a_{01}^2-4a_{02}a_{00}}}{2a_{02}},\quad Y_+=\frac{-a_{01}+\sqrt{a_{01}^2-4a_{02}a_{00}}}{2a_{02}}.$$

**定理 7.12**　设系统(7.9)满足条件(7.10)，记

$$\theta=\sqrt{\frac{-a_{00}a}{a_{02}(1-a)}}.$$

则 i) (7.9)在上半平面中有极限环，当且仅当$a_{11}\neq0$，且 $-\frac{a_{10}}{a_{11}}$ 严格地位于 $\theta$ 与 $Y_-$ 之间，且当 $a_{10}+a_{11}\theta<0$ 时极限环为稳定；当 $a_{10}+a_{11}\theta>0$ 时，极限环为不稳定。

ii) (7.9)在下半平面中有极限环，当且仅当 $a_{11}\neq0$，且 $\frac{a_{10}}{a_{11}}$ 严格地位于 $\theta$ 与 $-Y_+$ 之间；且当 $a_{10}-a_{11}\theta<0$ 时，极限环为稳定；当 $a_{10}-a_{11}\theta>0$ 时，极限环为不稳定[2]。

化到我们常见的 $(\text{II})_{a=0}$ 型的二次系统，则代替定理 7.12 有以下定理：

**定理 7.13**　设系统

$$\dot{x}=\delta x-y+lx^2+mxy+ny^2,\quad \dot{y}=x(1+y) \tag{7.11}$$

满足条件：

1) $(\delta-m)^2<4l(1+n)$；2) $m^2<-4n(1-l)$；

---

1) 图 11(e)对应于$D=0$，这时分界线环的稳定性如何判别，尚未见有人研究过。

2) 注意：由 $\gamma=0$ 可导出 $\theta=-a_{10}/a_{11}$，此时 $L_1$ 改变稳定性。

3) $0<l<1$。

又记 $\theta'=\sqrt{\dfrac{-l(1+n)}{n(1-l)}}$，则：

i) 当且仅当 $m\neq0$，且 $\dfrac{\delta}{m}$ 严格地位于 0 与 $1-\theta'$ 之间时，存在环绕原点 $O(0,0)$ 的极限环；当 $\delta>0$ 时环为稳定，$\delta<0$ 时为不稳定。

ii) 当且仅当 $m\neq0$，且 $\dfrac{\delta}{m}$ 严格地位于 $-\dfrac{1}{n}$ 与 $1+\theta'$ 之间时，存在环绕 $N\left(0,\ \dfrac{1}{n}\right)$ 的极限环；当 $\delta>-\dfrac{m}{n}$ 时环为稳定，$\delta<-\dfrac{m}{n}$ 时环为不稳定。

现在假设 $m>0$，$n+l<0$，$l<1+n$，则 $0<\theta'<1$，$1+\theta'<-\dfrac{1}{n}$。当 $\delta<0$ 时全平面无环。当 $\delta$ 从 0 增大时，$O$ 外产生稳定环扩大，直到 $\delta=m(1-\theta')$ 时极限环扩大成为分界线环，改变了分界环的稳定性，当 $m(1-\theta')<\delta<m(1+\theta')$ 时，全平面没有极限环。当 $\delta=m(1+\theta')$ 时，下半平面的分界线环改变稳定性，而当 $\delta$ 继续增大时产生一环绕 $N\left(0,\ \dfrac{1}{n}\right)$ 的不稳定环，它随 $\delta$ 的增大而缩小。直到 $\delta=-\dfrac{m}{n}$ 时此环缩小到 $N$，使 $N$ 成为不稳定细焦点，然后当 $\delta>-\dfrac{m}{n}$ 时全平面无环。由此可见这一结果相当完整。

类似的工作最近还有文献[7.33]。

最后介绍文献[7.19]中的几个定理，证明从略。

**定理 7.14** 二次系统的有返回映射的有界分界线环，若其上只有一个或两个奇点，且其内部不是中心，则只可能有下列五种：

$S_1$：其上有一个一阶鞍点的同宿环；

$S_2$：其上有一个二阶鞍点的同宿环；

$S_3$：有一个三阶鞍点（在该点发散量不为零）的同宿环；

$S_4$：其上有两个一阶鞍点的异宿环；

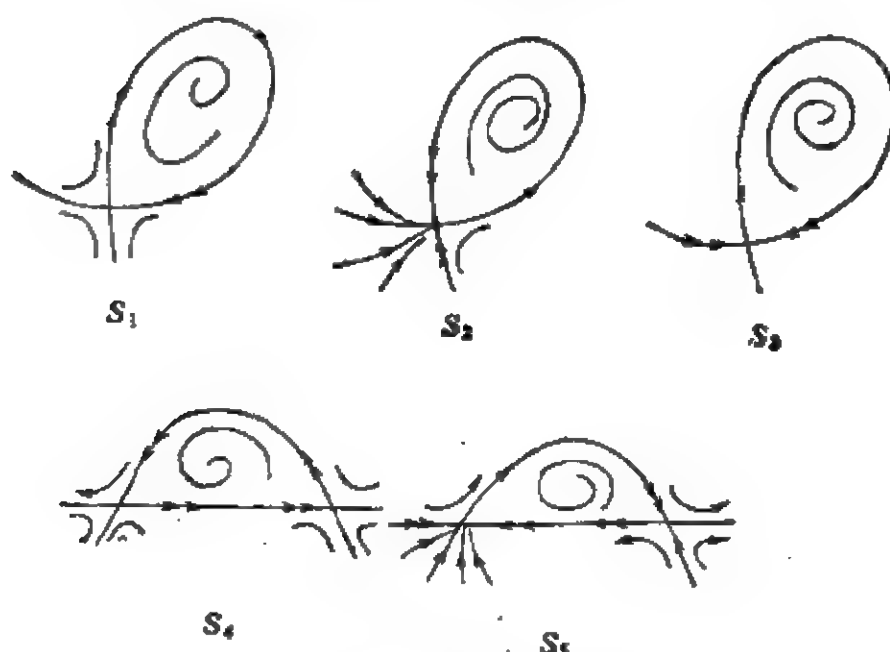



图 7.12

$S_5$: 其上有一个一阶鞍点,一个二阶鞍结点的异宿环。

**定理 7.15**　若二次系统有分界线环 $S_1$, 则 $S_1$ 内部的奇点可能为粗焦点,一阶细焦点或二阶细焦点;若设焦点外围最多只能存在三个极限环, 则 $S_1$ 内部至多(而且能)有两个极限环。当发散量在鞍点不为零时, $S_1$ 的内稳定性可由发散量在鞍点的符号决定。但困难的是发散量在鞍点为零时,对此文献[7.19]没有讨论。

**定理 7.16**　若二次系统有分界环 $S_2$, 则 $S_2$ 内部的奇点可能为粗焦点或一阶细焦点。$S_2$ 内部最多只能有一个极限环。$S_2$ 的内稳定性可由发散量($\neq 0$)在 $S_2$ 上的鞍结点的符号决定。

**定理 7.17**　若二次系统有分界线环 $S_3$, 当发散量在鞍点不为零时, $S_3$ 内部的奇点只能是粗焦点, $S_3$ 内部不含极限环, $S_3$ 的内稳定性由发散量在鞍点的符号决定。

**注 7.7**　当发散量在鞍点为零时,必有两个特征根皆为零, 这时由文献[7.34]知方程必有一直线解, 从而极限环最多只能有一个。

**定理 7.18**　若二次系统有分界线环 $S_4$ 或 $S_5$, 则它们内部都不包含极限环, 其中的奇点若不是中心, 则必为粗焦点。$S_4$ 的内

稳定性必可用前面提到过的 Cherkas 公式来判定。$S_5$的内稳定性则由发散量在鞍结点的符号来判定。

**注 7.8** 由文献[7.34] 知道还可能存在内部为椭圆域而无奇点的只过两个奇点的分界线环。

对于 $S_1$, $\cdots$, $S_5$ 的存在性，文献[7.19]中已举出具体的例子。

又在文献[7.20]中证明了以下定理：

**定理 7.19** 如果二次系统有两个细焦点，或一个细焦点和一个细鞍点，则必不存在分界线环。

证明用 Dulac 函数法。

**推论** 如果二次系统存在过细鞍点的分界线环，则或是其内部有粗焦点，或是方程为可积。

关于二次系统的分界线环，文献[7.35]中第三章还有详细的讨论。

另一重要的结果是下面的定理，它分别由文献[7.25]、[7.26]、[7.27]独立得到(本书 §5 定理 5.19)。

**定理 7.20** 如果二次系统有二阶或三阶细鞍点，则在全平面不存在极限环和分界线环。

为了证明此定理，先证以下几个引理：

**引理 7.8** 设 $a\neq b$, $d\neq 2$, 则系统

$$\dot{x}=x+x^2+dxy+by^2,\ \dot{y}=-y-y^2-dxy-ax^2 \tag{7.12}$$

没有闭或奇闭轨线。

**证** 变换 $u=x+y$, $v=x-y$ 将(7.12)变为：

$$\begin{cases}\dot{u}=v+\dfrac{1}{4}(b-a)u^2+\dfrac{1}{2}(2-a-b)uv\\ \qquad +\dfrac{1}{4}(b-a)v^2=P,\\ \dot{v}=u+\dfrac{1}{4}(2+a+b+2d)u^2+\dfrac{1}{2}(a-b)uv\\ \qquad +\dfrac{1}{4}(2+a+b-2d)v^2=Q.\end{cases} \tag{7.13}$$

作一比较方程：

$$\begin{cases}\dot{u}=v+\dfrac{1}{2}(2-a-b)uv=P_0,\\ \dot{v}=u+\dfrac{1}{4}(2+a+b+2d)u^2+\dfrac{1}{4}(2+a+b-2d)v^2=Q_0.\end{cases}\tag{7.14}$$

(7.14)可由(7.13)中以 $\dfrac{a+b}{2}$ 代替 $a$ 及 $b$ 而得到。它对称于 $u$ 轴，且为可积系统(由§5定理5.2知对(7.14)有 $R_1=R_2=R_3=0$)。

(7.13)的发散量为 $\operatorname{div}(P,\ Q)=(2-d)v$，故知闭或奇闭轨若存在，必与 $u$ 轴相交。

若 $a+b+2d+2=0$，则除原点 $O$ 以外，$u$ 轴对于(7.13)为无切直线，又过鞍点 $O$ 的分界线切于直线 $u=\pm v$，由此即知(7.13)与(7.14)都不存在闭或奇闭轨线。

下面证明当 $a+b+2d+2<0$ 时，引理7.3的结论成立。$a+b+2d+2>0$ 时类似可证明。

不妨设 $b>a$，因为若 $b<a$，则可改变 $v$、$t$ 的符号以达到 $b>a$ 的目的。注意：

1) 当 $ab\neq0$ 时，两直线 $u=\pm v$ 除原点 $O$ 外为无切；

2) 当 $ab=0$ 时，至少在 $u=\pm v$ 中有一为积分直线，而另一则除0点以外为无切，如果不是积分直线的话。

3) 负 $u$ 轴为无切直线。

可知我们只要证明在角域

$$u>0,\ -1<\frac{v}{u}<1\tag{7.15}$$

中不存在闭与奇闭轨线即可。

今设(7.13)在角域(7.15)中存在闭或奇闭轨线 $T$，这必导出矛盾。记

$$P^*=P-P_0=\frac{b-a}{4}(u^2+v^2),\ Q^*=Q-Q_0=\frac{1}{2}(a-b)uv.\tag{7.16}$$

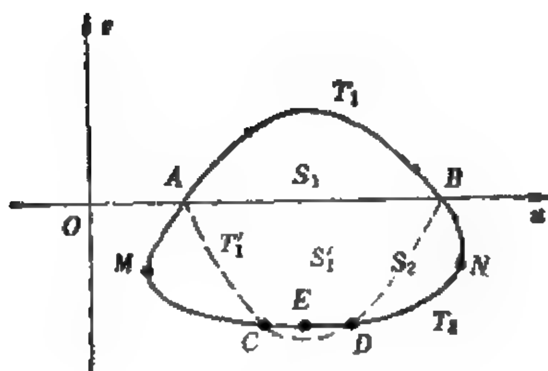



图 7.13

以 $T_1(T_2)$ 记 $T$ 在 $u$ 轴上(下)方的部分，$S_1(S_2)$ 为 $T_1(T_2)$ 与 $u$ 轴所围的区域(见图 7.13)。$A$、$B$ 为 $T$ 与 $u$ 轴的两个交点,$M(N)$ 为 $T$ 的最左(右)点，$S_1'(T_1')$ 为 $S_1(T_1)$ 关于 $u$ 轴的对称域(线)。当 $T$ 为过 $O$ 的奇闭轨时 $M=A$。

我们先证明必有

$$S_1'\subset S_2。\tag{7.17}$$

假设(7.17)式不成立。

i) 若 $A$ 不是原点 $O$，则由

$$P\Big|_{A,B}=\frac{1}{4}(b-a)u^2>0,\ Q\Big|_A>0,\ \ Q\Big|_B<0$$

可知 $T_1'$ 与 $T_2$ 至少应交于两点 $C$ 与 $D$，异于 $A$ 与 $B$。

ii) 若 $A=O$，则由关系式：

$$vP_0>0,\ Q_0>|Q^*|,\ |P_0|>P^*>0,\ 当\ 0<u\ll 1,$$
$$|v|\leqslant|u|,\ P^*>0,\ vQ^*<0。$$

可知当 $0<u\ll 1$ 时，有以下不等式成立：

$$\left|\frac{Q}{P}\right|_{T_1}>\left|\frac{Q_0}{P_0}\right|>\left|\frac{Q}{P}\right|_{T_2},$$

即在 $O$ 附近 $T_2$ 应位于 $T_1'$ 下方，从而由 $S_1'\not\subset S_2$ 仍将导出 $T_1'$ 与 $T_2$ 至少应交于两个点 $C$ 与 $D$，异于 $A$、$B$。显见，$C$ 与 $D$ 应位于 $M$ 与 $N$ 之间，以后用 $E$ 记 $T_2$ 的最低点。

考虑(7.13)关于 $u$ 轴的对称方程：

$$
\begin{cases}
\dot{u} = -v + \frac{1}{4}(b-a)u^2 - \frac{1}{2}(2-a-b)uv \\
\qquad + \frac{1}{4}(b-a)v^2 = P', \\
\dot{v} = -u - \frac{1}{4}(2+a+b+2d)u^2 + \frac{1}{2}(a-b)uv \\
\qquad - \frac{1}{4}(2+a+b-2d)v^2 = Q'.
\end{cases}
\tag{7.18}
$$

由图7.13可看出在$T$的$\widehat{BNM}$上(7.13)至少存在两个与(7.18)相切的点$I_1$与$I_2$。在点$I_i$处有:

$$
\frac{Q_0+Q^*}{P_0+P^*} = \frac{Q}{P} = \frac{Q'}{P'} = \frac{-Q_0+Q^*}{-P_0+P^*}.
$$

从而由比例的性质可得

$$
\left.\frac{Q}{P}\right|_{I_i} = \left.\frac{Q^*}{P^*}\right|_{I_i} > 0. \tag{7.19}
$$

因此$I_i$只能位于$T_2$的$\widehat{NE}$上。

今记$k = v/u$, 则

$$
\frac{Q^*}{P^*} = -\frac{2uv}{u^2+v^2} = -\frac{2k}{1+k^2}.
$$

显见当$|k|<1$时,$\frac{k}{1+k^2}$是$k$的严格增函数,另一方面,由$T$的凸性知$\frac{Q}{P}$沿$\widehat{NE}$是严格减的(从$+\infty$到0),从而$\widehat{NE}$与射线$v=ku$至多有一个交点。这表示$\frac{Q^*}{P^*}$沿着$\widehat{NE}$是严格增加的。这样,(7.19)式最多只能在$\widehat{NE}$上一点成立,从而$T_1'$不可能在$A$与$B$之间穿出$T_2$,即(7.17)成立,最后由格林公式即可导出矛盾:

$$
0 = \int_T P dv - Q du = \iint_{S_1 \cup S_2} \operatorname{div}(P, Q)\, du dv
$$

$$
= \iint_{S_1 \cup S_2} (2-d) v du dv \neq 0.
$$

引理证毕。∎

注7.9 对照§5中定理5.2中关于三个鞍点量的公式可知,

对于系统(7.12)当 $a=b$ 或 $d=0$ 或 $d=2$ 时，有 $R_1=R_2=R_3=0$，此时(7.12)为可积的。当 $d=-\frac{1}{2}$，$ab=\frac{1}{4}$ 时，也有 $R_1=R_2=R_3=0$。

**引理 7.4** 若 $b\neq 2$，则

$$\begin{cases}\dot{x}=x+x^2\pm y^2=P,\\ \dot{y}=-y-ax^2-bxy=Q\end{cases}\tag{7.20}$$

无闭与奇闭轨线。

为此只须注意 $\operatorname{div}(P,\ Q)=(2-b)x$，故闭或奇闭轨线若存在，则必与 $y$ 轴相交。但 $O$ 是鞍点，又 $\dot{x}$ 在 $y$ 轴上定号，因此引理的结论成立。 ∎

**引理 7.5** 若 $a\neq b$，则

$$\dot{x}=x+xy+by^2,\ \dot{y}=-y-xy-ax^2\tag{7.21}$$

没有闭与奇闭轨线。

**证** (7.21)可经变换 $u=x+y$，$v=x-y$ 化为：

$$\dot{u}=v+\frac{1}{4}(b-a)u^2-\frac{1}{2}(a+b)uv+\frac{1}{4}(b-a)v^2=P,$$

$$\dot{v}=u+\frac{1}{4}(2+a+b)u^2+\frac{1}{2}(a-b)uv+\frac{1}{4}(a+b-2)v^2=Q.$$

然后仿引理 7.3 证明之。

**引理 7.6** 若 $b\neq 0$，则

$$\dot{x}=x+by^2,\ \dot{y}=-y-xy-ax^2\tag{7.22}$$

没有闭与奇闭轨线。

证明与引理 7.4 一样。

**定理 7.20 的证明** 设二次系统以 $O(0,\ 0)$ 为鞍点，它的方程是：

$$\begin{cases}\dot{x}=x+a_1x^2+a_2xy+a_3y^2,\\ \dot{y}=-y+b_1y^2+b_2xy+b_3x^2.\end{cases}\tag{7.23}$$

变换 $x=hu$，$y=kv$ 把(7.23)变为：

$$\begin{cases}\dot{u}=u+a_1hu^2+a_2kuv+a_3h^{-1}k^2v^2,\\ \dot{v}=-v+b_1kv^2+b_2huv+b_3h^2k^{-1}u^2.\end{cases}\tag{7.24}$$

I) 若 $a_1b_1\neq 0$，则取 $h=a_1^{-1}$，$k=-b_1^{-1}$。于是 $a_1h=-b_1k=1$。而由 $R_1=b_1b_2-a_1a_2=0$ 可得 $a_2k=-b_2h$。因此，可设

$$a_1=-b_1=1,\ a_2=-b_2=d,\ a_3=b,\ b_3=-a.$$

于是(7.23)即具有(7.12)的形式，这时

$$R_2=d(d-2)(2d+1)(b-a).$$

当 $R_2\neq 0$ 时有 $a\neq b$，$d\neq 0$，2 及 $-\frac{1}{2}$。因为当 $a=b$，或 $d=0$ 或 $d=2$ 时有 $R_3=0$；而当 $d=-\frac{1}{2}$ 时有

$$R_3=\frac{75}{32}(b-a)(1-4ab).$$

故知若 $R_1=R_2=0$ 而 $R_3\neq 0$，则必有 $d=-\frac{1}{2}$，$a\neq b$，$4ab\neq 1$。

II) 若 $b_1=0$，$a_1\neq 0$，则由 $R_1=0$ 可导出 $a_2=0$，且我们可以假设 $a_1=1$。此时(7.23)成为：

$$\dot{x}=x+x^2+a_3y^2,\quad \dot{y}=-y+b_2xy+b_3x^2. \tag{7.25}$$

a) 当 $a_3=0$ 时有 $R_2=R_3=0$，(7.23)为可积。

b) 当 $a_3\neq 0$ 时可设 $a_3=1(-1)$，当 $a_1a_3>0(<0)$。现在

$$R_2=\mp b_3(b_2+2)(2b_2-1).$$

若 $b_2=0$ 或 $b_2=-2$，则 $R_2=R_3=0$，(7.25)为可积。若 $b_2=\frac{1}{2}$，则 $R_2=0$，$R_3=75b_3/8$。

因此，当 $b_1=0$，$a_1\neq 0$，$R_1=0$，$R_2\neq 0$（或 $R_1=R_2=0, R_3\neq 0$）时，(7.23)常可写成

$$\dot{x}=x+x^2\pm y^2,\quad \dot{y}=-y-bxy-ax^2$$

的形式，其中 $b\neq 0$，2，$-\frac{1}{2}$（或 $b=-\frac{1}{2}$，$a\neq 0$）。

III) 若 $a_1=0$，$b_1\neq 0$，只须改 $(x, y, t)$ 为 $(y, x, -t)$，情况 III 就成为情况 II 了。

IV) 若 $a_1=b_1=0$，则 $R_2=2(a_2^3b_3-a_3b_2^3)$。

a) 当 $a_2b_2\neq 0$ 时，可设 $a_2=-b_2=1$。现在 $R_2=0$ 等价于 $a_3=-b_3$，故由 $R_2=0$ 可导出 $R_3=0$ 及(7.23)为可积。

$b$) 当 $a_2=0$, $b_2\neq0$ 时, 可设 $b_2=-1$。于是 $R_2=0$ 成为 $a_3=0$, 从而导出 $R_3=0$。

$c$) 当 $a_2\neq0$, $b_2=0$ 时与 $b$) 类似, 由 $R_2=0$ 可导出 $R_3=0$。

$d$) 当 $a_2=b_2=0$ 时显见有 $R_2=R_3=0$。

故当 $a_1=b_1=0$ 时, (7.23) 不能有三阶细鞍点。在情况 $a$), (7.23) 可化为 (7.21), 其中 $a\neq b$。在情况 $b$) (7.23) 可化为 (7.22), 其中 $b\neq0$。

由以上的讨论可知: 有二阶或三阶细鞍点的二次系统(7.23)常可化为(7.12)$\left(\text{其中 } d\neq0,\ 2,\ a\neq b,\ \text{当 } d=-\frac{1}{2} \text{ 时}, ab\neq\frac{1}{4}\right)$、(7.20)、(7.21)或(7.22), 于是由引理7.3、7.4、7.5、7.6即得定理7.20的证明。∎

除文献[7.25]、[7.26]、[7.27]以外, 还有[7.28]、[7.29]、[7.30]。在[7.29]中利用定理7.20和[7.32]中的定理证明了以下定理(同样的结果在文献[7.36]中也得到):

**定理 7.21** 过二次系统的细鞍点的分界线环 $S$ 经扰动以后最多只能在 $S$ 的邻近产生三个极限环。

这一上界比文献[7.31]中所得到的上界"5个环"为好, 乃是因为文献[7.31]不知道定理7.20之故。我们以后将证明"三个环"是可以得到的, 见本书§14。

关于一般的 $n$ 维射影空间 $CP(n)$ 中的 $m$ 次多项式系统的奇点个数最近在文献[7.37]中证明其上确界为 $1+m+m^2+\cdots+m^n$(如果只有有限个奇点的话)。[7.37] 将这类多项式系统分为非退化的、第一类退化的(奇点集的维数大于零而小于 $n-1$)和第二类退化的(奇点集的维数等于 $n-1$)。对第一类退化多项式, 其孤立奇点个数的上确界仍为 $\sum\limits_{i=0}^{n}m^i$, 而第二类退化多项式的孤立奇点个数的上确界则为 $\sum\limits_{i=0}^{n}(m-1)^i$。

# 参 考 文 献

[7.1] 叶彦谦等 极限环论。上海科学技术出版社(1984, 再版)。

[7.2] Cima A. Llibre J. Configurations of fans and nests of limit cycles for polynomial vector fields in the plane, J.Diff Eqs. v.82(1989), 71～97。

[7.3] Khovanskii A G. Index of a polynomial vector field, Funk. Anal.Pril.13(1979), 49～58。

[7.4] 韩莉。平面多项式系统的奇点。辽宁师大学报,1986, no.1。

[7.5] Hang Li, Tian Jinghuang. The maximum number of singularities with index 1, Res. Rep. IMS-38, Inst. Math. Sci. Acad, Sinica, Chengdu, China。

[7.6] 张芷芬等 微分方程定性理论 科学出版社,1985。

[7.7] Fulton W. Algebraic Curves, An Introduction to Algebraic Geometry, W.A.Benjamin, Inc., New York, 1969。

[7.8] Griffith P.代数曲线。北京大学出版社,1985。

[7.9] Coppel W A.Quadratic systems with a critical point of higher multiplicity, Res.Rep no.24, 1988, The Austr.Nat.Univ。

[7.10] 李继彬,李存富。平面三次 Hamilton 系统与($E_3$)的极限环分布。数学学报,28(1985), no.4, 509～521。

[7.11] 李继彬,黄其明。三次微分系统的极限环复眼分支(预印本)。

[7.12] 黄其明,李继彬。平面三次微分系统的极限环复眼分支。云南大学学报,7(1985), no.1, 7～17。

[7.13] 李继彬。关于弱化的 Hilbert 第16问题的研究。昆明工学院学报,1988, no.1, 94～109。

[7.14] 万世栋。一类具有椭圆与双曲线解的三次 Hamilton 扰动系统的极限环分布。云南大学学报,7 (1985), no.4, 400～410。

[7.15] 李继彬, 邓大一。一类旋转 $2\pi/m$ 不变的平面 Hamilton 扰动系统的全局与局部分支。云南大学学报,7 (1985), 383～391。

[7.16] Li Jibin, Ren Hongshan. Bifurcations of phase portraits in the disturbed Hamiltonian system approaching the principal deformation of $Z_4$-field (to appear)。

[7.17] Kooij R E, Zegeling A. Polynomial systems with centers and limit cycles, Report 92-38, Delft Univ, of Technology, 1992。

[7.18] Dumortier F, Roussarie R and Rousseau C.Hilbert 16th problem for quadratic vector fields, (Preprint, 1991)。

[7.19] P. de Jager.Phase portraits of quadratic systems, higher order

singularities and separatrix cycles, Thesis, Technical Univ. of Delft, 1988.

[7.20] 尤建功。二次系统的细鞍点与 Homoclinic、Heteroclinic 奇异环。微分方程年刊, v.2(1986), no.3, 357～368。

[7.21] Cherkas L A. Stability of a singular cycle in the critical case, Diff. Uravn.3(1967), 1060～1069.

[7.22] Cherkas L A. The limit cycles of the equation $y'=Q_2(x, y)/P_2(x, y)$, Diff.Uravn.9, no.8(1973), 1432～1437.

[7.23] 周孔容。关于 Cherkas L A 的一个结果的修正和补充。四川大学学报, 1980, no.2, 23～37.

[7.24] Holmes C A. Some quadratic systems with a separatrix cycle surrounding a limit cycle, The Austr Nat.Univ. Res. Rep. no. 36(1986), Dept.of Math.IAS.or J.Lond.Math.Soc. (2).37(1988), 545～551.

[7.25] Zhu Deming. A general property of the quadratic differential systems, Chin.Ann.Math.10B(1), 1989, 26～32.

[7.26] Zhang Pingguang and Cai Suilin. Quadratic systems with second and third order weak saddle points, Acta Math. Sinica 30(1987), no 4, 560～565.

[7.27] Cai Suilin and Zhang Pingguang. A quadratic system with weak saddle (Ⅱ), Ann.of Diff.Eqs.v.4, 1988, 131～142.

[7.28] 张平光。一类二次系统的二点环 $S^{(2)}$ 的稳定性。数学年刊, 1990, 11A (3), 361～365.

[7.29] 蔡燧林, 郭光远。鞍点量与二次系统的分界线环产生极限环 (预印本), 1986.

[7.30] Zhang Pingguang. On the uniqueness of limit cycles and stability of separatrix cycle for a quadratic system with weak saddle, Northeastern Math.J. 6(2), 1990, 243～252.

[7.31] Guckenheimer J, Rand R, Schlomiuk D.Degenerate homoclinic cycles in perturbations of quadratic Hamiltonian systems, Nonlinearity, 2(1989), 405～418.

[7.32] Леонтович Е. О рождении предельных циклов от сепаратрисы, ДАН. СССР, v. 48(1951), no.4, 641～644.

[7.33] 沈伯骞。一类双参数 $\mathrm{II}_{n=0}$ 类二次系统存在极限环的精确区域 (预印本, 1992).

[7.34] Chicone C and Shafer D S. Separatrix and limit cycles of quadratic systems and Dulac's theorem, Trans.Amer. Math.Soc. 278, 1983, 585～612.

[7.35] 梁肇军。多项式微分系统全局分析导引。华中师大出版社, 1989.

[7.36] Joyal P and Rousseau C. Saddle quantities and applications,

J.Diff.Eqs.v.78(1989), 374～399.

[7.37] Jian Qibao. The number of singular points in a polynomial system, Preprint, 1993, Doctorial Thesis.

[7.38] Li Jibin and Wan Shidong. Global bifurcations in a disturbed Hamiltonian vector field approaching a 3:1 resonant Poincare map. (I), Acta Math. Appl. Sinica, Eng. Ser., v.7(1991), 80～89.

# §8. 多项式系统的中心与中心区域

二次多项式系统

$$\dot{x}=\lambda_1 x-y-\lambda_3 x^2+(2\lambda_2+\lambda_5)xy+\lambda_6 y^2,$$
$$\dot{y}=x+\lambda_1 y+\lambda_2 x^2+(2\lambda_3+\lambda_4)xy-\lambda_2 y^2 \tag{8.1}$$

以$O(0,0)$为中心的充要条件已在文献[8.1]中 §9 或本书§5 中提到过。应当指出，当 $\lambda_1=0$ 且(8.1)被写成

$$\dot{x}=-y-bx^2-(2c+\beta)xy-dy^2,$$
$$\dot{y}=x+ax^2+(2b+\alpha)xy+cy^2 \tag{8.2}$$

时，[8.1]中 §9 定理 9.1 的条件仅为充分而非必要的(见[8.20])。这时充要条件应按文献[8.2]改为：

Ⅰ) $a+c=b+d=0$；

Ⅱ) $\alpha(a+c)=\beta(b+d)$,

$$a\alpha^3-(3b+\alpha)\alpha^2\beta+(3c+\beta)\alpha\beta^2-d\beta^3=0; \tag{8.3}$$

Ⅲ) $\alpha+5(b+d)=\beta+5(a+c)$

$=2(a^2+d^2)+ac+bd=0$。

其证明见文献[8.20]。由[8.1]定理 9.1 的证明可以看出，仅当(8.2)中的系数经转轴变换被化成满足条件 $a+c=0$ 以后，该定理的条件才是充分必要的。反之，如果 $a+c\neq0$，则可举出这些条件并非必要的例子如下(见[8.20])：

**例 8.1** $\dot{x}=-y-x^2+6xy$, $\dot{y}=x-3xy+2y^2$ 不满足[8.1]中 §9 定理 9.1 的任一条件，但却满足(8.3)的条件Ⅱ)。又不难按文献[8.1]中 §12 定理 12.2 算出 $W_1=W_2=W_3=0$，故$O(0,0)$是中心。

最近，在文献[8.3]、[8.4]中将(8.2)$a$…$c$改写为：

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - bx^2 - Cxy - dy^2 \\ \dot{y} = x + ax^2 + Axy - ay^2 \end{cases} \tag{8.4}$$

之后，研究了相应的以 $O(0,\ 0)$ 为中心的充要条件：

$$b + d = 0, \tag{8.5}$$

$$C = a = 0, \tag{8.6}$$

$$C + 2a = A + 3b + 5d = a^2 + bd + 2d^2 = 0, \tag{8.7}$$

$$A - 2b = C + 2a = 0 \tag{8.8}$$

的几何意义以及不变代数曲线和初等通积分的存在性。

显见，当(8.8)成立时(8.4)是 Hamilton 系统，它有代数通积分

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + bx^2y - axy^2 + \frac{d}{3}y^3 + \frac{a}{3}x^3 = \text{const}. \tag{8.9}$$

其次，当条件(8.5)成立时，(8.4)有不变代数积分：

$$1 + Ay = 0,\ \frac{1}{2}(C + \sqrt{\Delta})x - by + 1 = 0,$$

$$\frac{1}{2}(C - \sqrt{\Delta})x - by + 1 = 0 \tag{8.10}$$

和初等通积分(其中 $\Delta = C^2 + 4b(A + b)$)：

$$|1 + Ay|^{\frac{1}{A}} \cdot \left|\frac{C + \sqrt{\Delta}}{2}x - by + 1\right|^{\frac{-C+\sqrt{\Delta}}{2b\sqrt{\Delta}}}$$

$$\times \left|\frac{C - \sqrt{\Delta}}{2}x - by + 1\right|^{\frac{C+\sqrt{\Delta}}{2b\sqrt{\Delta}}} = \text{const}. \tag{8.11}$$

这里须设 $Ab(A + b)C\Delta \neq 0$，而 $a$ 可经转轴而使之为零。

上式当 $\Delta < 0$ 时是复的，这时可改用实的通积分：

$$|1 + Ay|^{\frac{1}{A}}\left\{\left(\frac{Cx}{2} - by + 1\right)^2 - \frac{\Delta x^2}{4}\right\}^{\frac{1}{2b}}$$

$$\times e^{-\frac{C}{b\sqrt{-\Delta}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{-\Delta}x}{Cx - 2(by - 1)}} = \text{const}. \tag{8.12}$$

当 $A = 0$，$bC \neq 0$ 时可证存在通积分：

$$2by + \frac{\sqrt{\Delta} + C}{\sqrt{\Delta}}\ln\left[\frac{C - \sqrt{\Delta}}{2}x - by + 1\right]$$

$$+\frac{\sqrt{\Delta}-C}{\sqrt{\Delta}}\ln\left[\frac{C+\sqrt{\Delta}}{2}x-by+1\right]=\text{const}. \qquad (8.13)$$

其他 $A+b=0$, $bC\neq0$ 或 $\Delta=0$, $C\neq0$ 时也有类似的通积分（见文献[8.3]）。又 $C=0$ 的情况可列入条件(8.6)。

其次，当条件(8.6)成立而 $Ab(A+b)(A+2b)(b+d)\neq0$ 时，(8.4)有不变代数曲线(见文献[8.1]中§9)：

$$1+Ay=0 \text{ 和 } b(A+b)(A+2b)x^2-(A+b-d)$$
$$+2b(A+b-d)y+bd(A+2b)y^2=0 \qquad (8.14)$$

和初等通积分：

$$|1+Ay|^{\frac{2b}{A}}[b(A+b)(A+2b)x^2-(A+b-d)$$
$$+2b(A+b-d)y+bd(A+2b)y^2]=\text{const}. \qquad (8.15)$$

当 $Ab(A+b)(A+2b)=0$ 时，应另行考虑。例如当 $A=0\neq b$ 时，(8.4)有不变代数曲线：

$$f=2b^3x^2+2b(b-d)y+2b^2dy^2+d-b=0 \qquad (8.16)$$

和初等通积分：

$$\frac{y}{2b^2}+\frac{1}{4b^3}\ln f=\text{const}. \qquad (8.17)$$

其他情况见文献[8.3]。

最后，当条件(8.7)成立时，(8.4)有不变代数曲线：

$$f_1=d^2+2d(d^2+a^2)y+(a^2+d^2)(ax-dy)^2=0 \qquad (8.18)$$

和

$$f_2=d^2+3d(d^2+a^2)y+3d^2(d^2+a^2)y^2$$
$$-3ad(d^2+a^2)xy+(d^2+a^2)(dy-ax)^3=0 \qquad (8.19)$$

以及初等通积分

$$f_2^2f_1^{-3}=\text{const} \qquad (8.20)$$

这最后的结果也见于文献[8.1]中§9。

反之，文献[8.3]中又证明：若(8.4)有一直线解和一二次曲线解(它不是二重直线)，则(8.4)必满足条件(8.5)或(8.6)。又若此二次曲线解非退化，则在适当的坐标系之下，系统(8.4)必满足条件(8.6)。又若(8.4)有一抛物线解和一非退化三次代数曲线解，

则它必满足条件(8.7)。由此可见，对二次系统(8.4)，存在中心时必有初等逐积分。在文献[8.48]中还证明了二次系统若有高于一阶的细焦点，又有不可约二次或三次代数积分，则此细焦点必为中心。

对于某些特殊类型的三次系统，C.J.Christopher [8.40]做过与文献[8.4]中类似的工作，见本书§17。总的说来，对高于二次的多项式系统，只有在极特殊的情况下解决了存在中心的充要条件，即下列几种：

1) 缺二次项的三次系统(见文献[8.41])：

$$\begin{cases} \dot{x} = b_{10}x + b_{01}y + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3, \\ \dot{y} = -c_{10}x - c_{01}y - c_{30}x^3 - c_{21}x^2y - c_{12}xy^2 - c_{03}y^3, \end{cases} \tag{A}$$

$O(0, 0)$为中心的充要条件有两个，即以下二条件之一成立：

a) $\varepsilon > 0$, $\lambda = 0$, $b_{01}\alpha - 2b_{10}\beta + c_{10}\gamma = 0$,

$$(2b_{10}c_{03} - b_{01}b_{21} - c_{10}b_{03})\alpha + 2(c_{10}c_{03} + b_{01}b_{30})\beta + (2b_{10}b_{30} - c_{10}c_{12} - b_{01}c_{30})\gamma = 0,$$

$$(b_{10}b_{03} - 2b_{01}c_{03})\alpha^2 - 4b_{01}b_{30}\beta^2 - b_{10}c_{30}\gamma^2 - 2b_{01}b_{30}\alpha\gamma + 2(b_{01}b_{21} - b_{10}c_{03})\alpha\beta + (2b_{01}c_{30} + b_{10}c_{21} - b_{10}b_{30})\beta\gamma = 0;$$

b) $\varepsilon > 0$, $\lambda = 0$, $b_{01}\alpha - 2b_{10}\beta + c_{10}\gamma = 0$,

$$\varepsilon(5b_{21} + \beta) + 15(c_{10}^2b_{03} - c_{10}b_{10}b_{12} + b_{10}^2b_{21} - b_{10}b_{01}b_{30}) = 0,$$

$$\varepsilon(5c_{21} + \alpha) + 15(c_{10}^2c_{03} - c_{10}b_{10}c_{12} + b_{10}^2c_{21} - b_{10}b_{01}c_{30}) = 0,$$

$$\varepsilon(5c_{12} - \beta) + 15(b_{01}^2c_{30} - b_{10}b_{01}c_{21} + b_{10}^2c_{12} - c_{10}b_{10}c_{03}) = 0,$$

$$9c_{21}^2 - 20c_{12}c_{30} + 21b_{30}^2 + 66c_{21}b_{30} - 80b_{21}c_{30} = 0.$$

其中　$\varepsilon = c_{10}b_{01} - b_{10}c_{01}$, $\lambda = c_{01} - b_{10}$, $\alpha = c_{21} - 3b_{30}$,

$\beta = c_{12} - b_{21}$, $\gamma = 3c_{03} - b_{12}$.

如果取定 $\lambda = 0$，从而 $\varepsilon = c_{10}b_{01} - b_{10}^2 > 0$，然后作线性变换，化(A)的线性项为最简形式，再转轴使第一方程中 $x^2y$ 的系数与第二方程中 $xy^2$ 的系数绝对值相等，符号相反。则(A)可化为(仍用 $x$、$y$、$t$ 记三个变量)：

$$\dot{x} = y + (\omega + \theta - \alpha)x^3 + (\eta - 3\mu)x^2y + (3\omega - 3\theta + 2\alpha - \xi)xy^2 + (\mu - \nu)y^3,$$

$$\dot{y} = -x - (\mu+\nu)x^3 - (3\omega+3\theta+2a)x^2y - (\eta-3\mu)xy^2 - (\omega-\theta-a)y^3. \quad (B)$$

这时，$(B)$以$O(0, 0)$为中心的充要条件比较简单，即以下三条件之一成立：

a) $\xi = a = 0$;

b) $\xi = \gamma = \theta = 0$;

c) $\xi = \gamma = \omega = \eta = 4(\mu^2+\theta^2) - a^2 = 0$.

2) 特殊三次系统：

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -x + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3. \quad (C)$$

I.S.Kukles（见文献[8.42]）得到$O(0, 0)$为中心的充要条件是下列四组条件之一成立：

(K1) $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 0$;

(K2) $a_7 = M_1 = M_2 = M_3 = 0$;

(K3) $a_7 = a_5 = a_2 = 0$;

(K4) $a_7 = a_3 = a_3 = a_1 = 0$.

其中
$$M_1 = a_4a_2^2 + a_5m,$$
$$M_2 = (3a_7m + m^2 + a_6a_2^2)a_5 - 3a_7m^2 - a_6a_2^2m,$$
$$M_3 = m + a_1a_2 + a_5,$$
$$M_4 = 9a_6a_2^2 + 2a_2^4 + 9m^2 + 27a_7m,$$
$$m = 3a_7 + a_2a_3.$$

四年前有两位中国数学家用计算焦点量的方法（见文献[8.43]）发现方程

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -x + a_1x^2 - 2a_1y^2 - \frac{1}{3}a_1^2x^3 - 3a_7x^2y + a_7y^3, \quad (D)$$

（其中$18a_7^2 = = a_1^4$）可能以$O(0, 0)$为中心，但系数不满足上列四条件的任何一个。在文献[8.44]中从理论上证明了$O$确是$(D)$的中心。证法很简单，即用变换$(x, y) \mapsto (a_1x, a_1y)$化$(D)$为：

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -x + x^2 - 2y^2 - \frac{1}{3}x^3 - k^{-1}x^2y + \frac{1}{3}k^{-1}y^3. \quad (E)$$

其中$k = \pm\sqrt{2}$，然后找出一个积分因子为：

$$\varphi(x, y) = [x(y+kx) + 3k(1-x)]^{-3}\exp\left[x\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right].$$

由此可见文献 [8.42] 中所得的四条件并非以 $O$ 为中心的全部充要条件。

在文献[8.44]中还得到了当 $a_7=0$ 时系统 $(C)$ 以 $O(0, 0)$ 为中心的充要条件是下列四组条件之一成立：

$$\begin{aligned}
&a)\quad a_2 = a_5 = 0;\\
&b)\quad a_1 = a_3 = a_5 = 0;\\
&c)\quad a_4 = a_5 = a_6 = a_1 + a_3 = 0;\\
&d)\quad a_4 = a_3(a_1+a_3),\ a_5 = -a_2(a_1+a_3),\\
&\qquad a_6 = -(a_1+a_3)a_3^2(a_1+2a_3)^{-1}.
\end{aligned} \tag{F}$$

稍后，在文献[8.45]中发现了$(F)$可以从$(K2)$、$(K3)$、$(K4)$导出，因此后者也是系统$(C)$在 $a_7=0$ 时以 $O$ 为中心的充要条件，在[8.45]中还证明了：当 $a_7\neq 0$ 而 $a_2=0$ 时，$(C)$以 $O$ 为中心当且仅当：

$$a_6=0,\ a_3=-2a_1,\ a_4=\frac{-1}{3}a_1^2,\ a_5=-3a_7,\ 18a_7^2=a_1^4$$

(类似的条件也在文献[8.49]中得到)。这就比文献[8.43]、[8.44]更前进了一步。此外，在[8.40]与[8.45]中还得到了两个不属于$(K1)\sim(K4)$，使$(C)$以 $O$ 为中心的条件。但对于最一般的系统$(C)$，以 $O$ 为中心的充要条件，问题仍未解决。

3) 特殊三次系统

$$\begin{cases}
\dot{x} = \lambda x + y + a_1x^2 + (a_2+2b_1)xy + (a_3-a_1)y^2\\
\qquad + x(a_4x^2 + a_5xy + (a_6-a_4)y^2),\\
\dot{y} = -x + \lambda y + b_1x^2 + (b_2-2a_1)xy - b_1y^2\\
\qquad + y(a_4x^2 + a_5xy + (a_6-a_4)y^2).
\end{cases} \tag{G}$$

N.Yasmin(文献[8.46])得到了当 $\lambda=0$ 时 $O(0, 0)$ 是$(G)$的高于5阶的细焦点的6个充分条件如下：

$a)$ $a_3 = a_6 = 0$;

$b)$ $a_6 = a_2a_3/4,\quad a_5 = \dfrac{1}{16}(8b_1a_2 - 3b_2^2 + 8b_2a_1 + 3a_2^2),$

$$a_4 = \frac{1}{16}(4a_1a_2 - a_2b_2 - 4b_1b_2);$$

c) $a_6 = \frac{1}{4}a_2a_3,$

$$a_5 = \frac{1}{16}(25a_3^2 - 40a_1a_3 + 10b_2a_3 + 3a_2^2 - 3b_2^2 + 8b_2a_1 + 8b_1a_2),$$

$$a_4 = \frac{1}{16}(20a_3b_1 + 5a_2a_3 - 4b_1b_2 - b_2a_2 + 4a_1a_2), \qquad (H)$$

$$(4b_1 + a_2)^2 + (b_2 - 4a_1)^2 + 2a_3(b_2 - 4a_1) - 3a_3^2 = 0;$$

d) $a_2 = b_2 = a_4 = a_5 = a_6 = 0;$

e) $a_2 = b_1 = a_4 = a_6 = 0;$

f) $a_6 = -a_3b_1,\ a_4 = -a_1b_1.$

显见当 d) 成立时，(G) 的发散量恒等于零，当 e) 成立时，(G) 关于 $y$ 轴对称，故 $O$ 在这两种情况下必为中心。又当 b) 或 f) 成立时，在文献 [8.46] 中把 (G) 化为形如

$$\dot{\rho} = \alpha\rho^3 + \beta\rho^2$$

的极坐标方程，从而得证 $O$ 为中心。

在文献 [8.40] 中用找不变代数曲线的办法解决了另外两种情况，即当 a) 成立时，(G) 有四条积分直线，从而有形如

$$\prod_{i=1}^{4}(\gamma_i x + s_i y + 1)^{\lambda_i}$$

的首次积分，故以 $O$ 为中心。当 c) 成立时 (G) 有一积分直线 $L=0$ 和一积分二次曲线 $S=0$，利用它们就可证明 $S - L^2 = K$ 是 (G) 的首次积分(参见本书 §17 中的定理)。这样，在 [8.40] 中就证明了 (G) 以 $O$ 为中心的充要条件是 $\lambda = 0$ 以及 (H) 的任一条件成立。

但应当提到，关于一般多项式系统的中心的文章最近有文献 [8.39]。其中证明中心只能有三类，即有 Darboux 积分的，有 Darboux-Schwartz-Christoffel 积分的和有理可逆的。存在有限步的几乎代数的计算方法，它可以决定已给的多项式系统有或没有中心。又证明了有中心的三次多项式系统必有 Darboux 积分或为有理可逆。这里所谓有理可逆系统就是“轨线关于某一直线

为对称时，位于对称轴上的焦点型奇点必为中心”这一原理的推广。所谓“几乎代数的算法”是指：只需求解有限多个代数方程或不等式以及至多一个非代数方程。在文献[8.39]中还找到一个三次系统，它的中心可以分支出11个小振幅极限环。此外，研究一般$n$次多项式系统的中心判定的还有文献[8.47]。研究Lienard方程中心判定的，最近还有文献[8.50]。

关于二次系统有两个中心的条件和相图，在文献[8.7]中有详细讨论。当然，如果二次系统只有一个中心，则可能的相图还要更多一些。研究这问题的有文献[8.8]、[8.9]、[8.16]和[8.19]。

R.Conti在文献[8.10]中重新对二次系统的中心区域进行分类，并且只应用方程的轨线的几何性质推导了中心区域的性质。其后，在文献[8.11]、[8.12]、[8.13]、[8.14]、[8.15]中Conti又进一步研究了三次以至$n$次多项式系统的中心区域的几何性质，得到许多有趣的例子，也提出许多难以解决的问题。另一方面，根据二次系统的一个中心区域不能充满全平面的事实，他提出了如下的猜想：

**命题 8.1** $2n$次多项式系统的一个中心区域不能充满全平面。

这个猜想后来在文献[8.17]、[8.18]中各自独立地证实了。

本节将首先按照文献[8.18]来证明上述猜想，然后较详细地介绍Conti的总结性文章[8.15]的主要内容以及近二、三年来在此论文发表后的新进展。

容易看出，对于$2n+1$次多项式系统，上述猜想是不成立的。因为

$$\dot{x}=-y^{2n+1},\ \dot{y}=x^{2n+1}\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

的轨线族

$$x^{2n+2}+y^{2n+2}=C$$

就是一系以$O(0,\ 0)$为中心的，充满全平面的闭曲线。

现在考虑平面$2n$次多项式系统：

$$\dot{x}=P_{2n}(x,\ y),\ \dot{y}=Q_{2n}(x,\ y)。\tag{8.21}$$

不妨设 $P_{2n}$ 与 $Q_{2n}$ 没有公因式，否则，可约去公因式以后再讨论。又设 $O(0, 0)$ 是(8.21)的中心点，记

$$P_{2n}(x, y)=\sum_{m=1}^{2n} p_m(x, y),\quad Q_{2n}=\sum_{m=1}^{2n} q_m(x, y). \tag{8.22}$$

其中 $p_m(x, y)$，$q_m(x, y)$ 是 $x$、$y$ 的 $m$ 次齐次多项式。记

$$\begin{aligned} p_m(x, y) &= a_0^{(m)}x^m + a_1^{(m)}x^{m-1}y + \cdots + a_{m-1}^{(m)}xy^{m-1} + a_m^{(m)}y^m, \\ q_m(x, y) &= b_0^{(m)}x^m + b_1^{(m)}x^{m-1}y + \cdots + b_{m-1}^{(m)}xy^{m-1} + b_m^{(m)}y^m. \end{aligned} \tag{8.23}$$

由于 $P_{2n}$ 与 $Q_{2n}$ 中至少有一个必须是 $2n$ 次多项式，故

$$(a_0^{(2n)})^2 + (a_1^{(2n)})^2 + \cdots + (a_{2n}^{(2n)})^2 + (b_0^{(2n)})^2 + \cdots + (b_{2n}^{(2n)})^2 \neq 0.$$

不失一般性，可设

$$(a_0^{(2n)})^2 + (a_1^{(2n)})^2 + \cdots + (a_{2n}^{(2n)})^2 \neq 0. \tag{8.24}$$

证明(8.21)的一个中心区域不能充满全平面，主要依靠它的轨线在无穷远处的性质。因此有必要引进齐次坐标，并且把原点移到赤道上去。首先令

$$x=\frac{1}{z},\quad y=\frac{u}{z},\quad \frac{d\tau}{dt}=\frac{1}{z^{2n-1}}. \tag{8.25}$$

这里我们假设

$$\begin{aligned} (b_0^{(2n)})^2 &+ (b_1^{(2n)} - a_0^{(2n)})^2 + (b_2^{(2n)} - a_1^{(2n)})^2 + \cdots \\ &+ (b_{2n}^{(2n)} - a_{2n-1}^{(2n)})^2 + (a_{2n}^{(2n)})^2 \neq 0. \end{aligned} \tag{8.26}$$

当条件(8.26)不成立时，可改设 $\dfrac{d\tau}{dt}=\dfrac{1}{z^{2n-2}}$。方程(8.21)在变换(8.25)之下成为：

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = \displaystyle\sum_{m=0}^{2n-1} (b_0^{(m)} - a_m^{(m)}u^{m+1}) z^{2n-m} \\ \qquad + \displaystyle\sum_{m=1}^{2n-1}\sum_{i=1}^{m} (b_i^{(m)} - a_{i-1}^{(m)}) u^i z^{2n-m} + f(u), \\ \dfrac{dz}{d\tau} = -z\left[a_0^{(0)}z^{2n} + (a_0^{(1)} + a_1^{(1)}u) z^{2n-1} + \cdots\right. \\ \qquad \left. + \displaystyle\sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)}u^i \cdot z^{2n-m} + \cdots + \sum_{i=0}^{2n} a_i^{(2n)}u^i\right]. \end{cases} \tag{8.27}$$

其中

$$f(u)=b_0^{(2n)}+(b_1^{(2n)}-a_0^{(2n)})u+\cdots$$
$$+(b_{2n}^{(2n)}-a_{2n-1}^{(2n)})u^{2n}-a_{2n}^{(2n)}u^{2n}. \tag{8.28}$$

其次，令

$$x=\frac{v}{z},\quad y=\frac{1}{z},\quad \frac{d\tau}{dt}=\frac{1}{z^{2n-1}}, \tag{8.29}$$

则(8.21)在变换(8.29)之下成为：

$$\frac{dv}{d\tau}=-\Big[\sum_{m=0}^{2n}(a_m^{(m)}-b_0^{(m)}v^{m+1})z^{2n-m}$$
$$+\sum_{m=1}^{2n-1}\sum_{i=1}^{m}(a_{i-1}^{(m)}-b_i^{(m)})v^{m+1-i}z^{2n-m}\Big]-g(v),$$
$$\frac{dz}{d\tau}=-z\Big[b_0^{(0)}z^{2n}+\sum_{m=1}^{2n-1}\sum_{i=0}^{m}b_i^{(m)}v^{m-i}z^{2n-m}$$
$$+\sum_{i=0}^{2n}b_i^{(2n)}v^{m-i}\Big],\quad 2n-m\geqslant 1. \tag{8.30}$$

其中

$$g(v)=a_{2n}^{(2n)}+(a_{2n-1}^{(2n)}-b_{2n}^{(2n)})v+\cdots$$
$$+(a_0^{(2n)}-b_1^{(2n)})v^{2n}-b_0^{(2n)}v^{2n+1}. \tag{8.31}$$

由(8.27)及(8.28)看出：当 $a_{2n}^{(2n)}\neq 0$ 时，赤道 $z=0$ 是(8.27)的轨线，其上有奇点($u=u^*$, $z=0$)，$u^*$ 是 $f(u)=0$ 的一个实根。如果 $a_{2n}^{(2n)}=0$，则由(8.30)与(8.31)看出：赤道是(8.30)的轨线，其上有奇点($v=0$, $z=0$)。故知在条件(8.26)之下，(8.21)至少存在一个无穷远奇点。为了证明(8.21)的以 $O(0,0)$ 为中心的中心区域不能充满全平面，不妨设(8.21)只有唯一的有限远奇点 $O$。现在证明至少存在一条异于赤道的轨线，它当 $t\to+\infty$ 或 $-\infty$ 时，进入某一无穷远奇点 $A$。

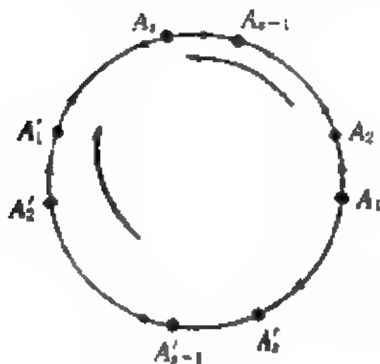


图 8.1

由于 $P_{2n}$ 与 $Q_{2n}$ 无公因子，故赤道上的奇点都是孤立的，且只有有限个。设为 $A_1, A_2, \cdots, A_s$。又由于赤道是轨线，所以 $A_1, \cdots, A_s$ 都不能是中心或焦点。因而每一奇点 $A_i$ 的邻域都可以分解为椭圆域、抛物域和双曲域，其中的轨线称为对于 $A_i$ 的椭圆轨线、抛物轨线和

双曲轨线。当 $A_i$ 有椭圆域、抛物域或多于两个的双曲域时，前段末所说的那种进入或离开 $A_i$ 的异于赤道的轨线显然存在。今设一切 $A_i$ 都是只有两双曲域的奇点，且双曲域分布在赤道的两边。由于(8.25)的最后一式知，$\overline{A_iA_{i+1}}$ 上轨线的正方向与其直径相对线段 $\overline{A_i'A_{i+1}'}$ 上轨线的正方向相反(如图 8.1 所示)。但这样一来，在 $A_s$ 与 $A_1'$ 之间又应至少存在第 $s+1$ 个奇点，这与假设矛盾。此矛盾说明了必存在从有限远正向或负向跑向赤道的轨线。

其次，当条件(8.26)不成立时，我们改为作变换：

$$x=\frac{1}{z},\quad y=\frac{u}{z},\quad \frac{d\tau}{dt}=\frac{1}{z^{2n-2}}. \tag{8.32}$$

则(8.21)变为：

$$\begin{cases}\dfrac{du}{d\tau}=z\Big[\displaystyle\sum_{m=0}^{2n-2}\left(b_0^{(m)}-a_m^{(m)}u^{m+1}\right)z^{2n-2-m}\\ \qquad+\displaystyle\sum_{m=1}^{2n-2}\sum_{i=1}^{m}\left(b_i^{(m)}-a_{i-1}^{(m)}\right)u^iz^{2n-2-m}\Big]+f_1(u),\\ \dfrac{dz}{d\tau}=-\Big[a_0^{(0)}z^{2n}+\left(a_0^{(1)}+a_1^{(1)}u\right)z^{2n-1}+\cdots\\ \qquad+\displaystyle\sum_{i=0}^{m}a_i^{(m)}u^iz^{2n-m}+\cdots+\sum_{i=0}^{2n}a_i^{(2n)}u^i\Big].\end{cases} \tag{8.33}$$

其中

$$\begin{aligned}f_1(u)=&\,b_0^{(2n-1)}+\left(b_1^{(2n-1)}-a_0^{(2n-1)}\right)u+\cdots\\ &+\left(b_{2n-1}^{(2n-1)}-a_{2n-2}^{(2n-1)}\right)u^{2n-1}-a_{2n-1}^{(2n-1)}u^{2n}.\end{aligned}$$

类似地作变换

$$x=\frac{v}{z},\quad y=\frac{1}{z},\quad \frac{d\tau}{dt}=\frac{1}{z^{2n-2}}.$$

则(8.21)变为：

$$\begin{aligned}\frac{dv}{d\tau}=&\,z\Big[\sum_{m=0}^{2n-2}\left(a_m^{(m)}-b_0^{(m)}v^{m+1}\right)z^{2n-2-m}\\ &+\sum_{m=1}^{2n-2}\sum_{i=1}^{m}\left(a_{i-1}^{(m)}-b_i^{(m)}\right)v^{m+1-i}z^{2n-2-m}\Big]+g_1(v),\\ \frac{dz}{d\tau}=&-\Big[b_0^{(0)}z^{2n}+\left(b_0^{(1)}v+b_1^{(1)}\right)z^{2n-1}+\cdots\\ &+\sum_{i=0}^{m}b_i^{(m)}v^{m-i}z^{2n-m}+\cdots+\sum_{i=0}^{2n}b_i^{2n}v^{2n-i}\Big].\end{aligned} \tag{8.34}$$

其中

$$g_1(v) = a_{2n-1}^{(2n-1)} + (a_{2n-2}^{(2n-1)} - b_{2n-1}^{(2n-1)})v + \cdots + (a_0^{(2n-1)} - b_1^{(2n-1)})v^{2n-1} - b_0^{(2n-1)}v^{2k}.$$

由此可见这时赤道不是轨线，其上可能有奇点，也可能有与轨线相切的点，但个数都是有限的。因此，这时一定存在轨线，其正向或负向从有限远处跑向赤道且穿过它。

以上两种情况都说明了 $O(0, 0)$ 的中心区域如果存在的话，必不能充满全平面。命题8.1得证。∎

注意：当系统有充满全平面的中心区域时，赤道当然是中心区域的边界，但其上仍可能有奇点，例如：

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x^{2k+1}, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{8.35}$$

以后我们称一个充满全平面的中心区域为“全局中心”。下面转到中心区域的讨论：熟知的是，即使对于三次系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_1(x, y) + p_2(x, y) + p_3(x, y), \\ \dot{y} &= q_1(x, y) + q_2(x, y) + q_3(x, y), \end{aligned} \tag{8.36}$$

其中 $p_i$ 与 $q_i$ 为 $x$、$y$ 的 $i$ 次齐次式，当 $p_1^2 + q_1^2 \neq 0$ 时，如何判别 $O(0, 0)$ 是中心或不是中心，仍未有满意的结果[1]。但不难举例说明，这时中心，甚至全局中心都是可能存在的。

**例 8.2** 系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -2xy - x^3 \tag{8.37}$$

以 $O$ 为唯一奇点，一切轨线都与坐标轴相交，且对称于 $y$ 轴，故 $O$ 是全局中心。

**例 8.3** 系统

$$\dot{x} = -y + x^2, \quad \dot{y} = x - 2xy + 2x^3 \tag{8.38}$$

有通积分

$$x^2 + (y - x^2)^2 = C, \tag{8.39}$$

故 $O$ 为全局中心。

---

1) 当 $p_1^2 + q_1^2 \neq 0$ 时我们总可通过坐标变换把一次项化简，使 (8.35) 成为：

$$\dot{x} = y + p_2(x, y) + p_3(x, y), \quad \dot{y} = -x + q_2(x, y) + q_3(x, y),$$

或

$$\dot{x} = y + p_2(x, y) + p_3(x, y), \quad \dot{y} = q_2(x, y) + q_3(x, y).$$

对于非全局中心$O$，以$N_0$记以$O$为中心的中心区域，以$\partial N_0$记其边界。

**定理 8.1** $\partial N_0$是一个不变集。

证明略。事实上，它是由一些轨线段(可能有赤道上的弧段)和奇点(可能有无穷远奇点)所组成。

以下的引理（见文献[8.1]中§11)对于研究$\partial N_0$的性质很有用处。

**引理 8.1** 一条$m$次代数曲线$L_m$和$n$次多项式系统的一切轨线最多共有$m(n+m-1)$个切点(包括奇点在内)。若切点超过此数，则$L_m$本身便是轨线。

**定理 8.2** 一直线与$n$次多项式系统

$$\dot{x}=P_n(x, y), \quad \dot{y}=Q_n(x, y) \tag{8.40}$$

的一条闭轨最多有$n+1$个交点，从而一直线与$\partial N_0$最多也只能有$n+1$个交点。

这是引理8.1的推论。

**定理 8.3** 若$N_0$为有界区域，则$\partial N_0$不能是一闭轨。

这是熟知的定理。但当$N_0$为全平面，$\partial N_0$=赤道时，其上却可以不存在奇点，这时赤道便是一闭轨（见命题1后面的例子)。

**定理 8.4** $\partial N_0$上的一条开轨线的两端都必沿一定的方向趋于一个奇点。

这可借助引理8.1，用反证法证明。

**定理 8.5** $\partial N_0$上的一奇点至少为$\partial N_0$上两条开轨线的端点。

但此奇点也可能是多于两条开轨线的端点，如图8.2所示；中心区域的边界还可以有更复杂的，如图8.3所示。

下面把中心区域分成四类：

1) 若$N_0$为全平面，即$O$为全局中心，则称它为$A$类。

2) 若$N_0$为无界，但不是全平面，又$\partial N_0$上不含有限远奇点，则称它为$B$类。

3) 若$N_0$为无界，不是全平面，$\partial N_0$含有限远奇点，则称它为




图 8.2




图 8.3

$C$类。

4) $N_0$ 为有界，称它为$D$类。

**定理 8.6** 存在这样的$n$次系统 $(n\geqslant 2)$，它有$n$个$B$类中心域。

$n=2$时定理的结论是熟知的。对一般的$n$，例子很难举，需要一定的技巧。下面是文献[8.14]中的例子。

**例 8.4** 设$\nu$为正整数，记

$$P(x)=\prod_{s=1}^{\nu}(x^2-s^2). \tag{8.41}$$

设$q>0$，定义

$$V(x,\ y)=e^{-x^2-y^2}[P(x)y-q], \tag{8.42}$$

则$V(x,\ y)=C$是$n=2\nu+2$次多项式系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-2P(x)y^2+2qy+P(x),\\ \dot{y}&=[2xP(x)-P'(x)]y-2qx\end{aligned} \tag{8.43}$$

的通积分。易见

$$P'(x)=2xP(x)\sum_{s=1}^{\nu}(x^2-s^2)^{-1}.$$

由于$V(x,\ y)\to 0$当$x^2+y^2\to+\infty$，故在区域

$$E=\{(x,\ y):P(x)y-q<0\} \tag{8.44}$$

中$V(x,\ y)$至少有一极小值点$S$，而在构成$E$的余集的$2\nu+1=n-1$个区域的每一个之中，$V(x,\ y)$都各至少有一极大值点。(由文献[8.35] pp.172～173知道)$V(x,y)$的这些极值点都是(8.43)的中心点，因此(8.43)至少有$n$个中心。图8.4画的是$\nu=3$，

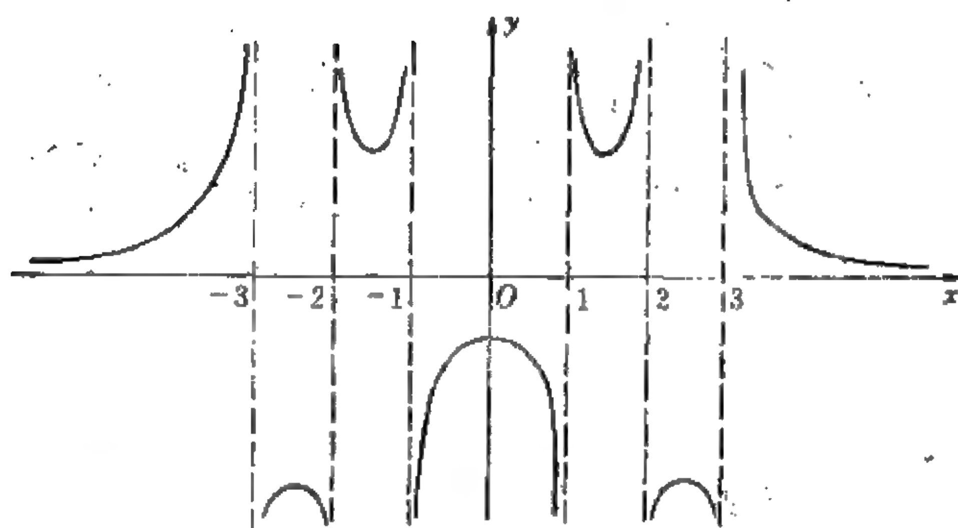



图 8.4

$n=8$ 的情况。$P(x)y=q$ 由七条无界轨线构成，$E$ 的边界有七条无界轨线，都不通过有限远奇点，$E$ 的每一余集都只各有一条边界。

当 $|q|$ 不够大时，$E$ 中的奇点可能不只一点 $S$。下面证：当 $q\gg 1$ 时，$S$ 是 $E$ 中唯一的奇点，从而 $S$ 的中心区域是 $B$ 类的，它有 $2\nu+1=n-1$ 条无界轨线作为边界。为此，注意铅直等倾线的一支

$$2P(x)y=q-\sqrt{q^2+2P^2(x)} \tag{8.45}$$

含于 $E$ 中，它与水平等倾线

$$x\left\{P(x)\left[1-\sum_{s=1}^{\nu}(x^2-s^2)^{-1}\right]y-q\right\}=0 \tag{8.46}$$

只有唯一的交点：

$$S\left(0,\ \frac{q-\sqrt{q^2+2P^2(0)}}{2P(0)}\right), \tag{8.47}$$

只要 $q$ 足够大。事实上，由于

$$-P^2(x)\left[1-\sum_{s=1}^{\nu}(x^2-s^2)^{-1}\right]=-x^{4\nu}+ax^{4\nu-2}+\cdots+b,$$

故

$$\max\left\{-P^2(x)\left[1-\sum_{s=1}^{\nu}(x^2-s^2)^{-1}\right],\ x\in R\right\}=\mu<+\infty,$$

现在如果取 $2q^2>\mu$，则显见有

$$q^2+q\sqrt{q^2+2P^2(x)}\geqslant 2q^2>\mu,$$

从而

$$q^2+q\sqrt{q^2+2P^2(x)}>-P^2(x)\left[1-\sum_{s=1}^{\gamma}(x^2-s^2)^{-1}\right],$$

这表示(8.45)与(8.46)不能在 $x\neq 0$ 的那一支相交。另一方面，显见(8.45)与 $x=0$ 交于 $S$。最后，易见铅直等倾线的另一支

$$2P(x)y=q+\sqrt{q^2+2P^2(x)}$$

含在 $E$ 的余集之中，故它与(8.46)的交点不可能在 $E$ 中。

我们也可以不考虑条件 $2q^2\geqslant\mu$ 而直接证明 (8.43) 在 $E$ 的余集中恰有 $n-1$ 个奇点，从而在 $E$ 的每一余区域中恰有一个奇点，它们都是中心。为此只须注意对(8.43)有

$$xX(x, y)+yY(x, y)=xP(x)-P'(x)y^2=0。\tag{8.48}$$

分析曲线

$$X(x, y)=-2P(x)y^2+2qy+P(x)=0$$

的位于 $E$ 的余集中的 $s$ 个分支的图形与 (8.48) 的 $n-1$ 个分支的图形以及它们的相交情况，即可得出上述结论。详情从略。

例 8.4 是关于偶次多项式系统的。对奇次多项式系统有如下例子：

**例 8.5**
$$\begin{cases}\dot{x}=-2xP(x)y^2+2qy+xP(x),\\ \dot{y}=[2x^2P(x)-P(x)-xP'(x)]y-2qx,\end{cases}\tag{8.49}$$

其中 $P(x)$ 仍如(8.41)。(8.49)有通积分

$$V(x, y)=e^{-x^2-y^2}[xP(x)y-q]=C。\tag{8.50}$$

这里 $n=2\gamma+3$。

若取 $P(x)\equiv 1$，则可得：

$$\dot{x}=x+2qy-2xy^2,\quad \dot{y}=-2qx-y+2x^2y,\tag{8.51}$$

它有通积分

$$V(x, y)=e^{-x^2-y^2}(xy-q),$$

当 $4q^2>1$ 时，(8.51)有三个 $B$ 类中心域，其中心分别为 $O(0,0)$，$\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}+q},\ \pm\sqrt{\frac{1}{2}+q}\right)$，它们的边界是双曲线 $xy=q$。

今设以 $k(n)$ 表示 $n$ 次多项式系统的 $B$ 类中心区域的边界轨线(赤道除外)的最多条数。则由例 8.4 与例 8.5 知有

$$k(n)\geqslant n-1,\ n=2,\ 3,\ \cdots.$$

另一方面，如果对已给的 $B$ 类中心区域 $N$ 画一个半径很大的圆，使与 $N$ 的每一条边界相交。则易见：当 $N$ 有 $h$ 条边界轨线时，圆上就至少有 $2h$ 个与轨线相切的点。然后由引理 8.1 (取 $m=2$) 即知应有 $h\leqslant n+1$。因此有：

$$n-1\leqslant k(n)\leqslant n+1,\ n=2,\ 3,\ \cdots.$$

已知当 $n=2$ 时 $k(n)=n-1=1$，即 $k(2)$ 达到下界，但即使当 $n=3$ 时 $k(3)$ 能否取值 3？我们还不知道。下面是 R. Conti 的猜测：

**猜测 8.1**　对 $B$ 类中心域的边界轨线有

$$k(n)=n-1\ \text{对}\ n=2,\ 3,\ \cdots.$$

下面讨论 $C$ 类中心域。当 $n=2$ 时，已知边界上有唯一的有限奇点，而 $N_0$ 是以此奇点为顶点的角域的内部。下面的例子说明：存在这样的 $n$ 次系统，它有一个 $C$ 类中心域，其边界上有 $n-1$ 个有限奇点。

**例 8.6**　由

$$V(x,\ y)=e^{-x}\prod_{j=0}^{k}[(x+j^2+j)^2-(2j+1)^2y^2]\tag{8.52}$$

定义的函数 $V(x,y)$ 易见是一 $n=2k+2$ 次多项式系统的通积分。此系统的轨线对称于 $x$ 轴。$V(x,y)=0$ 的轨迹是 $n$ 条直线，它们把平面分成许多有界和无界的多角形区域。以 $R$ 记其中包含正 $x$ 轴的那个无界域(图 8.5 画的是 $k=2,\ n=6$ 的情况)。显见，$R$ 的边界上有 $2k+1=n-1$ 个有限奇点 $(j^2,\ \pm j)$ $(j=0,\ 1,2,\ \cdots,\ k)$。$R$ 的边界由连接 $(j^2,\ \pm j)$ 与 $((j+1)^2,\ \pm(j+1))$ $(j=0,\ 1,\ \cdots,\ k-1)$ 的 $2k$ 条有限直线段和两条半无限直线段：

$$(x+k^2+k)^2-(2k+1)^2y^2=0\quad(x>k^2)$$

以及一段赤道弧构成。

现在注意：若 $(x,\ y)\in R$，则 $\dfrac{\partial V}{\partial y}\gtrless 0$ 当 $y\lessgtr 0$，故对固定的

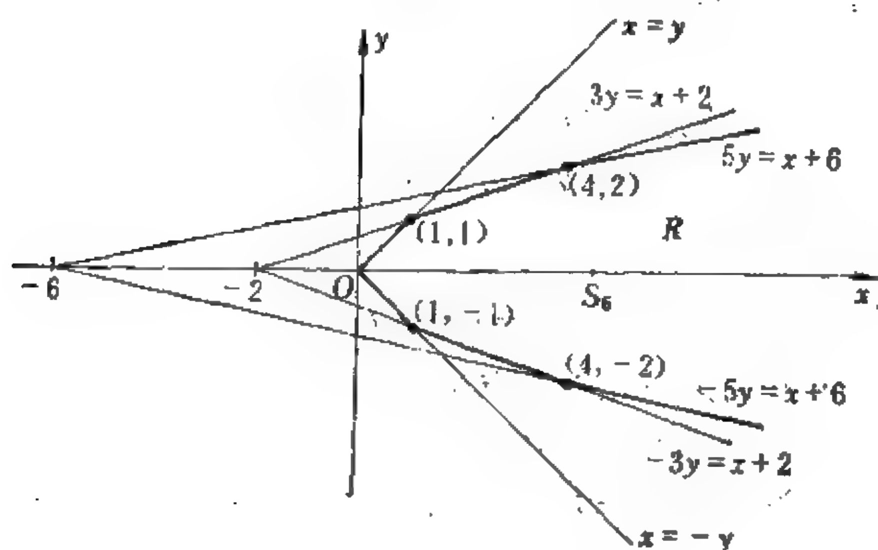



图 8.5

$x$, $V(x, y)$有一极大值在$y=0$上，而系统在$R$中的奇点应位于$x$正半轴上。且不难看出，对$x>0$, $V(x, 0)$ 有唯一的极大值在某一点$(c_n, 0)$上。因此，$V$在$R$中有唯一的极大值在$S_n(c_n, 0)$，而$S_n$是系统在$R$中唯一的奇点。例如，$S_2=(2, 0)$、$S_4=(1+\sqrt{5}, 0)$。显见$S_n$是中心，而$N_{S_n}=R$。

例8.6中出现的是偶次多项式系统。对奇次多项式系统，代替(8.52)可以改取

$$V(x, y)=e^{-x}(x-1)\prod_{j=1}^{k}[(x+j^2+j)^2-(2j+1)^2y^2], \quad (8.53)$$

则$V(x, y)=C$是一个$n=2k+1$次多项式系统的通积分，对称于$x$轴。现在$R$的边界已不出现$x=\pm y$上的线段和奇点$O(0, 0)$。代替这两线段的是$x=1$上连接$(1, 1)$与$(1, -1)$的线段，其他的与前一样。$R$的边界上有$2k=n-1$个有限奇点$(j^2, \pm j)$ $(j=1, 2, \cdots, k)$，内部有唯一的中心$S_n$。

今以$\sigma(n)$记$C$类中心区域边界上有限远奇点的个数，显见有

$$\sigma(n)\leqslant n^2-1 \quad (n>1).$$

例8.6说明了

$$\sigma(n)\geqslant n-1 \quad (n>1).$$

问题 8.1 $\sigma(n)=?$

例 8.7

$$\begin{cases}\dot{x}=(2y^3+2qy^2-2y-q)x^2-2[y^3+2qy^2+(q-1)y-q]\\ \dot{y}=-2x(y+q)(x^2y-2y-q)\end{cases}\tag{8.54}$$

有通积分：

$$V(x,\ y)=e^{-x^2-y^2}[(x^2-1)y-q](y+q)=C,\ q>0。$$

$y+q=0$ 是积分线，其上有奇点 $T(0,\ -q)$。区域

$$E=\{(x,\ y):(x^2-1)y-q<0,\ y+q>0\}$$

的边界为三次曲线 $(x^2-1)y=q$ 的两支和直线 $y=-q$。$E$ 中有唯一的奇点

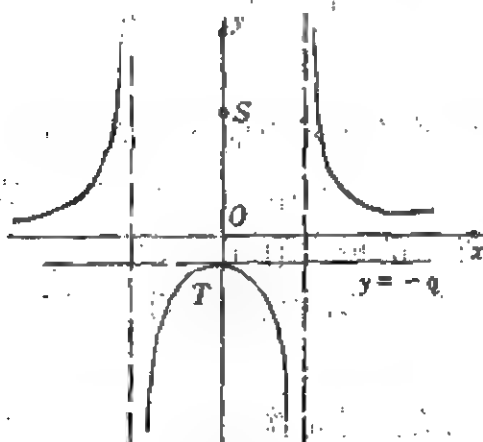


图 8.6

$$S\left(0,\ \frac{1}{2}(\sqrt{q^2+4}-q)\right),$$

它是中心。中心区域 $E$ 的边界由两条无界轨线和过奇点 $T$ 的两条半直线组成（不计赤道弧和无限远奇点）。

今以 $h(n)$ 记 $C$ 类中心区域的边界连通支（不计赤道弧）的最多条数，由引理 1 知有 $h(n)\leqslant n+1$。例 8.7 说明了 $h(5)\geqslant 3$，又对二次系统有 $h(2)=1$。下面是 Conti 的另一猜想。

猜测 8.2 $h(n)\leqslant n-1$ 对 $n=2,\ 3,\ \cdots$

$$h(n)\to\infty\ 当\ n\to\infty。$$

例 8.8 $\dot{x}=x-x^2y,\ \dot{y}=-x+x^3-xy^2$ (8.55)

有中心 $O$ 和通积分

$$y^2=(1-x^2)\ln\left|\frac{1-x^2}{1-x_0^2}\right|\ 和\ x^2=1。$$

$O$ 的中心区域的边界为 $x=\pm1$ 上的四条开轨线和两个奇点 $(\pm1,\ 0)$。

今以 $\omega(n)$ 记 $C$ 类中心区域的边界上开轨线（不计赤道弧）的

最多条数，则 $\omega(2)=2$。又显见：

$\omega(n)\geqslant h(n)+1$, $\omega(n)\geqslant \sigma(n)+1$.

例 8.6 说明了 $\omega(n)\geqslant n$；例 8.8 说明了 $\omega(3)\geqslant 4$。

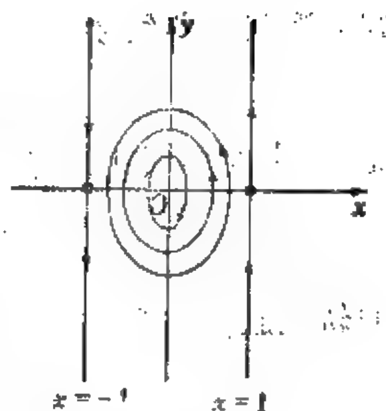


图 8.7

问题 8.2 $\omega(n)=?$

下面研究$D$类中心域。先证：对任何 $n>1$，总存在一个 $n$ 次系统，它有一$D$类中心区域。$n=2$ 时，$D$类中心区域显然存在。对一般情况，有下一个简单例子：

例 8.9

$$\dot{x}=-y(y-1)\cdots(y-n+1),\quad \dot{y}=x(x-1)\cdots(x-n+1).\tag{8.56}$$

显见此方程为可积，有 $n^2$ 个奇点，是等倾线 $y=0$, $y=1$, …, $y=n-1$ 与 $x=0$, $x=1$, …, $x=n-1$ 的交点。它们之中 $O(0,0)$ 是中心，$(0,1)$是鞍点，$(0,2)$是中心，……。一般地，$(k,j)$是鞍点，如果 $k+j$ 是奇数；它是中心，如果 $k+j$ 是偶数。当 $n\geqslant 3$ 时，$(1,1)$是中心，它所在的中心域是$D$类域。

下一例子说明 $n$ 次系统的$D$类中心域的边数可以是 $n+1$。

例 8.10 设 $k\geqslant 3$ 为正整数，$P_k$ 是以诸点

$$A_j=\left(\cos\frac{2\pi j}{k},\ \sin\frac{2\pi j}{k}\right)\ (j=0,1,\cdots,k-1)\tag{8.57}$$

为顶点的正 $k$ 边形。记

$$a_j=\sin\frac{2\pi(j+1)}{k}-\sin\frac{2\pi j}{k},\ b_j=-\cos\frac{2\pi(j+1)}{k}+\cos\frac{2\pi j}{k},\ c=-\sin\frac{2\pi}{k},$$

则 $\overline{A_jA_{j+1}}$ 所在的直线的方程为

$$a_jx+b_jy+c=0\ (j=0,1,\cdots,k-1).\tag{8.58}$$

记

$$\Pi(x,y)=\prod_{j=0}^{k-1}(a_jx+b_jy+c),$$

则 $k$ 次代数曲线族

$$H(x, y)=C \tag{8.59}$$

是 $k-1$ 次多项式系统

$$\dot{x}=H_y(x, y),\ \dot{y}=-H_x(x, y) \tag{8.60}$$

的轨线族。注意

$$\sum_{j=0}^{k-1} a_j=\sum_{j=0}^{k-1} b_j=0.$$

如果记

$$a=\begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{k-1}\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} b_0\\ b_1\\ \vdots\\ b_{k-1}\end{pmatrix},\ a^*=(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{k-1}),$$

$$b^*=(b_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_{k-1}),$$

则(8.60)可以改写为：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-c^{k-1}(a^*bx+|b|^2y)+O(x^2+y^2),\\ \dot{y}&=c^{k-1}(|a|^2x+a^*by)+O(x^2+y^2).\end{aligned} \tag{8.61}$$

故知 $O(0, 0)$ 是 (8.61) 的奇点，又 $(H_y,\ -H_x)$ 在 $O$ 的 Jacobian 为

$$J(0, 0)=-c^{k-1}\begin{pmatrix} a^*b & |b|^2\\ -|a|^2 & -a^*b\end{pmatrix},$$

从而 $\mathrm{tr}J(0, 0)=0$，$\det J(0, 0)=c^{2k-2}[|a|^2|b|^2-(a^*b)^2]>0$，故 $O$ 是(8.61)的中心。由于 $P_k$ 的各边是(8.61)的轨线，且 $O$ 位于 $P_k$ 内部，故 $O$ 是(8.61)的 $D$ 类中心。

下面证明 $\partial N_0=P_k$；先设 $k$ 为奇数，则 $P_k$ 的任何两边不相互平行。$k$ 条直线(8.58)共有 $\frac{1}{2}k(k-1)$ 个交点，它们都是(8.61)的鞍点。又这些直线分全平面为 $2k$ 个无界区域和

$\frac{1}{2}k(k-3)+1$ 个有界区域，其中之一是 $P_k$ 的内部。由于 $\Pi(x, y)$ 在每一有界区域中至少有一极值点，而这些极值点也都是奇点，故(8.60)的奇点不少于

$$\frac{1}{2}k(k-1)+\frac{1}{2}k(k-3)+1=(k-1)^2 \text{ 个。}$$

但(8.60)的奇点最多也只能有 $(k-1)^2$ 个。因此知道：每一有界区域中恰有一个奇点，它们都是中心。特别，$O$ 是 $P_k$ 中的唯一奇点，故 $O$ 的中心区域 $N_0$ 就是 $P_k$ 的内部。这时，在一切无界区域中都没有奇点。由此可看出有界区域和无界区域的区别。

次设 $k$ 是偶数：设 $k=2h\,(h=2, 3, \cdots)$，则

$$a_j=2\cos(2j+1)\frac{\pi}{2h}\sin\frac{\pi}{2h}=-a_{j+h},$$

$$b_j=2\sin(2j+1)\frac{\pi}{2h}\sin\frac{\pi}{2h}=-b_{j+h}.$$

从而

$$\begin{aligned}\Pi(x, y)&=\Pi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\\&=(-1)^h\prod_{j=0}^{h-1}\left[\rho^2(a_j\cos\theta+b_j\sin\theta)^2-c^2\right],\end{aligned}\tag{8.62}$$

由

$$a_j\cos\theta+b_j\sin\theta=2\sin\frac{\pi}{2h}\cos\left[(2j+1)\frac{\pi}{2h}-\theta\right],$$

$$c=-2\sin\frac{\pi}{2h}\cos\frac{\pi}{2h},$$

知

$$\begin{aligned}&\rho^2(a_j\cos\theta+b_j\sin\theta)^2-c^2\\&=4\sin^2\frac{\pi}{2h}\left\{\rho^2\cos\left[(2j+1)\frac{\pi}{2h}-\theta\right]-\cos^2\frac{\pi}{2h}\right\}.\end{aligned}$$

上式在 $P_k$ 内部小于零，故 $\Pi(x, y)$ 在 $P_k$ 内部大于零。又易见对固定的 $\theta$，$\Pi$ 的径向导数 $\Pi_\rho$ 是 $h$ 个负项之和(当 $\rho>0$)，故 $\Pi_\rho<0$ 当 $\rho>0$。但 $\Pi_\rho=\Pi_x\cos\theta+\Pi_y\sin\theta$，故 $\Pi_x^2+\Pi_y^2>0$ 当 $\rho>0$ 且

在 $P_k$ 内部，这样，$O$ 是 $P_k$ 内部唯一的奇点，故 $\partial N_0 = P_k$。∎

**注 8.1**　当 $k=2m$ 时，$k$ 条直线(8.58)分全平面为 $2m(m-2)+1$ 个有限域，$4m$ 个无界域。又这些直线有 $2m(m-1)$ 个交点。由于

$$2m(m-2)+1+2m(m-1)=4m^2-6m+1<(2m-1)^2,$$

故有可能有的有界区域中存在多于一个奇点。如果每一有界区域中只有一个奇点的话，则在无界区域中就可能也存在奇点。因此情况要比 $k$ 为奇数时复杂一些。当然，奇点的总数可能小于 $(2m-1)^2$。

**例 8.11**　当 $k=6$，$m=3$ 时，例 8.10 中的

$$\Pi=[(\sqrt{3}x+y)^2-3][(\sqrt{3}x-y)^2-3]\left(y^2-\frac{3}{4}\right),$$

故

$$\Pi_x=12x(3x^2-y^2-3)\left(y^2-\frac{3}{4}\right),$$

$$\Pi_y=2y\left\{(3x^2+y^2-3)^2-12x^2y^2-2(3x^2-y^2+3)\left(y^2-\frac{3}{4}\right)\right\}.$$

方程

$$\dot{x}=\Pi_y,\quad \dot{y}=-\Pi_x$$

有 19 个奇点：$(0,0)$，$\left(0,\ \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$，$\left(\pm\frac{3}{\sqrt{8}},\ \pm\frac{3}{\sqrt{8}}\right)$；$(\pm1,0)$，$(0,\pm\sqrt{3})$，$\left(\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(\pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$。其中后 12 个是 $\Pi=0$ 中 6 条直线的交点，前 7 个是 7 个有界区域的内点，此时奇点总数小于 25（12 个无界区域中没有奇点）。

**猜测 8.3**　方程(8.60)当 $k=2m$ 时，在由诸直线(8.58)所划分成的每一个有界区域中有一个中心，而在无界区域中没有奇点。

今以 $\omega_1(n)$ 记 $D$ 类中心区域的边数的最大值，例 8.10 说明了 $\omega_1(n)\geqslant n+1$ $(n>1)$。已知当 $n=2$ 时，$\omega_1(2)=3$，但 $\omega_1(3)$ 是否等于 4 还不知道。

**问题 8.3** $\omega_1(n)=?$

有界的中心区域还有许多奇特的情况，在文献[8.15]中还有许多有趣的例子。不在此一一介绍了。

$n>1$ 次的多项式系统可以有多于一个的中心。例 8.4 说明了 $n$ 次系统的中心的最多个数

$$c(n)\geqslant n \quad (n=2,3,\cdots). \tag{8.63}$$

显见 $C(2)=2$。以下的例子说明有比(8.63)更好的估计式。

**例 8.12** 设

$$P=\prod_{s=1}^{\nu}\left(\frac{x^2}{s^2}+s^2y^2-1\right),\ \nu\geqslant 1. \tag{8.64}$$

则 $P(x,y)=C$ 是 $n=2\nu-1$ 次系统

$$\dot{x}=P_y(x,y),\quad \dot{y}=-P_x(x,y) \tag{8.65}$$

的通积分。诸椭圆

$$\frac{x^2}{s^2}+s^2y^2=1 \quad (s=1,2,\cdots,\nu)$$

都是(8.65)的积分线。$\nu>1$ 时，上述任二椭圆都有 4 个交点，且这些交点都不相同，故总共有 $2\nu(\nu-1)=\frac{n^2-1}{2}$ 个交点，它们都是(8.65)的奇点。因此(8.65)除此以外最多还有

$$n^2-\frac{n^2-1}{2}=\frac{n^2+1}{2}$$

个奇点。另一方面，$P(x,y)=0$ 把全平面分成一个无界区域和：

$$2\nu-1+2[(2\nu-3)+(2\nu-5)+\cdots+1]$$

$$=2\nu-1+(2\nu-2)(\nu-1)=\frac{(2\nu-1)^2+1}{2}=\frac{n^2+1}{2}$$

个有界区域(见图 8.8) 在每一个这种区域中 $P(x,y)$ 至少有一个极大值或极小值，相应的奇点必为中心。由此知

$$C(n)\geqslant\frac{n^2+1}{2},\ 当\ n=1,3,5,\cdots. \tag{8.66}$$

**例 8.13** 设 $P(x,y)$ 如(8.64)，令 $Q(x,y)=yP(x,y)$，则 $Q(x,y)=C$ 是 $n=2\nu$ 次多项式系统

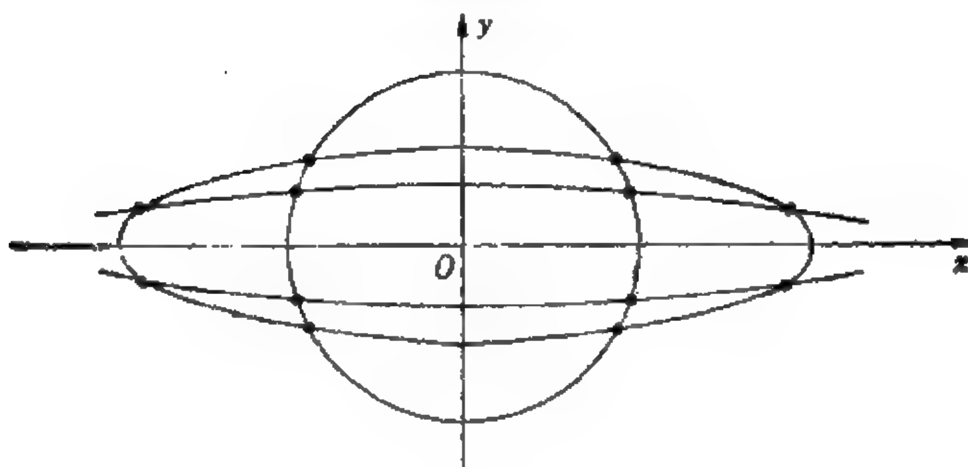



图 8.8

$$\begin{cases}\dot{x}=Q_y(x,y)=P(x,y)+yP_y(x,y),\\ \dot{y}=-Q_x(x,y)-yP_x(x,y)\end{cases}\tag{8.67}$$

的通积分。仿例8.12可证(8.67)有$\frac{n^2}{2}$个中心，因此

$$C(n)\geqslant\frac{n^2}{2}\quad 当\ n=2,4,6,\cdots。\tag{8.68}$$

(8.66)与(8.68)可统一起来写成：

$$C(n)\geqslant E\left(\frac{n^2+1}{2}\right)\quad(n=1,2,\cdots)。\tag{8.69}$$

其中$E(\ )$表示整数部分。由于$n$次系统指标$+1$的奇点最多只有$\frac{n(n+1)}{2}$个，显见

$$C(n)\leqslant\frac{n(n+1)}{2}。$$

下面是Conti的猜想。

**猜测 8.4** $C(n)=E\left(\frac{n^2+1}{2}\right)$。 (8.70)

对于三次多项式由(8.66)知有$C(3)\geqslant 5$，而(8.70)则肯定$C(3)=5$。比文献[8.15]更早发现$C(3)\geqslant 5$的是[8.21]的例子：

**例 8.13** 在

$$\dot{x}=y(1-ax^2-by^2),\ \dot{y}=-x(1-cx^2-ay^2)\tag{8.71}$$

中设$a>b\geqslant c>0$。此方程有9个有限远奇点，5个是中心，见图

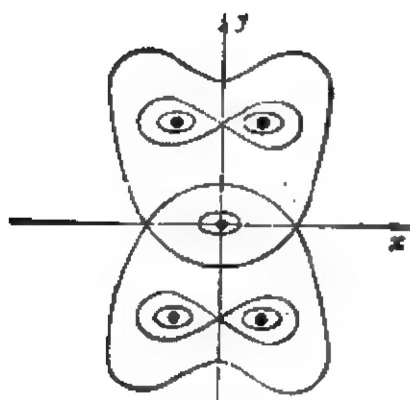


图 8.9

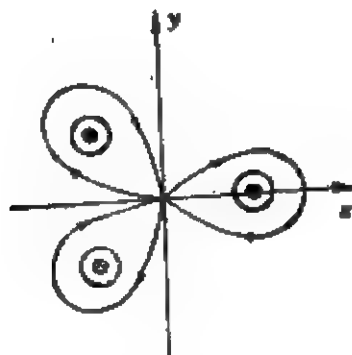


图 8.10

8.9。其中除已画出的五系各只含一个中心的闭轨族外，还有未画出的两系内含 8 字形奇异环的闭轨族和一系内含 9 个奇点延伸到无穷远的闭轨族。文献[8.21]中另一有趣的例子如下：

例 8.14

$$\dot{x}=4y\left(x^2+y^2+\frac{3}{2}x\right),\quad \dot{y}=-3y^2-4x\left(x^2+y^2-\frac{3}{4}x\right)$$

以三叶玫瑰线作为奇异环(图 8.10)，环的每一叶内部有一个中心，$O(0,0)$是指标为 $-2$ 的奇点。在奇异环外部还有一系闭轨线，一直延伸到无穷远。

以上两个例子说明我们有必要提出"广义中心"及其阶数的概念[1]。于是在图 8.9 中的两个 8 个形和图 8.10 中的三叶玫瑰可称为二级广义中心(普通的中心称为一级广义中心)。而图 8.9 中那最大的奇异环可称为三级广义中心。并且可以提出如下问题：

**问题 8.4**　$n$ 次系统的广义中心的最高阶数是多少？

估计这一问题也许可用 §7 的办法来解决。此外，我们认为文献[8.15]中另一不足之处是没有考虑赤道上的无限远奇点。正是克服了这一缺点，最近在文献[8.22]与[8.23]中证得下列两个定理，他们部分地回答了 Conti 的猜测 8.4。

**定理 8.7**　设 $X$ 是 $(n,m)$ 型 Hamilton 多项式系统，$c$ 为 $X$ 的中心的个数，则

1) 在文献[8.24]中早已提出过"广义焦点"和"广义奇点"的概念。

$$c \leqslant E\left(\frac{nm+1}{2}\right), \tag{8.72}$$

当 $n=m$ 时，(8.72) 与(8.69)一起就导出(8.70)。

**证** 当 $P_n$ 与 $Q_m$ 无公因子时(通有情况)，由§3中的Ⅱ段最后所写的[8.22]中的结果知 $X$ 的无穷远奇点的指标之和为非负的，即 $\sum\limits_{\infty} i \geqslant 0$。因此，由 Poincaré 指标定理知道 $X$ 的有限远奇点指标之和不大于1，即 $\sum\limits_{f} i \leqslant 1$。令 $A = \sum\limits_{i(s(p))<0} i_{s(p)}$，则有 $\sum\limits_{f} i = c + A \leqslant 1$，另一方面又有

$$\sum_{f} |i| = c - A \leqslant nm$$

(§7 定理 7.2)，两式相加，即得(8.72)。■

当 $P_n$ 与 $Q_m$ 有公因子时可借扰动方法证明定理的结果仍成立。

用类似的办法还可以证明，当 Hamilton $(n, m)$ 型多项式系统 $X$ 有 $c = E\left(\frac{nm+1}{2}\right)$ 个中心时，则它必有 $nm$ 个实奇点，其中 $c$ 个为中心，$nm - E\left(\frac{nm+1}{2}\right)$ 个为鞍点，又若 $X$ 有最多个数的鞍点，则 $X$ 此时必有 $nm$ 个奇点，它们都是中心或鞍点(证明见文献[8.22])。

**定理 8.8** 对 $(n, m)$ 型多项式系统，以 $C_{n,m}$ 与 $P_{n,m}$ 分别记 $X$ 的中心与指标为 $+1$ 的奇点个数，则(设 $n \geqslant m$)：

i) $C_{n,m} = \frac{nm}{2}$，当 $n \neq m \pmod 2$。

ii) $E\left(\frac{nm+1}{2}\right) \leqslant C_{n,m} \leqslant P_{n,m} = \frac{(n+1)m}{2}$，

当 $n \neq m$，$n \equiv m \pmod 2$。 (8.73)

iii) $E\left(\frac{n^2+1}{2}\right) \leqslant C_{n,n} \leqslant P_{n,n} - 1 = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$，当 $n > 1$。

**证** 由 $C_{n,m} \leqslant P_{n,m}$ 以及§7中定理 7.1 的系 7.1 知 ii) 中的第三个等式成立，又注意到

$$\dot{x} = y(y-1)\cdots(y-n+1),$$

$$\dot{y}=(-1)^{m-n+1}x(x-1)\cdots(x-m+1)\tag{8.74}$$

恰有 $E\left(\frac{nm+1}{2}\right)$ 个中心，可知 i) 以及 ii) 与 iii) 的第一个不等式成立。余下只须证明 iii) 的第二个不等式，为此需要下面几个引理：

**引理 8.2**　设 $X=(P_n, Q_n)$ 有 $n^2$ 个奇点，$R(x, y)$ 是一个低于 $n$ 次的多项式，则这 $n^2$ 个奇点不能都在 $R(x, y)=0$ 上。

**证**　假设 $n^2$ 个奇点都在 $R=0$ 上，则 $Q(x, y)=0$ 与 $R(x, y)=0$ 有不少于 $n^2$ 个的公共解，从而 $Q$ 与 $R$ 必有公因式。设 $C$ 是 $R$ 与 $Q$ 的最高公因式，则 $\deg(C)=k<n$。于是可记

$$R=CR_1,\ Q=CQ_1,$$

$\deg Q_1=n-k$，$\deg R_1<n-k$。由于 $P$ 与 $Q$ 有最多个数的公共解，故知 $C$ 与 $P$ 有 $nk$ 个公共解，$Q_1$ 与 $P$ 有 $n(n-k)$ 个公共解。从而由前面的假设知道，$R_1$ 与 $Q_1$ 的公共解不少于 $n(n-k)$ 个。于是 $R_1$ 与 $Q_1$ 应有公因式。这与假设矛盾。▌

在以下两引理中，假设 $n>2$。

**引理 8.3**　设 $X$ 为 $(n, n)$ 型的多项式系统，它有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个正指标的奇点，则相应的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个负指标的奇点不能都在 $R(x, y)=0$ 上，这里 $\deg R\leqslant n-2$。

**证**　由假设，$\deg R^2\leqslant 2n-4<2n-2$。今若一切负指标奇点都在 $R=0$ 上，则对 $X$ 及 $R^2$ 应用 Euler-Jacobi 恒等式（§3 中 Ⅱ 段），得：

$$\sum_{x\in A}\frac{R^2(x)}{J(x)}=\sum_{x\in A^-}\frac{R^2(x)}{J(x)}+\sum_{x\in A^+}\frac{R^2(x)}{J(x)}=\sum_{x\in A^+}\frac{R^2(x)}{J(x)}=0.$$

这里 $A$、$A^+$、$A^-$ 分别表示 $X$ 的奇点，指标为 $+1$ 的奇点及指标为 $-1$ 的奇点的集合。由于 $J(x)>0$ 对一切 $x\in A^+$，故 $R(x)=0$ 对一切 $x\in A^+$。于是 $X$ 的 $n^2$ 个奇点都在 $R=0$ 上，这与引理 2 相矛盾。▌

**引理 8.4**　对实平面上 $\frac{n(n-1)}{2}-1$ 个任意的点集必存在一

个$n-2$次多项式$R(x, y)$，使上述奇点全都在$R(x, y)=0$上。

证 由代数几何(见文献[8.25])知：对平面上$\frac{k(k+3)}{2}$个任意的点集，必存在一个$k$次多项式$R(x, y)$，使$R=0$通过所有这些点。今取$k=n-2$，并注意

$$\frac{n(n-1)}{2}-1=\frac{1}{2}(n-2)(n+1),$$

即知引理成立。∎

引理 8.5 若$(n, n)$型多项式系统$X$有$\frac{n(n+1)}{2}$个指标为$+1$的奇点，则它们不能都位于$R(x,y)=0$上，这里$\deg R\leqslant n-1$。

证 根据§3中Ⅱ段奇点分布的几何构形一段的推论易证：若$X$有$\frac{n(n+1)}{2}$个指标为$+1$的奇点，则它必有$n^2$个奇点，而指标为负的奇点的指标之和为$\frac{n(n-1)}{2}$。对任一个指标为$-1$的奇点$x$，设$T_x$为引理8.4所给出的$n-2$次多项式，使$X$的其余$\frac{n(n-1)}{2}-1$个的负指标奇点都在$T_x=0$上。现在$\deg(RT_x)\leqslant n-1+n-2=2n-3<2n-2$，对$RT_x$应用Euler-Jacobi公式，得(由假设$R(y)=0$对$y\in A^+$)：

$$0=\sum_{y\in A}\frac{T_x(y)R(y)}{J(y)}=\frac{T_x(x)R(x)}{J(x)}.$$

故$R(x)T_x(x)=0$。由引理8.3知$T_x(x)\neq0$，故$R(x)=0$。这一结论对任一指标为$-1$的奇点$x$都成立。故$X$的一切奇点都在$R=0$上，这与引理8.3矛盾。引理得证。∎

定理8.8中iii)的证明：假设$C_{n,n}=P_{n,n}=\frac{n^2+n}{2}$，我们来导出矛盾：当$n=2$时，$C_{2,2}=2=P_{2,2}-1=3$是熟知的。今设$n>2$，且$C_{n,n}=P_{n,n}$，则$\operatorname{div}X=0$通过一切指标为$+1$的奇点。若$\operatorname{div}X\equiv0$，则$X$为Hamilton系统，由定理8.7知，$C_{n,n}=P_{n,n}$不可能成立。若$\operatorname{div}X\not\equiv0$，则$\deg(\operatorname{div}X)\leqslant n-1$，于是由引理8.5

即知$C_{n,n}=P_{n,n}$不可能成立。

注 8.2 由定理的证明知道，实际上 $X=(n, n)$ 型多项式系统的一切中心和细焦点的总和不超过$\frac{(n+2)(n-1)}{2}$个。特别，当$n=3$时，知三次多项式系统的中心与细焦点的总和不超过5个。

注 8.3 由定理8.8中iii)看出，对一般的$(n, n)$型多项式系统猜测8.4仍未得到解决。

下面介绍文献[8.26]中在通有条件之下，对猜测8.1和8.2的解答，它仍依赖于对无穷远奇点的分析。考虑有中心的$n$次多项式系统：

$$\dot{x}=\sum_{i=0}^{n} p_i(x, y), \quad \dot{y}=\sum_{i=0}^{n} q_i(x, y) \quad (n\geq 2). \tag{8.75}$$

假设$p_n(x, y)$与$q_n(x, y)$无公因式，又(8.75)具有$B$类或$C$类中心。作坐标变换$x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$，则(8.75)变为：

$$\dot{\rho}=\sum_{i=0}^{n}\rho^i Z_i(\theta), \quad \rho\dot{\theta}=\sum_{i=0}^{n}\rho^i N_i(\theta). \tag{8.76}$$

其中

$$\begin{cases} Z_i(\theta)=\cos\theta p_i(\cos\theta, \sin\theta)+\sin\theta q_i(\cos\theta, \sin\theta), \\ N_i(\theta)=\cos\theta q_i(\cos\theta, \sin\theta)-\sin\theta p_i(\cos\theta, \sin\theta). \end{cases}$$

再令$r=\frac{1}{\rho}$, $d\tau=\rho^{n-1}dt$，并仍以“·”代表$\frac{d}{d\tau}$，则(8.76)变为：

$$\begin{cases} \dot{r}=-r(Z_n(\theta)+rZ_{n-1}(\theta)+\cdots+r^nZ_0(\theta))=\bar{Z}(\theta, r)r, \\ \dot{\theta}=N_n(\theta)+rN_{n-1}(\theta)+\cdots+r^nN_0(\theta)=\bar{N}(\theta, r). \end{cases} \tag{8.77}$$

现在我们在$(\theta, r)$直角坐标平面上来讨论(8.77)。系统(8.75)的无穷远奇点与(8.77)在$r=0$上的奇点相对应，具体地说，系统(8.75)的无穷远奇点$A_i$及其对径点$A_i'$与(8.77)在线段$\{(\theta, 0), \theta\in[0, 2\pi]\}$上的奇点$B_i(\theta_i, 0)$与$B_i'(\theta_i+\pi, 0)$一一对应，$A_i(A_i')$邻域中轨线的拓扑结构与$B_i(B_i')$在$r\geq 0$中邻域内的轨线的拓扑

结构相同，且轨线的走向一致。当 $n$ 为奇(偶)数时，$B_i$ 处 $r=0$ 上轨线的走向与 $B_i'$ 处 $r=0$ 上轨线的走向一致(相反)。易见 $(\tilde{\theta},\ 0)$ 是(8.77) 的奇点，当且仅当 $\tilde{\theta}$ 是 $N_n(\theta)$ 的零点。

**引理 8.6** 存在充分小的 $r_0>0$，使得在区域 $0<r\leqslant r_0$ 中 (8.77) 无奇点，从而 $\theta$ 轴上的奇点都是孤立的。

**证** 由 $p_n$、$q_n$ 的齐次性以及无公因式可知

$$p_n^2(x,\ y)+q_n^2(x,\ y)>0 \text{ 当 } (x,\ y)\neq(0,\ 0).$$

于是

$$N_n^2(\theta)+Z_n^2(\theta)=p_n^2(\cos\theta,\ \sin\theta)+q_n^2(\cos\theta,\ \sin\theta)>0. \tag{8.78}$$

因此存在充分小的 $r_0$，使当 $0\leqslant r\leqslant r_0$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 时，有

$$(\bar{Z}(\theta,\ r))^2+(\bar{N}(\theta,\ r))^2=N_n^2(\theta)+Z_n^2(\theta)+r^2F(\theta,\ r)>0.$$

又因 $N_n(\theta)$ 的零点都是孤立的，所以(8.77)在 $\theta$ 轴上的奇点也是孤立的。∎

**引理 8.7** 对于(8.77) 的奇点 $(\hat{\theta},\ 0)$，在区域 $r>0$ 内不可能既有进入它的轨线又有离开它的轨线。

**证** 由(8.78) 知 $Z_n(\hat{\theta})\neq0$。因此存在 $\varepsilon>0$ 和 $r_0>0$，使在区域 $\Sigma=\{(\theta,\ r),\ \theta\in[\hat{\theta}-\varepsilon,\ \hat{\theta}+\varepsilon],0\leqslant r\leqslant r_0\}$ 中有 $\bar{Z}^2(\theta,r)>0$。故在区域 $\Sigma$ 内 $\dfrac{dr}{dt}$ 定号，引理得证。∎

**引理 8.8** 在区域 $r>0$ 中，(8.77) 的每一奇点 $(\tilde{\theta},\ 0)$ 至多只能作为中心区域边界的一个连通分支的端点，从而每一这种分支必有两个不同的端点。

这由引理 8.7 以及中心区域中轨线的走向即可知道。

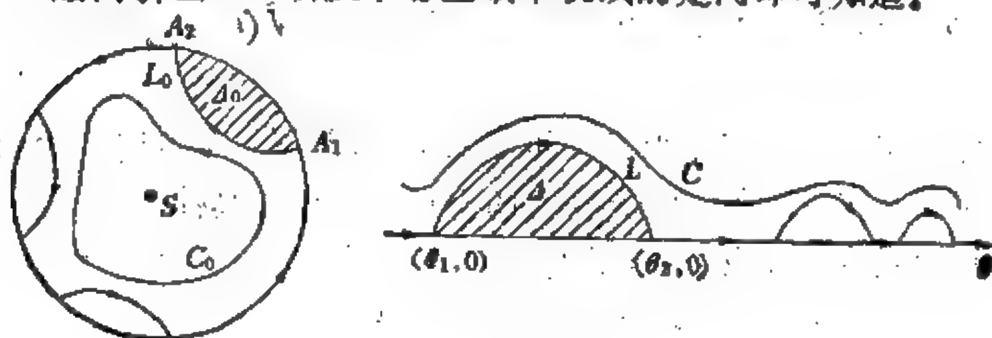



图 8.11

下面对中心区域 $N_s$ 的边界 $\partial N_s$ 的连通分支进行分类研究：设 $L_0$ 是(8.75)的由 $A_1$ 进入 $A_2$ 的一个连通分支，它对应于(8.77)的由 $(\theta_1, 0)$ 出发而进入 $(\theta_2, 0)$ 的轨线 $L$。(8.75)的位于中心区域 $N_s$ 中的闭轨 $\bar{C}_0$ 对应于(8.77)的关于 $\theta$ 有 $2\pi$ 周期的周期解 $C$、$L_0$ 与赤道所围成的区域 $\Delta_0$ 对应于 $L$ 与 $\theta$ 轴所围成的区域 $\Delta$。

不失一般性，可设 $0\leqslant\theta_1<\theta_2<2\pi$。取 $\delta>0$ 足够小，使在 $|\theta-\theta_i|<\delta$ 内有：

1) $Z_n(\theta)$ 不变号，从而对充分小的 $r$，$\bar{Z}(\theta, r)$ 不变号；

2) $\theta_i\,(i=1, 2)$ 是 $N_n(\theta)$ 在 $|\theta-\theta_i|<\delta$ 中的唯一零点；

3) $N_n(\theta)$ 和 $-Z_n(\theta)$ 可以写成：

$$
\begin{aligned}
N_n(\theta) &= N^{(k_i)}(\theta)(\theta-\theta_i)^{k_i}\left(1+\varepsilon_1^{(i)}(\theta-\theta_i)\right),\\
-Z_n(\theta) &= Z(\theta_i)\left(1+\varepsilon_2^{(i)}(\theta-\theta_i)\right) \quad (i=1, 2).
\end{aligned}
\tag{8.79}
$$

根据轨线的走向易得：

$$
(-1)^{k_1}N^{(k_1)}(\theta_1)>0,\ N_i^{(k_i)}(\theta_2)>0,\ Z(\theta_1)>0,\ Z(\theta_2)<0. \tag{8.80}
$$

又可知在区间 $[\theta_1-\delta, \theta_0+\delta]$ 中 $N_n(\theta)$ 的零点个数为偶数(按重数计算)。现在根据 $N_n(\theta)$ 在 $[\theta_1-\delta, \theta_2+\delta]$ 上零点的分布情况可以分为以下7类(表8.1)：

表8.1

| 类型 | $N_n(\theta)$ 在 $[\theta_1-\delta, \theta_2+\delta]$ 中零点的个数 | $k_1$, $k_2$ | $N_n$ 在 $(\theta_1, \theta_2)$ 中零点的性质 |
|---|---|---|---|
| 1 | 大于等于6 | | |
| 2 | 2 | $k_1=k_2=1$ | 无零点 |
| 3 | 4 | $k_1=k_2=2$ | 无零点 |
| 4 | 4 | $k_1=k_2=1$ | 一个二重零点 |
| 5 | 4 | $k_1=k_2=1$ | 两个单零点 |
| 6 | 4 | $k_1=2$, $k_2=1$ ($k_1=1$, $k_2=2$) | 一个单零点 |
| 7 | 4 | $k_1=3$, $k_2=1$ ($k_1=1$, $k_2=3$) | 无零点 |

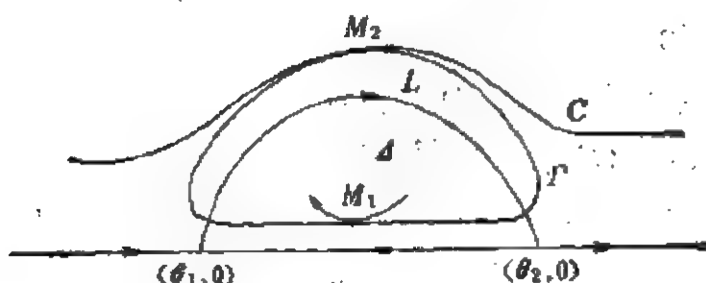



图 8.12

下面对它们分别进行研究：

I) 由于$N_n(\theta)$在$[\theta_1-\delta,\ \theta_2+\delta]$中至少有6个零点，故$N_n(\theta)$在$[0,\ 2\pi]\backslash[\theta_1-\delta,\theta_2+\delta]$中至多还有$2n-4$个零点（因为零点总数$\leqslant 2n+2$）。于是由引理8.8知，$\partial N_n$除$L$外至多还有$n-2$个连通分支，从而$\partial N_n$至多有$n-1$个连通分支。

II) 因为$k_1=k_2=1$，由(8.80)知，$(\theta_1,\ 0)$与$(\theta_2,0)$都是(8.77)的鞍点。因此易于作出一条包含$\varDelta$中和$L$上所有有限远奇点的闭曲线$\Gamma$，在其上有一个内切点$M_1$和一个外切点$M_2$。于是由§3定理3.1知，在$\varDelta$中和$L$上的一切奇点的指标之和为$+1$(图8.12)。

III) 由于在$(\theta_1,\ \theta_2)$中$N_n(\theta)$无零点，所以$\theta_2-\theta_1\leqslant\pi$。当$\theta_2-\theta_1=\pi$时，$\theta_1$与$\theta_2=\pi+\theta_1$是$N_n(\theta)$在$[0,\ 2\pi]$中的全部零点。故$L$是$\partial N_n$的唯一连通分支。当$\theta_2-\theta_1<\pi$时，由$k_1=k_2=2$知，在$[0,\ 2\pi]$上$N_n(\theta)$至多有$2n-2$个不同的零点，从而由引理8.8知，$\partial N_n$至多有$n-1$个连通分支。

IV) 设$\tilde{\theta}$是$N_n(\theta)$在$(\theta_1,\ \theta_2)$中的二重零点。由文献[8.27]第二章定理7.1知$(\tilde{\theta},\ 0)$是鞍结点，而$(\theta_1,\ 0)$、$(\theta_2,\ 0)$是鞍点，可以和II)一样处理。

V) 设$\tilde{\theta}_1$、$\tilde{\theta}_2$是$N_n(\theta)$在$(\theta_1,\ \theta_2)$中的两个单零点。根据$Z_n(\tilde{\theta}_i)$的符号，$(\tilde{\theta}_i,\ 0)$或为结点，或是鞍点。而$(\theta_i,\ 0)$都是鞍点。下面分三种情况：

1) $(\tilde{\theta}_1,\ 0)$、$(\tilde{\theta}_2,\ 0)$都是结点。这时在$r>0$中没有$\partial N_n$的连通分支以$(\tilde{\theta}_i,\ 0)$为端点，从而$r=0$，$\theta\in[0,\ 2\pi]$上至多有$2n-2$

个奇点可以作为分支的端点，故$\partial N_s$至多有$n-1$个连通分支。

2) $(\tilde{\theta}_1, 0)$与$(\tilde{\theta}_2, 0)$都是鞍点。这时可以作一条环绕$\Delta$中和$L$上所有奇点的曲线$\Gamma$，在其上有三个内切点和一个外切点，从而$\Gamma$内部的奇点指标之和为$+2$。

3) $(\tilde{\theta}_1, 0)$与$(\tilde{\theta}_2, 0)$中有一为鞍点，另一为结点。可如2)中一样作曲线$\Gamma$，在其上有一内切点和一外切点，故$\Gamma$内部奇点指标之和为$+1$。

Ⅵ) 此时$(\theta_1, 0)$是鞍结(鞍)点，$(\theta_2, 0)$是鞍(鞍结)点，设$\tilde{\theta}$是$(\theta_1, \theta_2)$中的单零点，则$(\tilde{\theta}, 0)$为结点或鞍点。

1) 当$(\tilde{\theta}, 0)$是结点时，$\partial N_s$的连通分支不能以它为端点。注意到$k_1(k_2)=2$，可知在$r=0$，$\theta\in[0, 2\pi]$上至多有$2n-2$个不同的奇点能作为$\partial N_s$的连通分支的端点，故至多有$n-1$个分支。

2) 当$(\tilde{\theta}, 0)$是鞍点时，注意$(\theta_1, 0)$右边(或$(\theta_2, 0)$左边)为抛物域，即知可作与Ⅴ)3)中同样的$\Gamma$。

Ⅶ) 因为$k_1=3(k_2=3)$，$k_2=1(k_1=1)$，由文献[8.27]中第二章定理7.1知$(\theta_1, 0)$、$(\theta_2, 0)$都是鞍点，故可如Ⅰ)一样，作曲线$\Gamma$，或仿Ⅱ)可证$\partial N_s$至多有$n-1$个连通支。

猜测8.1和8.2的证明：设$\partial N_s$有$k$个连通分支，如果某一分支$L$属于Ⅰ)、Ⅱ)、Ⅴ)1)、Ⅵ)1)或Ⅶ)的类型，则已证必有$k\leqslant n-1$。如果$\partial N_s$的所有连通分支都不属于上述任一类型，则由前面的分析知道，这些分支与赤道所围的闭区域中的所有奇点的指标之和$\geqslant k$，因此$(x, y)$平面上所有有限远奇点的指标之和$\geqslant k+1$。由于$n$次系统有限远奇点的指标之和$\leqslant n$，所以$n\geqslant k+1$，即$k\leqslant n-1$。

估计当$p_n$与$q_n$有公因子时可以用扰动的方法来证明猜测8.1和8.2仍是对的。

**注 8.4**　例8.4、8.5和8.7中$\partial N_s$的两个连通分支有可能通过同一无穷远奇点，这是因为其中的$p_n$与$q_n$有公因子之故。

此外，最近在文献[8.38]中又解决了R. Conti的另一个问题，

是否存在三次系统，使有两平行直线解，在它们之间不存在中心，而在两边各有一个中心区域？在[8.38]中证明了这仅当有一直线上存在一奇点，而两直线之间的区域恰为此奇点的椭圆域时才是有可能的。

关于三次系统中心的文章还有文献[8.28]、[8.29]、[8.30]、[8.37]等。例如在[8.37]中证明了

$$\dot{x}=-y+ax^2+by^2+cx^2y+dy^3,\quad \dot{y}=x+ex^2y$$

以$O$为中心当且仅当$e=0$；

$$\dot{x}=-y+ax^2+by^2+cx^2y+dy^3,\ \dot{y}=x+fy^3$$

以$O$为中心当且仅当$f=0$。

此外，在文献[8.31]中还证明了，一平面自治系统若存在首次积分，且此积分在一点$O$有孤立极小值，则$O$是中心。

此定理是文献[8.35]中下一定理的逆定理：

若$O$是一平面自治系统的中心，则方程存在一首次积分，它以$O$为孤立极小值。

关于中心，若就点沿其外的闭轨走一周所需的时间(周期)来讨论，则有等时和非等时之分。当中心外围一切闭轨都有相同的周期时，称为等时中心，线性系统的中心是其特例；否则，称为非等时中心。二次系统在什么时候存在等时中心？这一问题早在1964年已为W. S. Loud在文献[8.32]中所解决，即有如下定理：

**定理8.9**　二次系统

$$\dot{x}=-y+Ax^2+Bxy+Cy^2,\quad \dot{y}=x+Dx^2+Exy+Fy^2$$

以$O(0,0)$为等时中心，当且仅当：

1) $A=B=C=D=E=F=0$，即系统为线性的。

2) 方程可经转轴化成形式：

$$\dot{x}=-y+\overline{B}xy,\quad \dot{y}=x+\overline{D}x^2+\overline{F}y^2.$$

其中$\overline{B}\neq0$，又比值$\dfrac{\overline{D}}{\overline{B}}$与$\dfrac{\overline{F}}{\overline{B}}$取下列四组值之一：

$$(0,\ 1),\ \left(0,\ \frac{1}{4}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ 2\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right).$$

证明从略。

若二次系统取(8.2)的形式，则有下面的定理：

定理 8.10　方程(8.2)以 $O(0,\ 0)$ 为等时中心，当且仅当下列条件之一成立：

1) $a+c=b+d=4b+\alpha=4c+\beta=0$，这时(8.2)成为：

$$\dot{x}=-y+dx-2axy-dy^2,\quad \dot{y}=x+ax^2+2dxy-ay^2.$$

它有通积分

$$x^2+y^2=C(1+2ax+2dy).$$

2) $a=d=3b+\alpha=3c+\beta=0$，这时(8.2)成为：

$$\dot{x}=-y-bx^2+cxy,\quad \dot{y}=x-bxy+cy^2,$$

它有通积分

$$(x^2+y^2)=C(1-cx-by)^2.$$

3) $a=c=\beta=d+6b+\alpha=0$，这时(8.2)成为

$$\dot{x}=-y-bx^2,\quad \dot{y}=x-4bxy,$$

它有通积分

$$(2b^2x^2-2by+1)^2=C(1-4by).$$

4) $a=c=\beta=4+bd+10d-\alpha=0$，这时(8.2)成为

$$\dot{x}=-y+4dx^2-dy^2,\quad \dot{y}=x+2dxy.$$

它有通积分

$$16d^2x^2-8d^2y^2-8dy-1=C(1+2dy)^4.$$

5) $\dfrac{\alpha}{\beta}=k$, $6(a+c)+\beta=6(b+d)+\alpha=a(k^2-1)+(5d+3b)k$

$$=d(k^2-1)-(5a+3c)k=0.$$

6) $\dfrac{\alpha}{\beta}=k$, $10(a+c)+2\beta=10(b+d)+3\alpha$

$$=(b+4d)k^2-6ak-3d=3ak^2-6dk-4a-c=0.$$

关于解析平面向量场的等时中心与广义细中心的研究还有文献[8.33]和[8.34]。在[8.33]中依靠有中心的系统的规范型(见§5中(5.40)式)：

$$\frac{d\varphi}{dT}=\varphi\sum_{k=0}^{\infty}p_k(\varphi\cdot\psi)^k,\quad \frac{d\psi}{dT}=-\psi\sum_{k=0}^{\infty}p_k(\varphi\cdot\psi)^k$$

(其中 $p_1=1$) 定义 $O(0,\ 0)$ 为 $k$ 阶广义细中心，如果

$$p_2=p_3=\cdots=p_k=0,\quad p_{k+1}\neq 0.$$

特别，如果一切 $p_k=0$ 对 $k\geqslant 2$，则得广义等时中心。

在文献[8.33]中推导出求 $p_{k+1}$ 的递推计算方法，应用于只有齐三次非线性项的三次系统，得到 $O(0,\ 0)$ 为广义等时中心的充要条件共有四组。

当定常系统的中心非等时的时候，沿中心外围一系单参数闭轨上的周期运动的周期是否必为参数的单调函数？这也是一个有趣的问题。在文献[8.36]中证明了：

对某一 $C_*>1.4$ 而 $C\in(1.4,\ C_*)$ 时，二次系统

$$\dot{x}=-y+xy,\quad \dot{y}=x+2y^2-Cx^2$$

在中心 $O(0,\ 0)$ 外围有单参数周期轨道族，但周期并不是参数的单调函数。

# 参 考 文 献


[8.1]　叶彦谦等。极限环论。上海科学技术出版社，1984。

[8.2]　Coppel W A. A survey of quadratic systems, J. Diff. Eqs. 2(1966).293～304.

[8.3]　Schlomiuk D.Algebraic particular integrals, integrability and the problem of the center(to appear in Trans. AMS).

[8.4]　Schlomiuk D.Elementary first integrals and algebraic invariant curves of differential equations (Preprint, 1992).

[8.5]　Darboux G. Mémeire sur les équation differentielles algebriques du premier order et du premier degre(Molanges), Bull. des Se. Math. 1878, pp.60～96, 123～144, 151～200.

[8.6]　Prelle M J and Singer M F. Elementary first integrals of differential equations, Trans. AMS, v.279, 1983, no.1, 215～229.

[8.7]　李承治。实二次系统有两个中心的条件和相图。数学学报，1985, 28, 644～648。

[8.8]　Лукашевич H A. Integral curves of a certain differential equation, Diff.Uravn. 1 (1965), 82～95.

[8.9] Вулпе Н И. Аффинно-инвариантные условия топологического различения квадратичных систем при наличии центра, Diff. Uravn. 19(1983), no.3, 371～379.

[8.10] Conti R.Centers of quadratic systems, Ricerche di Mat. Suppl. v.36(1987), 117～126.

[8.11] Conti R. On centers of polynomial planar systems, Proc, ICNO, XI, Budapest., 1987, 36～43.

[8.12] Conti R.On a class of cubic systems with two centers, Resultate Math, 14(1988), 30～37.

[8.13] Conti R, On centers of cubic systems, Ann. Pol. Math. LI (1990), 123～128.

[8.14] Conti R.On centers of type B of polynomial systems, Arch. Math. (BRNO), v. 26(1990), no.2～3, 93～100.

[8.15] Conti R.Centers of polynomial systems in $R^2$, Dipart.di Mat. Appl. "G.Sansone", Univ.deg.Studi di Firenze, Marzo, 1990—Numero 5, 1～45.

[8.16] Artes J C and Llibre J.Quadratic Hamiltonian vector fields (Preprint, 1992).

[8.17] Galestt M, Villarini M.Some properties of planar polynomial systems of even degree (to appear in Annali di Math. pura ed appl.).

[8.18] 梁肇军。偶次多项式微分系统的一个几何性质.(预印本)

[8.19] 梁肇军。多项式微分系统的全局分析。华中师大学报,常微专辑,1986.

[8.20] Schlomiuk D, Guckenheimer J, Rand R. Integrability of plane quadratic vector fields, Expositiones Mathematical, 8(1990), 3～25.

[8.21] 李继彬,李存富。平面三次Hamilton系统与($E_3$)的极限环分布。数学学报,1985, 28, 509～521.

[8.22] Cima A, Gasull A and Mañosas F.On polynomial Hamiltonian planar vector fields (Preprint, 1992).

[8.23] Cima A, Gasull A and Mañosas F. Some applications of the Euler-Jacobi formula to differential equations(Preprint, 1992).

[8.24] 叶彦谦,马知恩。环域定理与奇点概念的推广。数学学报1977, 20, 6～10.

[8.25] Fulton W. Algebraic curves, An introduction to algebraic geometry, Benjamin, New York, 1969.

[8.26] 章照康。关于B类和C类中心区域边界连通分支的个数.南京大学学报,数学半年刊(增刊),1993, 205～208.

[8.27] 张芷芬等。微分方程定性理论。科学出版社,1985.

[8.28] 李继彬,刘天一。一类三中心Hamilton扰动系统的分支与相图。云南大学学报 1986, 8, no.1, 1～9.

[8.29] Упко Д С. Качественное исследование одной системы с тремя центрами, Диф. ураф. 20(1984), 797~801.

[8.30] 黄宾明,李继彬。平面三次微分系统的极限环复眼分支(Ⅰ)。云南大学学报,1985, no.1, 7~17.

[8.31] Mazzi L, Sabatini M. A characterization of centers via first integrals, J. Diff. Eqs. 76(1988), 222~237.

[8.32] Loud W S. Behavior of the period of solutions of certain plane autonomous systems near centers, Contr. to Diff. Eqs., 3(1964), 21~36.

[8.33] 林怡平,李继彬。平面自治系统的规范型与闭轨族周期的临界点。数学学报,1991, 34, no.4, 490~501.

[8.34] Chicone C, Jacobs M. Bifurcation of critical points for plane vector fields, Trans. AMS. 312(1989), no.2, 433~486.

[8.35] Hale J K. Ordinary differential equations, Wiley-Interscience, 1969.

[8.36] Chicone C and Dumortier F. A quadratic system with a nonmonotonic period function, Proc. AMS., v. 102(3), 1988, 706~709.

[8.37] 朱思铭,朱洁华。平面三次多项式系统的中心焦点判别。常微分方程理论及其应用(烟台会议论文集),1992, p.222.

[8.38] 李学鹏,黄启宇。具有平行积分直线的三次系统(预印本,1992).

[8.39] Zoladek H. The solution of the center-focus problem (Preprint, 1992).

[8.40] Christopher C J. Invariant algebraic curves and conditions for a centre, Preprint, 1991.

[8.41] Lunkevich V A and Sibirskii S. On the conditions for a centre, Diff. Uravn. v. 1(1965), 176~181.

[8.42] Kukles I S. Sur quelques cas de distinction entre un foyer et un centre, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 42(1944), 208~211.

[8.43] Xiaofan Jin and Dongming Wang. On the conditions of Kukles for the existence of a centre, Bull. Lond. Math. Soc, 22(1990), 1~4.

[8.44] Christopher C J and Lloyd N G. On the paper of Jin and Wang concerning the conditions for a centre in certain cubic systems, Bull. Lond. Math. Soc. 22(1990), 5~12.

[8.45] Lloyd N G and Pearson J M. Computing centre conditions for certain cubic systems, IMA. Preprint Series # 772, 1991.

[8.46] Yasmin N. Closed orbits of certain two-dimensional cubic systems, Ph D. Thesis Univ, College of Wales, Aberystwyth. 1989.

[8.47] 吕启龙。关于平面n次系统的中心判定问题。数学进展, v. 17(1988), no.3, 280~283.

[8.48] Schlomiuk D. Algebraic integrals of quadratic systems with a weak focus, Lect. Notes in Math., v. 1455(1990), 373～384.

[8.49] Садовский А. П, Проблема центра и фокуса для аналитических систем с ненулевой линейной частью, Диф. урав. т. 28(1992), 2016～2017.

[8.50] 蔡燧林,张平光. 方程 $\dot{x}=\Phi(y)-F(x)$, $\dot{y}=-g(x)$的中心焦点判定. 应用数学学报, v.16(1993), 107～113.

# §9. 极限环的不存在性、存在性和唯一性

关于多项式系统的极限环的不存在性、存在性和唯一性，近十年来国内外数学家得到许多重要和有趣的结果，其中关于二次多项式系统的某些不存在性或唯一性的定理尤其令人注目。对这个主题，我们根据多项式系统的次数等于二或大于二，以及证明方法的不同分为两节来介绍，本节所介绍的全部都属于二次系统方面，为了节省篇幅，有的定理的证明不全部写出，而只述其证法和步骤。关于这方面的综合报告有文献[9.39]和[9.40]。

## 一、二次系统三阶细焦点外围不存在极限环的证明

这个问题之所以重要，乃是因为：如果在二次系统的三阶细焦点外围存在极限环，且它不随系数的微小变动而消失(通常由存在性定理证得的极限环都具有这一性质)，那末当用 Bautin 方法适当变动方程的系数，以使三阶细焦点变成粗焦点，且其小邻域中出现三个小振幅极限环时，人们就可得到二次系统在一焦点外围出现至少四个环的例子了。当然，反过来，当我们证明了三阶细焦点外围不存在极限环时，并不能由此立刻得出“二次系统焦点外围最多只能存在三个环”的结论，但至少有这样的结论，如下定理所述：

**定理 9.1** 当二次系统的三阶细焦点受到小扰动以后，在它外围(不一定是小邻域内)至多只能出现三个极限环。

**证** 在文献[9.44]及[9.68]中已证明了：二次系统的三阶细焦点外围也不存在分界线环。由此可知，三阶细焦点在受到小扰动以后，不可能由外围的分界线产生极限环，当然也不可能突然

出现大的半稳定环，只要扰动足够小。因此，极限环只能由焦点产生，即都是小振幅的。由 Bautin 的理论，知其数目不能多于三个。■

在文献[9.1]中§15定理15.10后面已提到，当有三阶细焦点 $O(0, 0)$ 的二次系统被写成如下形式：

$$\dot{x} = -y + lx^2 + 5axy + ny^2,$$
$$\dot{y} = x[1 + ax + (3l + 5n)y] \tag{9.1}$$

时，如果 $n=0$，则文献[9.2]和[9.3]已各自独立地证明了 $O(0, 0)$ 外围不存在极限环。此后，文献[9.4]推广上述结果到 $n=\pm\frac{1}{2}$、$\pm1$ 的情况。事实上，比[9.2]和[9.3]更早些，文献[9.5]已证明：当 $|n|\gg1$ 时，(9.1)在 $O$ 外围不存在极限环。对于一般情况，上述问题最后被文献[9.6]和[9.7]各自独立地解决了。两文的证法也类似，即都是把二次系统化为Liénard方程，然后应用文献[9.8]中的不存在极限环的定理。文献[9.6]中的证明长达15页，计算极繁；[9.7]虽然只有三页，但这只是由于论文写得太简略之故。如果把细节补全，也和文献[9.6]差不多。最近张平光在文献[9.9]中采用了与[9.6]、[9.7]略微不同的方法，并且改用了一个与文献[9.8]中略微不同的不存在性定理，得到一个较为简单的证明，且由证明中可以看出三阶焦点量在此问题中所起的作用，这是一个值得注意的事实。下面简要介绍文献[9.9]中关于二次系统在三阶细焦点外围不存在极限环的证明。

当 $n\neq0$ 时，不妨设 $n=1$。在 $m(l+1)=a(b+2l)$ 条件之下方程

$$\dot{x} = -y + lx^2 + mxy + y^2, \quad \dot{y} = x(1 + ax + by) \tag{9.2}$$

可经变换(见文献[9.1]§15)化为：

$$\dot{x} = e^y - 1 - F(x), \quad \dot{y} = -g(x) \tag{9.3}$$

其中

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx,$$

$$f(x)=e^{\int_0^x \psi_2(x)dx}\cdot\frac{1}{h_1(x)}\{[(l-b)(b+1)-2am]x^3$$
$$+[3a-m(b+2l+2)]x^2+(b+2l+3)x\},$$
$$g(x)=e^{\int_0^x \psi_2(x)dx}\left[\frac{(l+lb-am)x^3+(a-m)x^2+x}{h_1(x)}\right],$$

这里 $\psi_2(x)=\dfrac{3(b+1)x+m}{h_1(x)}$, $h_1(x)=1-mx-(1+b)x^2$.

容易算出

$$f(x)=\tilde{f}(x)+(b+2l+3)g(x), \tag{9.4}$$

其中

$$\tilde{f}(x)=e^{\int_0^x \psi_2(x)dx}\cdot\frac{Ax^3}{h_1(x)},$$
$$A=am(b+2l+1)-(b+1)(l+b)(b+2l).$$

对一般的 Liénard 方程

$$\dot{x}=\varphi(y)-F(x),\quad \dot{y}=-g(x) \tag{9.5}$$

已知有下列两个极限环不存在定理(参见文献[9.33]):

**定理 9.2** 若曲线 $F(x_1)=F(x_2)$ 与曲线 $G(x_1)=G(x_2)$ 在区域

$$D=\{(x_1,\ x_2),\ x_{02}<x_2<0,\ 0<x_1<x_{01}\} \tag{9.6}$$

内无交点,这里

$$G(x)=\int_0^x g(t)\,dt,$$

则(9.5)在带域 $x_{02}<x<x_{01}$ 中没有极限环。

**定理 9.3** 设 $F(x)$ 分别在两区间 $x_{02}<x<0$ 与 $0<x<x_{01}$ 中严格单调,又曲线 $F(x_1)=F(x_2)$ 与曲线

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)}=\frac{f(x_2)}{g(x_2)}$$

在区域(9.6)中无交点,则定理 9.2 的结论成立[1]。

1) 最近文献[9.43]举例说明了:由定理 9.3 推出定理 9.2 并不是无条件的。定理 9.3 对 $F(x)$ 加了严格单调的条件。文献[9.43]则另给条件:

$xg(x)>0$, $x\neq0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|=\lim\limits_{x\to0^-}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|=\infty$, $xf(x)$ 在 $x=0$ 的小邻域常号,且$\neq0$。

今对方程(9.3)取：

$$x_{02}=\max\{x\,|\,x<0,\ (h_1(x)=0)\cup(g_1(x)=0)\cup(g(x)=0)\},$$
$$x_{01}=\min\{x\,|\,x>0,\ (h_1(x)=0)\cup(g_1(x)=0)\cup(g(x)=0)\}. \tag{9.7}$$

其中
$$g_1(x)=ax^3-(b-l)x^2-mx+1,$$
如果 $h_1(x)=0$、$g_1(x)=0$ 和 $g(x)=0$ 都没有正根(或负根)，则取 $x_{01}=+\infty$ $(x_{02}=-\infty)$不难看出，(9.3)在 $O(0,0)$ 外围的极限环若存在必位于带域$(x_{02},x_{01})$之中。

由定理9.2和定理9.3可知，要证明(9.2)的三阶细焦点 $O(0,0)$外无环，只要证明曲线

$$\frac{\tilde{f}(x)}{g(x)}=\frac{\tilde{f}(y)}{g(y)} \tag{9.8}$$

和曲线

$$\int_0^x \tilde{f}(x)\,dx=\int_0^y \tilde{f}(t)\,dt \tag{9.9}$$

在区域

$$D'=\{(x,y)\,|\,x_{02}<x<0,\ 0<y<x_{01}\}$$

内无交点即可。

易知(9.8)等价于

$$(a-m)xy+x+y=0. \tag{9.10}$$

注意到在 $D'$ 中 $x$、$y$ 异号，由(9.10)可得：

$$(a-m)y+1>0,\ (a-m)x+1>0.$$

记

$$\Phi(y)=\int_0^y \tilde{f}(t)\,dt-\int_0^{\frac{-y}{(a-m)y+1}} \tilde{f}(t)\,dt,$$

则要证曲线(9.9)和(9.8)在 $D'$ 中无交点，只要证明 $\Phi(y)$在$(0,x_{01})$内无零点即可。易见

$$\Phi(0)=0,\ \Phi'(y)=Ay^3\Phi_1(y),$$

其中

$$\Phi_1(y)=h_1^{-\frac{5}{2}}(y)\,e^{\int_0^y -\frac{m}{2}h_1^{-\frac{1}{2}}(x)\,dx}$$

$$-h_2^{-\frac{5}{2}}(y)e^{\int_0^{\frac{-y}{(a-m)y+1}}-\frac{m}{2}h_1^{-1}(x)dx}.$$

而　$$h_2(y)=1+(2a-m)y+(a^2-am-b-1)y^2$$

$$=[1+(a-m)y]^2h_1\left(\frac{-y}{1+(a-m)y}\right).$$

由此可见 $\Phi_1(0)=0$，即 $\Phi'(0)=0$。又可算出：

$$\Phi_1'(y)=h_1^{-\frac{7}{2}}(y)(5(b+1)y+2m)e^{-\int_0^y\frac{m}{2}h_1^{-1}(x)dx}$$

$$-h_2^{-\frac{7}{2}}(y)[(5b+5-5a^2+5am)y$$

$$+3m-5a]e^{-\int_0^{\frac{-y}{(a-m)y+1}}\frac{m}{2}h_1^{-1}(x)dx}. \tag{9.11}$$

故　$$\Phi'(0)=5a-m=0,$$

当 $O$ 是(9.2)的三阶细焦点。仿此可证：

$$\Phi_1''(0)=0,\ \Phi_1'''(0)=20a(b+1+6a^2),$$

由于 $O$ 不是中心，故 $\Phi_1'''(0)\neq0$。不妨设 $\Phi_1'''(0)>0$，即

$$a(b+1+6a^2)>0,$$

则 $\Phi_1(y)>0$ 当 $0<y\ll1$。

如果 $\Phi_1(y)$ 在 $(0,\ x_{01})$ 中有零点 $y_1$，不妨设它是最靠近 $O$ 的正零点，则应有

$$\Phi_1'(y_1)\leqslant0.$$

但另一方面，由 $\Phi_1(y_1)=0$ 知有

$$h_2^{-\frac{5}{2}}(y_1)e^{-\int_0^{\frac{-y}{(a-m)y_1+1}}-\frac{m}{2}h_1^{-1}(x)dx}$$

$$=h_1^{-\frac{5}{2}}(y_1)e^{-\int_0^{y_1}\frac{m}{2}h_1^{-1}(x)dx}.$$

利用这一关系，由(9.11)式可算出：

$$\Phi_1'(y_1)=h_1^{-\frac{5}{2}}(y_1)e^{-\int_0^{y_1}\frac{m}{2}h_1^{-1}(x)dx}\Psi(y_1),$$

其中

$$\Psi(y_1)=\{(5a-m)+(5a-m)(a-m)y_1$$

$$+[(5a+m)(b+1)-3am(a-m)]y_1^2\}h_1(y_1)h_2(y_1).$$

当 $m=5a$ 时，有

$$\Psi(y_1)=10a(b+1+6a^2)y_1^2h_1(y_1)h_2(y_1),$$

因此有

$$\Phi_1'(y_1)>0,$$

与前面的结论矛盾。这就证明了 $\Phi_1(y)>0$ 在 $(0,x_{01})$ 中，从而 $\Phi(y)$ 在此区间中单调增加，故 $\Phi(y)>0$ 对 $0<y<x_{01}$ 即 $O$ 外围不存在极限环。

关于某些以 $O$ 为一阶或二阶细焦点的二次系统，讨论其外围不存在极限环的文章有文献 [9.46]、[9.47]、[9.48] 和 [9.63]、[9.70]。又 [9.51] 对有星形结点或中心的二次系统的无环性，给出了简单的证明。

对于二次系统无环性的证明常用的有两种方法：一种是用定理 9.2 或定理 9.3；另一种是用旋转向量场理论，假设参数取某一定值时存在中心，那末当参数取其他数值时，系统就不存在闭轨。

本书 §1 的定理 1.4 和定理 1.5 虽然也给出了在一环域中不存在闭轨的结论，但对焦点外围并不适用。因此我们认为仍有必要探索新的证明不存在极限环的方法。

**二、(II)$_{a=0}$ 类二次系统：**

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,$$
$$\dot{y}=x(1+by) \qquad (9.12)$$

**的极限环唯一性的证明**

关于方程(9.12)的极限环的唯一性在文献 [9.1] 中没有能给出完全严格的证明，后来在文献[9.10]中给出一个新的证明，其中用到作者自己所得到的关于 Lienard 方程

$$\dot{x}=F(x)-y,\ \dot{y}=g(x),\ F(x)=\int_0^x f(t)\,dt \qquad (9.13)$$

的一个新的唯一性定理如下：

定理 9.4 设 $f$、$g$ 为开区间 $(a<0<b)$ 上的连续可微函数，满

足：

1) $g(x)>0(<0)$ 当 $x>0(<0)$；

2) $f(x)>0(<0)$ 当 $x>x_0(<x_0)$，其中 $x_0<0$；

3) 联立方程

$$F(x_1)=F(x_2),\ f(x_1)/g(x_1)=f(x_2)/g(x_2)$$

最多有一组解 $\xi_1$、$\xi_2$，其中 $a<\xi_1<x_0$，$0<\xi_2<b$；

4) 若 $F(\xi_0)=0$ 对某一 $\xi_0<x_0$，则 $f(x)F(x)/g(x)$ 是 $a<x<\xi_0$ 中的单调减小函数。

则(9.13)最多有一周期轨线。若存在，必为稳定粗极限环。

虽然可以证明定理 9.4 只是文献 [9.11] 的一个定理的推论，并且文献[9.10]对(9.12)的极限环唯一性的证明仍有漏洞（见文献[9.12]），但文献[9.10]在证明环的唯一性以前，先证明了许多使(9.12)不存在极限环的定理，从而把极限环的唯一性的证明限制在系数满足某些不等式的条件下来进行，这一点却是符合于文献[9.1]中处理(I)类方程极限环唯一性的精神的。下面结合文献[9.10]与[9.12]的方法来给出(9.12)的环的唯一性以一个新的证明，借以补救文献[9.1]中§15的不足。

不妨设在(9.12)中有 $\delta\in[0,2)$，$m\geqslant0$，$b=\pm1$。容易算出(9.12)在 $y$ 轴上的奇点 $O(0,0)$ 与 $N\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$分别有特征根：

$$\frac{\delta}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\delta^2-4}$$

和

$$\frac{1}{2}\left(\delta+\frac{m}{n}\right)\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\delta+\frac{m}{n}\right)^2+4\left(1+\frac{b}{n}\right)}.$$

又当 $\delta=0$，$W_1=m(l+n)\neq0$ 时，$O$ 是一阶细焦点；当 $\delta=W_1=0$ 时，$O$ 是中心。若$N$亦为焦点，则当 $\delta n+m=0$，

$$W_1'=\frac{-mn(l-n-b)\sqrt{|n|}}{\sqrt{|n+b|^3}}\neq0$$

时，$N$ 是一阶细焦点，当 $n\delta+m=W_1'=0$ 时，$N$ 是中心（$W_1'$ 是(9.12)在$N$的一阶焦点量）。

**引理 9.1** 设 $\Gamma$ 是(9.12)的包围 $O$ 的闭轨，则 $\Gamma$ 必位于区域 $1+by>0$, $1-ny>0$(若 $n\neq0$)之中。

**引理 9.2** 若 $m\delta=0$，则(9.12)无环，若 $\delta=m(l+n)=0$，则 $O$ 是中心。

证明见文献[9.1]。

**引理 9.3** 设 $\delta\in(0,2)$, $m>0$, 则当 $m+\delta n\leqslant0$ 或 $m-b\delta\leqslant0$ 时，(9.12)在 $O$ 外围无环。

**证** 由 $m+\delta n\leqslant0$ 得 $n<0$。由引理 9.1 知，若存在极限环 $\Gamma$，则 $\Gamma$ 应位于半平面 $y>\dfrac{1}{n}$ 中，故有

$$\int_0^T \operatorname{div}(X,Y)\,dt=\int_0^T(\delta+(2l+b)x+my)\,dt=\int_0^T(\delta+my)\,dt$$
$$>\int_0^T\left(\delta+\frac{m}{n}\right)dt\geqslant0, \tag{9.14}$$

这里 $T$ 是 $\Gamma$ 作为周期解的周期。另一方面，由于 $\delta>0$, $O$ 应是不稳定焦点，但(9.14)式表明 $\Gamma$ 应是不稳定环(对于 $O$ 外部任一极限环)，故 $\Gamma$ 不可能存在。

其次设 $m-b\delta\leqslant0$，则 $b=1$, $y=-1$ 为积分直线。故 $\Gamma$ 若存在，则它应位于半平面 $y>-1$ 中。由 $-1\geqslant-\delta/m$，可知 $\Gamma$ 位于半平面 $y>\dfrac{-\delta}{m}$ 中，如前(9.14)式一样可证明 $\Gamma$ 不存在。 ∎

**引理 9.4** 设 $\delta\in(0,2)$, $m>0$, $l+n\geqslant0$, 则 (9.12) 在 $O$ 外围无闭轨。

这一事实在文献[9.1]中忘了提到，但实际上其证明是和(I)类方程一样的。对于(I)类方程，即 $(9.12)_{b=0}$，这在[9.1]中定理 12.5 中已有证明了。

基于上列引理可知，要证(9.12)在 $O$ 外围最多只能出现一个极限环，不妨限于下列条件之下来证明：

$$\delta\in(0,2),\ m>0,\ m+\delta n>0,\ m-b\delta>0,\ l+n<0. \tag{9.15}$$

这时由 Bautin 的理论知道，对固定的 $b$、$l$、$m$、$n$ 只要 $\delta$ 与 $m(l+n)$ 异号，且 $|\delta|$ 足够小，在 $O$ 外围至少存在一个小振幅环，又 $O$ 外任何

极限环必位于$1+by>0$和$1-ny>0$的区域中。现在按照文献[9.10]引进时间变换

$$\frac{dt}{ds}=(1+by)^{-1-\frac{l}{b}},$$

则由(9.12)的第二方程得到

$$x=(1+by)^{\frac{l}{b}}\frac{dy}{ds},$$

代入(9.12)的第一方程，可得

$$\frac{d^2y}{ds^2}-(\delta+my)\varphi(y)\frac{dy}{ds}+y(1-ny)(1+by)\varphi^2(y)=0,$$

其中

$$\varphi(y)=(1+by)^{-1-\frac{l}{b}}.$$

上述二阶方程等价于方程组

$$\frac{dx}{ds}=g(y),\quad \frac{dy}{ds}=-x-F(y), \tag{9.16}$$

其中

$$F(y)=\int_0^y f(z)\,dz,\quad f(y)=-(\delta+my)\varphi(y),$$

$$g(y)=y(1-ny)(1+by),$$

交换$x$与$y$，(9.16)成为我们常见的形式：

$$\frac{dx}{ds}=-y-F(x),\quad \frac{dy}{ds}=g(x). \tag{9.17}$$

易见(9.17)的发散量是$-f(x)=(\delta+mx)\varphi(x)$。假设极限环$\Gamma$在$x$轴上的投影为闭区间$[c,e]$。由于$\Gamma$必须与$f(x)=0$相交，故有

$$c<-\frac{\delta}{m}<0<e.$$

引进函数

$$f_1(x)=f(x)-\frac{f(c)}{g(c)}g(x),$$

则有$f_1(c)=0$，且

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f_1(x)}{g(x)}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{H(x)\varphi^3(x)}{g^2(x)},$$

其中

$$H(x)=-lx(1-nx)(\delta+mx)$$
$$+\frac{1+bx}{m}[\delta(m+\delta n)-n(\delta+mx)^2]。$$

以 $R_1$ 与 $R_2$ 记如下的点集：

$$R_1=\{x|x>0,\ 1+bx>0,\ 1-nx>0\},$$
$$R_2=\left\{x|x<\frac{-\delta}{m},\ 1+bx>0,\ 1-nx>0\right\}。$$

我们只须证明$H(x)>0$ 在 $R_1\cup R_2$ 中，那末就有

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f_1(x)}{g(x)}\right)>0\ \text{在}\ \left[-\frac{\delta}{m},\ 0\right]\text{之外。}$$

于是由文献[9.1] 的定理 6.4(Cherkas-Zhilevich) 即得 $O$ 外围极限环的唯一性。下面分四种情况讨论：

1) $b+n\geqslant 0$, $(x,\ y)\in R_1$。这时 $1+bx>1-nx>0$, 故有

$$H(x)\geqslant(1-nx)[-lmx(\delta+mx)+\delta(m+\delta n)-n(\delta+mx)^2]/m$$
$$=(1-nx)[\delta m(1-nx)-(l+n)mx(\delta+mx)]/m>0。$$

2) $b+n<0$, $(x,\ y)\in R_1$。这时有 $1-nx\geqslant 1+bx>0$, 于是

$$H(x)\geqslant(1+bx)[\delta m(1-nx)-(l+n)mx(\delta+mx)]/m>0。$$

3) $b+n\geqslant 0$, $(x,\ y)\in R_2$。

4) $b+n<0$, $(x,\ y)\in R_2$。

这两情况的证明与前类似，从略。

(9.12)在$N\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$外围极限环的唯一性 (若$N$是焦点) 可用移轴的方法来解决。又 $O$ 与$N$ 外围不能同时存在极限环，可用 Dulac 函数 $B(x,\ y)=(1+by)^{-1-\frac{2l}{b}}$ 来证明。这两点已在文献[9.1] §15 中提到过了。

三、特殊(Ⅲ)类方程

§9. 极限环的不存在性、存在性和唯一性 215

关于(9.18)的极限环唯一性问题最先在文献[9.13]中提出猜想。以后张平光和 R. Kooij 都发表了文章，而后者对问题解决得比较彻底，下面简要介绍 R. Kooij[9.14]的结果，即证明(9.18)至多只能有一个极限环。

不妨设在(9.18)中有 $a<0$，否则，可改变 $x$ 与 $t$ 的符号以达到目的。易见当 $\delta=0$ 时(9.18)在 $O(0, 0)$ 的一阶焦点量 $W_1=a<0$，故仅当 $\delta>0$ 时，$O$ 外围有可能存在极限环。事实上，当 $0<\delta\ll 1$ 时，极限环确实存在。同法可证，仅当 $\delta<0$ 时，$N$ 外围才有可能存在环，但这必须 $0<n<1$，否则，$N\left(0, \frac{1}{n}\right)$ 不是指标 $+1$ 的奇点，以上的事实也可借助于 Dulac 函数 $B=\frac{1}{1-y}$ 来证明，因为

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)=\frac{ax^2+\delta(1-y)}{(1-y)^2},$$

当 $0<n<1$ 时，$N$ 位于 $y=1$ 的上方，而对 $y=1$ 上方的点当 $a<0$，$\delta>0$ 时，上式右边常为负，故不存在极限环。

对于奇点 $N\left(0, \frac{1}{n}\right)$，若移原点到 $N$，再作变换

$$x=-\sqrt{\frac{1-n}{n}}\,\bar{x},\quad y=\frac{n-1}{n}\,\bar{y},\quad t=-\sqrt{\frac{n}{1-n}}\,\bar{t}\ \ (0<n<1),$$

然后仍记 $\bar{x}$、$\bar{y}$、$\bar{t}$ 为 $x$、$y$、$t$，即得方程

$$\dot{x}=-y+\delta' x+n' y^2,\quad \dot{y}=x(1+a' x-y),\tag{9.19}$$

其中

$$\delta'=-\delta\sqrt{\frac{n}{1-n}}>0\ (\text{当 }\delta<0),$$

$$0<n^*=1-n<1,\ \ a^*=a\sqrt{\frac{n}{1-n}}<0,$$

故与(9.18)等价。我们今后只要讨论 $O$ 外围即可。

以下对(9.18)我们恒设

$$a<0,\ 0<n<1,\ \delta>0.\tag{9.20}$$

**引理 9.5**　方程(9.18)可化为如下的一阶方程

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-g(x)-f(x)y,\tag{9.21}$$

其中

$$f(x)=\frac{B(x)}{[f_1(x)]^{1+q}},\quad g(x)=\frac{r(x)H(x)}{[f_1(x)]^{1+2q}},\tag{9.22}$$

而

$$\begin{aligned}B(x)&=k(k-a)x^2+k^2(k^2+\delta k-2a\delta)x+\delta k^3(k^2-\delta k+1),\\ H(x)&=-a^2x^2-k(\delta k^2-ak^2-2a)x-k^2(k^2-\delta k+1),\\ r(x)&=(k-a)x^2+k^3x,\\ f_1(x)&=-k(k^2-\delta k+1)+(2a-k)x,\end{aligned}\tag{9.23}$$

$q=\dfrac{a}{2a-k}$，$k$ 是 $nk^3+k-a=0$ 的唯一(负)根。

证 先作变换 $\bar{x}=y-kx$, $\bar{y}=y$, $k^2d\bar{t}=dt$, 取 $k$ 为无限远奇点 $(1, k, 0)$ 的 $y$ 坐标所满足的方程 $nk^3+k-a=0$ 的根。于是有 $\left(\text{仍记 } \bar{x}、\bar{y} \text{ 为 } x、y,\ \dfrac{d\bar{x}}{d\bar{t}} \text{ 与 } \dfrac{d\bar{y}}{d\bar{t}} \text{ 为 } \dot{x}、\dot{y}\right)$:

$$\dot{x}=f_0(x)-f_1(x)y,\quad \dot{y}=g_0(x)+g_1(x)y+g_2(x)y^2,\tag{9.24}$$

其中

$$\begin{aligned}f_0(x)&=k(\delta k-1)x+ax^2,\\ f_1(x)&=-k(k^2-\delta k+1)+(2a-k)x,\\ g_0(x)&=-kx+ax^2,\\ g_1(x)&=k+(k-2a)x,\\ g_2(x)&=a-k.\end{aligned}$$

由(9.23)看出

$$x=x_1=\frac{k(k^2-\delta k+1)}{2a-k}$$

是 (9.24) 的无切直线，除非 $f_0(x_1)=0$. 在后一情况，$x=x_1$ 是(9.24)的积分直线，其成立的条件是:

$$\frac{k(k^2-\delta k+1)}{2a-k}=\frac{k(1-\delta k)}{a},$$

或即

$$\Sigma=ak^2-a+a\delta k+k-\delta k^2=0.\tag{9.25}$$

由于极限环不能与 $x=x_1$ 相交，故可再作代换

$$\xi = f_0(x) - f_1(x)y, \tag{9.26}$$

将方程(9.24)化为

$$\dot{x} = \xi, \quad \dot{\xi} = -\psi_0(x) - \psi_1(x)\xi - \psi_2(x)\xi^2, \tag{9.27}$$

其中

$$\psi_0(x) = \frac{r(x)H(x)}{f_1(x)}, \quad \psi_1(x) = \frac{B(x)}{f_1(x)}, \quad \psi_2(x) = -\frac{a}{f_1(x)}.$$

最后再在(9.27)中作代换

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = \frac{\xi}{[f_1(x)]^q}, \qquad d\bar{t} = [f_1(x)]^q dt, \quad q = \frac{a}{2a-k},$$

即得(9.21)式(仍记 $\bar{x}$、$\bar{y}$、$\bar{t}$ 为 $x$、$y$、$t$)。 ∎

**注 9.1** 记 $\varphi(u) = nu^3 + u - a$，由 $\varphi'(u) = nu^2 + 1 > 0$，

$$\varphi(a) = na^3 < 0 \quad 及 \quad \varphi(0) = -a > 0$$

可知(9.18)有唯一的无限远奇点 $(1, k, 0)$ $(a < k < 0)$，它是一个初等结点。

**注 9.2** 当 $\Sigma = 0$ 或 $\delta = \frac{a - ak^2 - k}{ak - k^2}$ 时，$y = kx + \frac{1}{n}$ 是(9.18)的通过 $N$ 与 $(1, k, 0)$ 的积分直线[1]。后面证明：此时 $O$ 外围已不存在极限环。

为了证明唯一性定理，我们将改用另一个极限环唯一性定理(见文献[9.15])。

**引理 9.6** 设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $\alpha < x < \beta$ 中连续可微，$\alpha < 0 < \beta$。且

1) $f(x_0) = 0$ 对某一 $x_0 > 0$，$f(x) > 0\ (< 0)$ 当 $x > x_0\ (< x_0)$；

2) $g(x) > 0\ (< 0)$ 当 $x > 0\ (< 0)$；

3) $f(x)/g(x)$ 在 $x < 0$ 及 $x > x_0$ 为单调增函数。

则(9.21)至多只有一条闭轨线，若存在，必为粗稳定极限环。

用这个引理证明以下定理：

**定理 9.5** 当 $\Sigma < 0$ 时，方程(9.18)至多只有一个极限环，若

---

1) 这时由 $nk^3 + k - a = 0$ 及 $\Sigma = 0$ 可导出 $x_1 = \frac{k(1-\delta k)}{a} = \frac{k^3}{a-k} = \frac{1}{n}$，即 $f_0(x) = 0$ 与 $f_1(x) = 0$ 的公根为 $\frac{1}{n}$。由 $x = \frac{1}{n}$ 回到方程 (9.18)，即得 $y - kx = \frac{1}{n}$。

存在，必为粗稳定环。

**证** 在引理 9.5 的证明中已看出 $f_1(x)=0$ 的根是

$$x_1=\frac{k(k^2-\delta k+1)}{2a-k},$$

今设 $r(x)=0$ 的非零根是 $x_2$，则 $x_2=\dfrac{k^3}{a-k}$。由 $a<k<0$ 及 $|\delta|<2$，可见 $x_1>0$、$x_2>0$。又易证：

$$B(0)=\delta k^3(k^2-\delta k+1)<0,$$
$$B(x_1)=k^3(k^2-\delta k+1)\Sigma/(2a-k)^2>0,$$
$$H(0)=-k^2(k^2-\delta k+1)<0,$$
$$H(x_1)=k^2(a-k)(k^2-\delta k+1)\Sigma/(2a-k)^2>0,$$
$$x_2-x_1=k\Sigma/(2a-k)(a-k)>0. \tag{9.28}$$

再以 $x_h$ 记 $H(x)=0$ 的最小根($>0$)，以 $x_b(>0)$ 记 $B(x)=0$ 的最小根，则可画出诸函数的图形如下(图 9.1)。

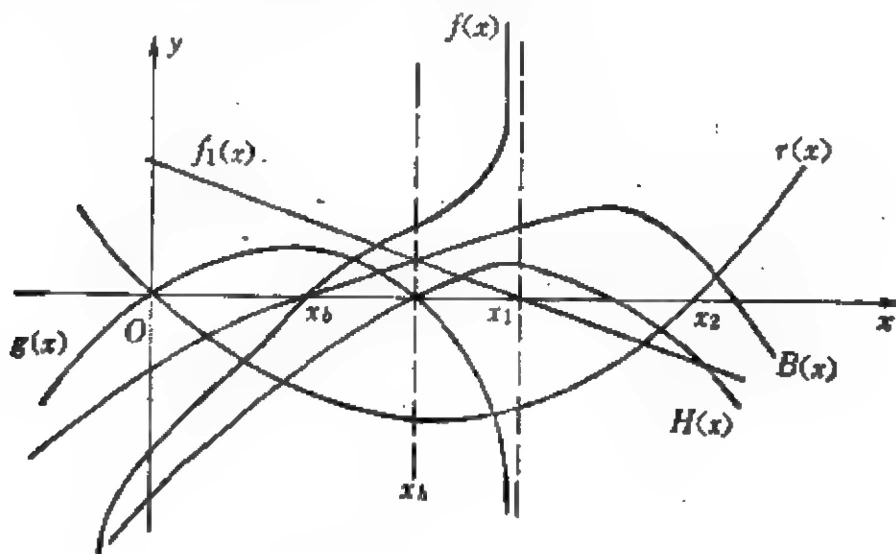



图 9.1

这里 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图可能不确切，但只表示其零点的位置。

不难证明：若取 $\alpha=-\infty$，$x_0=x_b$，$\beta=x_h$，则引理 9.6 的条件 1)、2) 当 $\Sigma<0$ 时成立。最后要证条件 3) 当 $\Sigma<0$ 时也成立。

今有

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{[f_1(x)]^{q-1}}{r^2(x)H^2(x)}\{f_1(x)H(x)h_1(x)$$

$$+r(x)B(x)h_2(x)\},\qquad(9.29)$$

其中

$$h_1(x)=B'(x)r(x)-B(x)r'(x),$$
$$h_2(x)=aH(x)-f_1(x)H'(x),$$

或

$$h_1(x)=-\delta k^2\{(a-k)(2a-k)x^2$$
$$-2k(a-k)(k^2-\delta k+1)x+k^4(k^2-\delta k+1)\},$$
$$h_2(x)=a^2(3a-2k)x^2+k(2a^2\delta k-3a^2k^2-4a^2-\delta k^3$$
$$+a\delta k^2+2ak+ak^3)x$$
$$+k^2(k^2-\delta k+1)(ak^2+a-\delta k^2).$$

若简记

$$h_1(x)=h_{12}x^2+h_{11}x+h_{10},\qquad h_2(x)=h_{22}x^2+h_{21}x+h_{20},$$

则易见

$$h_{12}<0,\ h_{11}>0,\ h_{10}<0,\ h_{22}<0,\ h_{21}>0,\ h_{20}<0.$$

因此知道当 $x<0$ 时，有 $h_1(x)<0$ 及 $h_2(x)<0$。又由(9.23)及图9.1可看出：当 $x<0$ 时，有 $B(x)<0$, $H(x)<0$, $r(x)>0$ 及 $f_1(x)>0$。这样，由(9.29)即看出 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)>0$ (当$x<0$)。

其次，$h_1(x)$的判别式为：

$$D=4\delta^2k^6(k^2-\delta k+1)(k-a)\Sigma<0.$$

因此显见 $h_1(x)<0$ 对 $x\in(x_b,x_h)$。至于 $h_2(x)$，我们有 $h_2(0)<0$, $h_2''(x)<0$，又

$$h_2(x_h)=aH(x_h)-f_1(x_h)H'(x_h)=-f_1(x_h)H'(x_h)<0,$$
$$h_2'(x_h)=(k-a)H'(x_h)-f_1(x_h)H''(x_h)>0.$$

所以 $h_2(x)<0$ 对 $x\in(x_b,x_h)$。再由图9.1知当 $x\in(x_b,x_h)$ 时，有 $H(x)<0$, $B(x)>0$, $f_1(x)>0$ 及 $r(x)<0$，即可由(9.29)看出：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)>0\ 对\ x\in(x_b,x_h).$$

由引理9.6即得定理9.4的证明。

下面要证：当 $\Sigma=0$ 时(9.18)不存在极限环。

**引理 9.7** $k^3 - a^3k^2 - 2ak^2 + a^3 > 0$ 当 $k + k^3 < a < k < 0$.

**证** 定义 $Z(a, k) = k^3 - a^3k^2 - 2ak^2 + a^3$, 则有:

$$Z(k, k) > -k^5 > 0,\quad Z(k + k^3, k) = -k^9(k^2 + 2) > 0.$$

对 $a = k + \mu k^3$, 其中 $0 < \mu < 1$, 可得

$$Z(k + \mu k^3, k) = -k^5(\mu^3k^6 + 3\mu^2k^4 - \mu^3k^4 - 3\mu^2k^2 + 3\mu k^2 - \mu + 1).$$

记上式右端为 $-k^5\rho$, 又记 $\mu k^2 = \gamma$, 则有:

$$\rho = \gamma^3 + 3\gamma^2 - \mu\gamma^2 - 3\mu\gamma + 3\gamma - \mu + 1 \quad (0 < \mu < 1,\ \gamma > 0)$$

容易于 $(\gamma, \mu)$ 平面上画出 $\rho = 0$ 或 $\mu = \dfrac{(\gamma+1)^3}{\gamma^2 + 3\gamma + 1}$ 的图形(图9.2), 且易证明曲线保持不进入区域

$$S = \{(\gamma, \mu) \mid \gamma > 0 \cap 0 < \mu < 1\},$$

且在整个 $S$ 中有 $\rho > 0$, 引理 9.7 得证。■

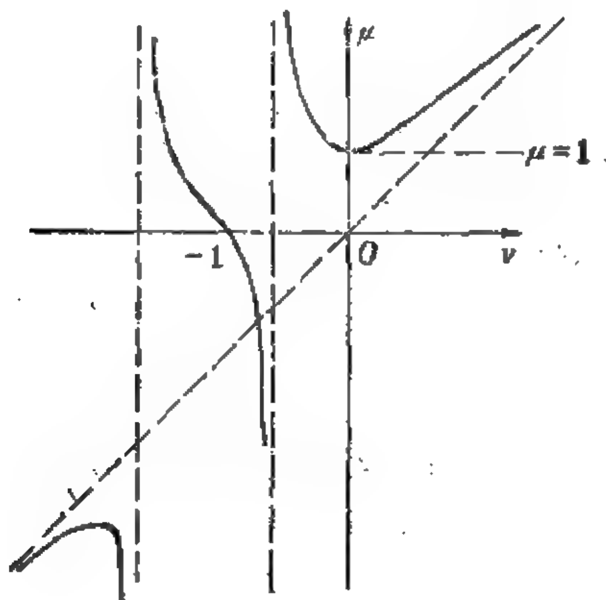



图 9.2

**注 9.8** 对(9.18)有 $a = k + nk^3 > k + k^3$.

**定理 9.6** 当 $\Sigma \geqslant 0$ 时, (9.18)不存在极限环.

**证** 先证 $\Sigma = 0$ 的情况, 由(9.28)式看出: 当 $\Sigma = 0$ 时, $H(x)$、$r(x)$ 与 $f_1(x)$ 都各含有一因子 $x - x_2$, 且 $x_1 = x_2$. 容易算出:

$$B(x)=k(k-a)(x-x_b)(x-x_2),$$
$$H(x)=-a^2(x-x_h)(x-x_2),$$
$$r(x)=(k-a)x(x-x_2),\quad f_1(x)=(2a-k)(x-x_2),$$
$$x_b=\frac{(2a-k)(ak^2+k-a)}{(a-k)^2},\quad x_h=\frac{(2a-k)k}{a^2}.$$

于是

$$x_b-x_h=\frac{k-2a}{a^2(a-k)^2}(k^3-a^3k^2-2ak^2+a^3).$$

由 $k+k^3<a<k<0$ 及引理 9.7 知有 $x_b>x_h$, 从而 (9.18) 不可能有闭轨。因若(9.18)有闭轨, 则(9.21)也有闭轨, 此闭轨不能和直线 $x=x_h$ 相交, 但又应和 $x=x_b$ 相交(因为(9.21)的 $\mathrm{div}=0$ 直线即 $f(x)=0$), 这当 $x_b>x_h$ 时是不可能的。

其次, 由于(9.18)对 $\delta$ 构成半平面旋转向量场族, 故由 $\Sigma=0$ 时无闭轨, 即可知当 $\Sigma>0$ 时亦无闭轨, 因为

$$\Sigma=ak^2+k-a+\delta k(a-k)$$

是 $\delta$ 的单调增函数。

事实上, 设 $\delta_0=\dfrac{ak^2+k-a}{k(k-a)}$, 则当 $\delta$ 从 0 增加到某一 $\bar{\delta}<\delta_0$ 时, $O$ 外的稳定极限环已扩大到经过鞍点 $S_1$(位于 $y=1+ax$ 上)的分界线环了。故 $O$ 外存在极限环的 $\delta$ 的变化范围是 $0<\delta<\bar{\delta}$。 ∎

**注 9.4** 当 $n=1$ 时 $N\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$与 $y=1+ax$ 上另一鞍点重合成为鞍结点, 但以上的定理对 $O$ 外围极限环的变化依然成立。

在[9.13]中我们还猜想, 方程

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+ny^2,\ \dot{y}=x(1+ax-y),\quad 0<n<1 \tag{9.30}$$

在 $O(0,0)$ 或 $N\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$外围如果存在极限环, 必定是唯一的。在文献 [9.42] 中肯定了这个猜想, 但附加了某些条件。关于这个问题, 在 §20 中还要讨论。

**四、有退化奇点的二次系统极限环的唯一性**

这是 W.A.Coppel 在文献 [9.16] 中的工作。所谓退化奇点

$(x_0, y_0)$ 是指方程在此奇点有两个零特征根，但线性部分不全为零的。设此二次系统为

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \lambda x - y + lx^2 + mxy + ny^2, \\
\dot{y} &= x + \lambda y + ax^2 + bxy + cy^2,
\end{aligned} \tag{9.31}
$$

不妨设退化奇点位于 $(0, 1)$。于是有 $n=1$, $c=-\lambda$, $m=0$, $b=-1-\lambda^2$。故(9.31)成为：

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \lambda x - y + lx^2 + y^2, \\
\dot{y} &= x + \lambda y + ax^2 - (1+\lambda^2)xy - \lambda y^2,
\end{aligned} \tag{9.32}
$$

再令 $z = y + \lambda x$，则得：

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= 2\lambda x - z + Lx^2 - 2\lambda xz + z^2, \\
\dot{z} &= (1+\lambda^2)x + Ax^2 - (1+\lambda^2)xy,
\end{aligned}
$$

最后经过伸缩变换可化为

$$
\dot{x} = \delta x - y + lx^2 - \delta xy + y^2,\ \dot{y} = x(1 + ax - y), \tag{9.33}
$$

其中 $|\delta| < 2$。由 (9.33) 可以看出 $N(0, 1)$ 是 $P(x, y) = 0$ 与 $Q(x, y) = 0$ 的二重交点，并且直线

$$
\operatorname{div}(P, Q) = \delta(1-y) + (2l-1)x = 0
$$

通过 $N$，这就是退化奇点的几何特征[1]。

由焦点量公式易见当 $\delta = a(2l-1) = 0$ 时，$O$ 是中心。故以后可设 $\delta a \neq 0$, $l \neq \dfrac{1}{2}$。取 Dulac 函数 $B(y) = |1-y|^k$，则

$$
\begin{aligned}
(BP)_x + (BQ)_y = {} & [\delta(1-y)^2 \\
& + (2l-1-k)x(1-y) - kax^2]B/(1-y),
\end{aligned}
$$

若取 $k = 2l-1$，则由上式看出当 $a\delta(2l-1) \leqslant 0$ 时不存在极限环（注意：极限环不能和 $y=1$ 相遇，在 $y=1$ 上有 $\dot{y} = ax^2$）。同样取 $k = 1-2l$，可证当 $(2l-1)^2 \leqslant a\delta(2l-1)$ 时不存在极限环。故可限于 $a\delta(2l-1) > 0$ 及 $(2l-1)^2 > a\delta(2l-1)$ 来讨论。不妨设 $\delta > 0$。于是便有：

$$
0 < \delta < \frac{2l-1}{a}. \tag{9.34}
$$

1) 由此可见若 $N$ 为三重奇点，则 $\delta=0$，(9.33)无极限环，即 [9.75] 中的结果。

再证：若(9.33)除$O(0, 0)$和$N(0, 1)$以外还有奇点$(x_0, y_0)$，则$(x_0, y_0)$不可能是焦点型的奇点。容易算出：

$$x_0=\frac{-a}{a^2-a\delta+l},\ y=1+ax_0=\frac{l-a\delta}{a^2-a\delta+l}.$$

把原点移到$(x_0, y_0)$，可算出(9.33)在$(x_0, y_0)$的特征方程的判别式为$(2l-1-a\delta)^2+4(a^2-a\delta+l)$。若$(x_0, y_0)$是焦点型，则此式的值为负，或即：

$$(2l+1-a\delta)^2<4(l-a^2). \tag{9.35}$$

由(9.34)与(9.35)可看出应有$a^2-a\delta+l<0$，$l>a^2$。已设$\delta>0$，故应有$a>0$。另一方面，由(9.34)应得$2l+1-a\delta>2$，故由(9.35)式得到$l-a^2>1$。但$a^2-a\delta+1>0$当$|\delta|<2$，故由

$$a^2-a\delta+l<0$$

应推出$l<1$，与$l-a^2>1$相矛盾。故$(x_0, y_0)$不能是焦点型。

为了证明$O(0, 0)$外围极限环的唯一性，可对(9.33)作变量代换

$$\xi=\frac{x}{1-y},\quad \eta=\frac{y}{1-y},\quad \frac{d\tau}{dt}=1-y.$$

则(9.33)变为

$$\xi'=\delta\xi+(1+l)\xi^2+a\xi^3-\eta,\ \eta'=(1+\eta)(\xi+a\xi^2). \tag{9.36}$$

我们要证(9.36)在区域$\eta+1>0$，$1+a\xi>0$中最多只有一条闭轨线。为此，可对(9.36)再作代换$\xi=x$，$\eta=e^y-1$，而得：

$$x'=F(x)-\varphi(y),\ y'=g(x). \tag{9.37}$$

其中

$$F(x)=\delta x+(1+l)x^2+ax^3,$$

$$g(x)=x+ax^2,\ \varphi(y)=e^y-1. \tag{9.38}$$

并用张芷芬的唯一性定理[[9.17]]：

**定理 9.7** 设(9.37)中的$\varphi(y)$为连续可微，$\varphi(0)=0$，$\varphi'(y)>0$当$-\infty<y<\infty$。又$f$与$g$在区间$(a, b)$上连续可微，$a<0<b$，使：

1) $g(x)>0(<0)$当$x>0(<0)$；

2) $f(0)>0$，$F(x)=\int_0^x f(\xi)d\xi$；

3) $f(x)/g(x)$在$x<0$及$x>0$时皆为减函数。

则(9.37)至多有一条闭轨线;若存在,必为稳定环。

显见$\varphi(y)=e^y-1$满足定理9.7的条件。对条件1),我们可以限于开区间$1+ax>0$。又现在$f(x)=\delta+2(1+l)x+3ax^2$,故条件2)满足,最后有

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=-[\delta+2a\delta x+a(2l-1)x^2]/g^2(x)<0.$$

因为[ ]中的二次式的判别式小于零。

还可进一步证明(9.33)的极限环为粗环,即有负的特征指数,此处从略。关于(9.33)的极限环的唯一性在文献[9.45]中另有证明。

在[9.16]中还证明了:当(9.33)有无穷远退化奇点时极限环的唯一性。不难证明,这时二次系统可化为:

$$x'=y+cx^2,\quad y'=-x+\delta y+myx+nx^2,\tag{9.39}$$

其中$\delta>0$, $n<(3c-1)\delta$, $m+2c=1$。由此消去$y$, 可得$x$的Lienard方程

$$x''-f(x)x'+g(x)=0,\tag{9.40}$$

或是等价的方程组(三次系统):

$$x'=F(x)-y,\quad y'=g(x).\tag{9.41}$$

其中

$$f(x)=\delta+x,\quad F(x)=\int_0^x f(\xi)\,d\xi,\quad g(x)=xq(x),$$

$$q(x)=1+(c\delta-n)x+c(1-2c)x^2.\tag{9.42}$$

然后应用文献[9.10]中得到的,但又在[9.16]中改动过的下一个唯一性定理:

**定理9.8** 设(9.40)中的$f$、$g$在$(a,b)$中连续可微,$a<0<b$,使:

1) $g(x)>0\quad(<0)$当$x>0\quad(<0)$;

2) $f(x)>0\quad(<0)$当$x>x_0\quad(<x_0)$,其中$x_0<0$;

3) 联立方程$F(x_1)=F(x_2)$,

$$f(x_1)/g(x_1)=f(x_2)/g(x_2)\tag{9.43}$$

至多有一组解 $x_1$、$x_2$，满足 $a<x_1<x_0$，$0<x_2<b$；

4) $f(x)F(x)/g(x)$ 在 $0<x<b$ 中为增函数，且

$$\lim_{x\to a+} F(x) \leqslant \lim_{x\to b-} F(x), \tag{9.44}$$

则(9.41)至多有一周期轨道；若存在，必有负特征指数。

今设 $\Gamma$ 是(9.41)的包围 $O(0, 0)$ 的闭轨。若 $\xi$ 是 $q(x)=0$ 的一根。由 $\Gamma$ 的凸性可知它不能与 $x=\xi$ 相遇。故可作一开区间 $(a, b)$，$a<0<b$，使在其中有 $q(x)>0$，且任何包围 $O$ 的闭轨都应在带域 $a<x<b$ 中，故条件1)满足。

今若 $-\delta\leqslant a$，则(9.41)的发散量 $f(x)$ 在 $a<x<b$ 中定号，闭轨也不存在。故可设 $a<-\delta$，从而条件2)对 $x_0=-\delta$ 成立。其次，$F(x)=\delta x+\dfrac{x^2}{2}$，故(9.43)等价于：

$$x_1+x_2=-2\delta,\ \delta q(-2\delta)=Hx_1x_2, \tag{9.45}$$

其中 $$H=n-c\delta+3c\delta(1-2c).$$

由于 $a<x_1<-2\delta$，故应有 $q(-2\delta)>0$。又因 $x_1x_2<0$，故 $H<0$。现在(9.45)的第一方程确定 $x_2$ 为 $x_1$ 的减函数，第二方程确定 $x_2$ 为 $x_1$ 的增函数，故(9.43)至多有一组解。

最后，令 $w(x)=f(x)F(x)/g(x)$，则

$$\begin{aligned}\frac{w'(x)}{w(x)}&=\frac{1}{\delta+x}+\frac{1}{2\delta+x}-\frac{q'(x)}{q(x)}\\&=\frac{N(x)}{(\delta+x)(2\delta+x)q(x)},\end{aligned}$$

其中

$$N(x)=3\delta+2\delta^2(n-c\delta)+2[1-2c(1-2c)\delta^2]x-Hx^2.$$

因 $$N(-\delta)=\delta q(-\delta)>0,$$

$$N(-2\delta)=-\delta q(-2\delta)<0,\ N(-\infty)=+\infty,$$

故二次式 $N(x)>0$ 当 $x>-\delta$，因此 $w(x)$ 在 $0<x<b$ 中为增函数。易证(9.44)也成立。不论 $a$、$b$ 为无限大或为 $q(x)=0$ 的实根(当 $c<0$ 或 $c>\dfrac{1}{2}$ 时，$q(x)$ 有二实根 $\xi_1<0<\xi_2$，此时应取 $a=\xi_1$，

$b=\xi_2$；当$0\leqslant c\leqslant\frac{1}{2}$时，$q(x)$或无实根，此时可以取$a=-\infty$，$b=+\infty$；或有二同号实根$\xi_1<\xi_2<0$，或有一重根$\xi_2<0$，此时可以取$a=\xi_2$，$b=+\infty$)。

定理9.8的条件都已得到满足，故(9.39)的极限环若存在必定唯一。

**注9.5** 在文献[9.10]中还证明了：二次系统若存在无限远退化奇点，则方程必可化为：

$$\dot{x}=\delta x-y+lx^2,\quad \dot{y}=x(1+ax+by)。\tag{9.46}$$

(9.46)已在文献[9.18]中研究过，但文献[9.10]认为文献[9.18]中的证明不完善，又用其他方法证明了此方程的极限环的唯一性。

**注9.6** 在文献[9.19]中研究了比(9.33)更一般的二次系统

$$\dot{x}=-y+\delta x(y-1)+lx^2+ny^2,\ \dot{y}=x(1+ax-y)。\tag{9.47}$$

**证明** 当$\frac{1}{2}\leqslant n<1$时，$O$外围若存在极限环，则必为唯一的稳定环，且$\delta\in(\delta^*,0)$，其中$\frac{1-2l}{a}<\delta^*<0$。对$N\left(0,\frac{1}{n}\right)$，当$0<n\leqslant\frac{1}{2}$时，也有类似的结果。后来在文献[9.20]中又研究了$n>1$的情况，指出这时如果包向$O$的两分界线来自$N$的话，则(9.47)在$O$外围有可能存在多于一个环，最后在文献[9.21]中作者又研究了方程

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y^\alpha(1-y)^\alpha-\delta x^\alpha(1-y)^\alpha+lx^{\alpha+1}(1-y)^{\alpha-1}\\ \dot{y}&=x^\alpha[(1-y)^\alpha+(ax)^\alpha]\quad(\alpha\text{为正奇数})\end{aligned}\tag{9.48}$$

的极限环的唯一性。作为特例，当$\alpha=1$时，即得到方程(9.33)或$(9.47)_{n=1}$的环的唯一性。又在文献[9.64]中研究了具有一细焦点和一粗焦点的二次系统

$$\begin{aligned}&\dot{x}=-y+\delta x(y-1)+lx^2+y^2,\\ &\dot{y}=x(1+ax+by),\quad a>0,\ 1+b<0\end{aligned}$$

在粗焦点$O(0,0)$外围极限环的唯一性。

根据以上所述可知：当$n\leqslant1$时，(9.47)在$O$外围极限环若存在，则必定是唯一的。若从焦点量的角度来看，我们认为主要的原

因在于 $m=-\delta$。由前面对(9.33)的讨论看出：当 $\delta=0$ 时，$O$ 外无环，此时一阶焦点量为 $W_1=a(1-2l)$，而 $W_2=W_3=0$。换言之，从 $\delta=0$ 可推出 $W_2=W_3=0$。因此再注意到 I) 和 II) 段的方程，我们可以提出如下的猜想：

**猜想 9.1**　若在一个二次系统（其独立变动的系数可能少于 5 个）中常有 $W_2=W_3=0$，或是当独立系数变动时，可由 $W_0=W_1=0$ 导出 $W_2=W_3=0$，则此系统最多只能有 1 个（2 个）包围 $O$ 的极限环，按照发散量在 $O$ 点与鞍点 $S$ 有不同（相同）的符号而定，这里过 $S$ 有两条分界线包向 $O$。特别，如果上述性质对两个有限远焦点都成立（指方程 $(9.12)_{n+b<0}$ 及 $(9.18)_{0<n<1}$）的话，则极限环必是唯一的。

下面一段的结果又一次证明上述猜想的正确性。

## 五、有重数 >2 的半初等奇点的二次系统极限环的唯一性

这也是 W.A.Coppel 的工作。所谓半初等奇点是指方程在此奇点的线性部分满足

$$P_xQ_y-P_yQ_x=0,\quad P_x+Q_y\neq 0$$

的条件（即恰有一个特征根为零）。设此奇点为 $O(0,0)$，则二次系统可经线性变换化为

$$\dot{x}=a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2,\quad \dot{y}=y+b_{20}x^2+b_{11}xy+b_{02}y^2$$

的形式。于是 $Q(x,y)=0$ 在 $O$ 附近可表为 $y=\varphi(x)$，$\varphi$ 为全纯，$\varphi(0)=\varphi'(0)=0$。以之代入 $P(x,y)$，得到

$$\psi(x)\triangleq P[x,\varphi(x)]=\Delta_m x^m+\cdots,\quad m\geqslant 2,\quad \Delta_m\neq 0。\qquad (9.49)$$

$m$ 就称为 $O$ 的重数。可以证明：这样定义的重数正是两条代数曲线 $P(x,y)=0$ 与 $Q(x,y)=0$ 在 $O$ 点的相交次数。但上述定义也适用于 $P$、$Q$ 为 $x$、$y$ 的解析函数的情况。

W.A.Coppel（见文献[9.24]）证明了以下定理：

**定理9.9**　若一个二次系统有一个半初等且重数大于 2 的有限远初等奇点，则它或是有中心，或是至多有一个极限环，它是粗的。

证明大意如下：

1) 把方程化为[1]

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -y + \delta x + lx^2 - (a+\delta)xy + y^2, \\
\dot{y} &= x(1 + ax - y).
\end{aligned}
\tag{9.50}
$$

由此可见$(0, 1)$是三重奇点，因为它是$Q(x, y)=0$的二重点，且$P(x, y)=0$在$(0, 1)$与$x=0$相交，与$1+ax-y=0$相切。

2) 用Dulac函数$(1+ax-y)^{-1}(1-y)^{2l}$证明：当$\delta=0$, $l\neq 0$或$l=0$, $\delta\neq 0$, 或$l\neq 0$, $a\delta/l\geq 1$(或$<0$)时没有极限环；因此可限于讨论$\delta>0$而$0<a\delta/l<1$的情况。注意：当$\delta=l=0$时，$O$为中心，而$y=1+ax$上充满奇点。

3) 对(9.50)作如(9.36)式前面那样的变量代换，可将(9.50)化为：

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi} &= \delta\xi + (1+l)\xi^2 + a\xi^3 - (1+a\xi)\eta, \\
\dot{\eta} &= \xi(1+a\xi)(1+\eta).
\end{aligned}
\tag{9.51}
$$

再令$\xi=x$, $\eta=e^y-1$, $\dfrac{d\tau}{dt}=(1+a\xi)^{-1}$，可得到

$$
x' = F(x) - \varphi(y), \quad y' = x, \tag{9.52}
$$

其中

$$
F(x) = [\delta x + (1+l)x^2 + ax^3](1+ax)^{-1}, \quad \varphi(y) = e^y - 1.
$$

最后，对方程(9.52)验证定理9.7的条件成立。

对于有半初等且重数大于2的无穷远奇点的二次系统在文献[9.24]中也有讨论。这时方程可化为：

$$
x' = \delta x - y + lx^2 + mxy + ny^2, \quad y' = x + bxy + cy^2, \tag{9.53}
$$

其中$|\delta|<2$。再用文献[9.25]的定理65，按照此无穷远奇点沿着赤道是初等还是非初等，可以分为两种情况：

i) $b=l\neq 0$, $m=c$;

ii) $l=0$, $m=b\delta$, $b\neq 0$.

在情况i) (9.53)可改写为[2]：

---

1) 对(9.50)有$W_1=-\delta(l+1)-3al$，当$\delta=W_1=0$时有$a=0$或$l=0$，由此都可导出$W_2=W_3=0$。

2) 按文献[9.1]中§12的公式可算出(9.54)在$O(0, 0)$的焦点量(当$\delta=0$)为：$W_1=3cn$, $W_2=-3nc^3[b(2b+5n)+2c^2]$, $W_3=-3n^2c^3(b+2n)(b^2+nb+c^2)$。由此即知当$\delta=W_1=0$时，必有$W_2=W_3=0$。

$$x' = \delta x - y + bx^2 + cxy + ny^2,$$
$$y' = x + bxy + cy^2. \tag{9.54}$$

不妨设$n \neq 0$, 否则，(9.54)可用文献[9.10]中的定理$C$来处理。对(9.54)的极限环唯一性的研究，在文献[9.24]中得到如下一些结果：

1) 说明当$b=l$, $c=m$, $bn \neq 0$时，(9.53)的无穷远奇点方程有三重根，故问题等价于研究有三重无穷远奇点的二次系统的极限环个数。对于(9.54)来说，奇点(1, 0, 0)当$bn<0$时为鞍点；当$bn>0$时为结点。

2) 用无切直线$1-cx+(b+c\delta)y=0$作Dulac函数
$$B(x, y) = [1-cx+(b+c\delta)y]^{-3}$$
来证明当$\delta=0$, $c \neq 0$, 或$\delta \neq 0$, $c=0$, 或$c\delta_n>0$时(9.54)在$O$外围无环(见§6例6.8)。

3) 证明若(9.54)在$O$外围有环，则必
$$c=\delta=0 \quad 或 \quad c(3c+b\delta)>0.$$

4) 证明若一个二次系统有三重无穷远奇点，则闭轨线必集中分布于一奇点外围，除了有两个中心的情况以外。

5) 在$c>0$, $\delta>0$, $3c+b\delta>0$, $n<0$的条件下，再设无穷远三重奇点不是鞍点，或有限远处不是恰有两个初等奇点，然后用与前面类似的方法证明环的唯一性。

在情况ii)，(9.53)成为
$$x' = \delta x - y + b\delta xy + ny^2, \quad y' = x + bxy + cy^2, \tag{9.55}$$
其中$|\delta|<2$, $b \neq 0$, 若$n=c\delta$, 则可用文献[9.10]中的下一定理可得到极限环的唯一性：

**定理9.10**　若二次系统两方程中的二次项
$$P_2(x, y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2,$$
$$Q_2(x, y) = b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2$$
都可以被发散量的一次项
$$(b_{11}+2a_{20})x + (a_{11}+2b_{02})y$$

除尽，则最多只能有一个极限环，若存在，必有非零特征指数[1]。

因此可设 $n \neq c\delta$，用代换 $\xi = \lambda y$，$\eta = \lambda(\delta y - x)$，$\lambda = c\delta - n$ 可将(9.53)化为：

$$\xi' = \delta\xi - \eta + l\xi^2 + m\xi\eta, \quad \eta' = \xi + \xi^2. \tag{9.56}$$

此方程的许多研究工作已见于文献 [9.1]。它有可能存在两个极限环。注意，对(9.56)有：

$$W_1 = (m-2)l,\ W_2 = m(5-m)[-2l],\ W_3 = 2m(-2l),$$

若 $l \neq 0$，则由 $\delta = W_1 = 0$ 推不出 $W_2 = W_3 = 0$。

类似于猜想 9.1，我们还可以给出：

**猜想 9.2** 若对二次系统

$$\dot{x} = -y + \delta x + lx^2 + mxy + ny^2,\quad \dot{y} = x(1 + ax + by),$$

$\delta$、$W_1$、$W_2$、$W_3$ 同号为正(负)或 $\delta = 0$，$W_1$、$W_2$、$W_3$ 同号为正(负)，则 $O$ 外无环($n = 0$ 时文献[9.63]曾研究过)。

W.A.Coppel 还研究过二次项满足条件

$$P_2(x, y) = (Ax + By)y,\ Q_2(x, y) = (Cx - Ay)y$$

的二次系统的极限环的唯一性问题(见文献[9.15]和[9.26])。证明了这时二次系统必可化为：

$$\dot{\xi} = -\eta + \delta\xi + (m - b\delta)\xi^2 + b\xi\eta,$$

$$\dot{\eta} = \xi + (n + 2\delta m - b\delta^2)\xi^2 + (b\delta - m)\xi\eta. \tag{9.57}$$

又证明了：若 $b = 0$ 或 $m^2 + bn = 0$，则(9.57)或有中心，或至多有一闭轨，在其他情况，则可能有两个极限环。

注意：当 $\delta = 0$ 时可算出(9.57)的三个焦点量为：

$$W_1 = m(b-n),\ W_2 = -bn(5n-b)m(m^2+n^2),$$

$$W_3 = -2bn^4m(m^2+n^2).$$

故若 $\delta = W_1 = 0$ 而 $m \neq 0$，则由此不一定能推出 $W_2 = W_3 = 0$。但若 $b = 0$ 或 $m^2 + bn = 0$，则或是 $W_2 = W_3 = 0$，或是由 $b = n$ 可推出 $m^2 + n^2 = 0$，从而由 $W_1 = \delta = 0$ 可推出 $W_2 = W_3 = 0$。

此外，在文献[9.61]中还讨论了具有细鞍点的二次系统不存在闭与奇闭轨线以及存在同宿奇闭轨线的充分条件。

---

1) 文献[9.10]中证明了这时方程必可化为(9.46)的形状，故有唯一性。

### 六、二次系统(I)类方程极限环唯一性的新证明

二次系统形式很简单，但在证明极限环的唯一性时却总要通过各种变换化为 Lienard 方程，才能应用已知的唯一性定理。上面已看到即使像 (9.18) 这样简单的二次系统在化成 (9.21) 以后就变成很复杂了。这是一个很大的缺陷。因此，我们曾在文献[9.27]中提到“能否不通过变量代换来直接证明方程 $(\mathrm{I})_{a=0}$ 的极限环的唯一性”这一问题。最近文献[9.28]对(I)类方程

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+xy+ny^2,\quad \dot{y}=x \tag{9.58}$$

极限环的唯一性问题成功地解决了。下面简要介绍文献[9.28]的工作[1]。

设

$$\dot{x}=P(x,\ y,\ \lambda),\ \ \dot{y}=Q(x,\ y,\ \lambda) \tag{9.59}$$

在单连通域 $G$ 中有定义，$O(0,\ 0)$ 是(9.59)在 $G$ 中的唯一奇点，正(或负)向渐近稳定。当 $\lambda\in(\lambda_0,\ \lambda_1)$，$P$、$Q$ 对 $x$、$y$、$\lambda$ 为一次连续可微，(9.59)的闭轨线(若存在)为正定向。又当 $\lambda>\lambda'$ 时，有下式成立：

$$P(x,\ y,\ \lambda)Q(x,\ y,\ \lambda')-P(x,\ y,\ \lambda')Q(x,\ y,\ \lambda)\geqslant 0\ \ (\leqslant 0), \tag{9.60}$$

且等号不在整条闭轨线上成立。则有：

**定理 9.11** 若对 (9.59) 的任二闭轨 $\Gamma_1<\Gamma_2$ 和任意的 $\lambda\in(\lambda_0,\ \lambda_1)$ 常可证明

$$\oint_{\Gamma_2}(P_x+Q_y)\,dt-\oint_{\Gamma_1}(P_x+Q_y)\,dt>0\quad(<0), \tag{9.61}$$

则(9.59)至多存在一个极限环，它是不稳定(稳定)的。

为此只须注意：若 $O$ 外存在极限环，则最靠近 $O$ 的必为内侧不稳定。由(9.60)及(9.61)知，它不可能是半稳定环，又它外部也不能存在稳定环，因此必为唯一的不稳定环(以上就括号外的情况证明)。

---

1) 关于 (I) 类方程极限环唯一性证明的简化，还有文章 [9.41]，但仍用化为 Lienard 方程的办法。

**定理 9.12** 如果存在 $O(0, 0)$ 的邻域 $U_\lambda \subset G$，使下列条件满足：

1) 在 $G-U_\lambda$ 中存在有限 $k(\geqslant 1)$ 条无重点的简单曲线 $l_1$, $l_2$, …, $l_k$，它们从 $\partial U_\lambda$ 出发到达 $\partial G$，且在 $G-U_\lambda$ 中互不相交，从而把 $G-U_\lambda$ 分成 $k$ 个小区域 $G_1$, $G_2$, …, $G_k$。

2) 存在 $G$ 中为二次连续可微的函数 $W(x, y, \lambda)$，使

$$A(x, y, \lambda)=P_x+Q_y+PW_x+QW_y \qquad (9.62)$$

满足下列条件：

a) 在 $l_i$ 上有 $A(x, y, \lambda)=0 \quad (i=1, 2, \cdots, k)$；

b) 在 $\overline{G}_i$ 上存在一次连续可微函数 $M_i(x, y, \lambda)$ 与 $N_i(x, y, \lambda)$，使 $PN_i+QM_i \neq 0$，又

$$\left(\frac{AM_i}{PN_i+QM_i}\right)_x-\left(\frac{AN_i}{PN_i+QM_i}\right)_y \geqslant 0$$

$$(\leqslant 0) \quad (i=1, \cdots, k),$$

且至少有一个 $j(1\leqslant j\leqslant k)$，使在 $G_j$ 的任何子域上有

$$\left(\frac{AM_j}{PN_j+QM_j}\right)_x-\left(\frac{AN_j}{PN_j+QM_j}\right)_y \neq 0.$$

3) 系统(9.59)的极限环若存在必包围 $U_\lambda$，且与每一个 $l_i$ 有且只有一个交点。

则 (9.59) 至多只有一个极限环。如果存在，必为不稳定（稳定）的。

**证明** 用反证法，假设存在 $\Gamma_2 \supset \Gamma_1 \supset U_\lambda$，比较

$$\oint_{\Gamma_2} A dt-\oint_{\Gamma_1} A dt=\left(\oint_{\Gamma_2}-\oint_{\Gamma_1}\right)\frac{AM_i dy+AN_i dx}{PN_i+QM_i}$$

用 Green 公式由已给诸条件可导出矛盾(图 9.3)。 ∎

**定理 9.13** 如果在 $G$ 中存在两条平行直线 $ax+by=d_i (i=1, 2)$，$d_1<0<d_2$，它们分别与曲线 $aP+bQ=0$ 有且仅有一个交点，且满足下列二条件：

1) (9.59) 的极限环与 $aP+bQ=0$ 分别在且仅在 $ax+by>d_2$ 及 $ax+by<d_1$ 相交。

2) 存在如定理 9.12 中所述的函数 $A(x, y, \lambda)$ 满足：

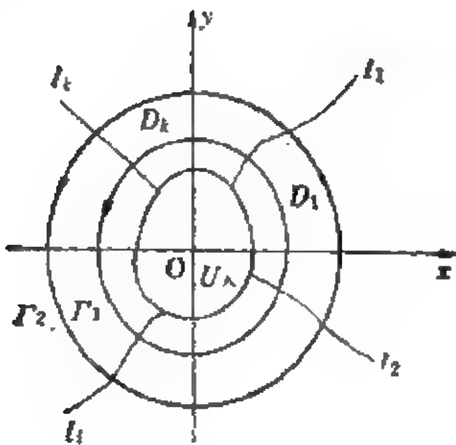



图 9.3

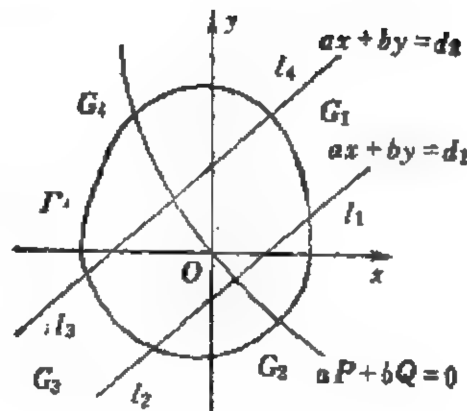



图 9.4

i) 在 $ax+by=d_i(i=1,\ 2)$ 上有 $A(x,\ y,\ \lambda)\neq 0$;

ii) 在 $ax+by\leqslant d_1$ 区域中存在 $N_1(x,\ y,\ \lambda)$, $M_1(x,\ y,\ \lambda)$, 使:

$$PN_1+QM_1\neq 0,$$

且
$$\left(\frac{AM_1}{PN_1+QM_1}\right)_x-\left(\frac{AN_1}{PN_1+QM_1}\right)_y\geqslant 0\ (\leqslant 0);$$

在 $ax+by\geqslant d_2$ 区域中存在 $N_2(x,\ y,\ \lambda)$, $M_2(x,\ y,\ \lambda)$, 使

$$PN_2+QM_2\neq 0,$$

且
$$\left(\frac{AM_2}{PN_2+QM_2}\right)_x-\left(\frac{AN_2}{PN_2+QM_2}\right)_y\geqslant 0\ (\leqslant 0).$$

又在 $d_1\leqslant ax+by\leqslant d_2$ 区域内, 当 $aP+bQ\neq 0$ 时, 有

$$\left(\frac{bA}{aP+bQ}\right)_x-\left(\frac{aA}{aP+bQ}\right)_y\geqslant 0\ (\leqslant 0).$$

且在上述三个不等式中至少有一个在它所在的区域的任何子区域中不恒等地有等式成立。则(9.59)至多有一个极限环, 如果存在, 必为不稳定(稳定)的。

证明用定理 9.12, 设 $\Gamma_\lambda$ 是 (9.59) 的距原点最近的极限环。取 $U_\lambda=\operatorname{int}\Gamma_\lambda$, $l_1$、$l_2$、$l_3$、$l_4$ 分别为 $ax+by=d_1$ 与 $ax+by=d_2$ 在 $\Gamma_\lambda$ 外的部分 (图 9.4)。$G-U_\lambda$ 被它们分成四个小区域 $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$, 在 $G_1$ 和 $G_3$ 中 $aP+bQ\neq 0$. 验证定理 9.12 的条件都满足。

现在回到方程(9.58)，设其中

$$\delta<0,\quad l+n>0, \tag{9.63}$$

则下列事实是已知的：

**引理 9.8**　若(9.58)有闭轨$\Gamma$，则$\Gamma$必包围$O(0,0)$与点$(0,-\delta)$，且位于$1-ny>0$区域中，又必须$\delta>-2$，$1+n\delta>0$。

**引理 9.9**　对(9.58)的任一极限环$\Gamma$以及两数$a$与$b$，$a^2+b^2\neq 0$，必存在两数$c_1$、$c_2$，$c_1<0<c_2$，使$\Gamma$位于带域

$$c_1\leqslant ax+by\leqslant c_2$$

之中，且$\Gamma$与$ax+by=c_i$相切，切点位于

$$aP(x,y)+bQ(x,y)=0$$

上。

**引理 9.10**　设$f(x)$与$g(x)$在区间$(e_1,e_2)$中可微，$e_1<c_1<h_1<h_2<c_2<e_2$，又$f$、$g$满足下列条件：

1) 对任意实数$\alpha$，$f(x)+\alpha g(x)$在$(c_1,c_2)$中必定变号；

2) 当$x\in(e_1,h_1)\cup(h_2,e_2)$时有$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'>0$；

3) $(x-h_1)g(x)>0$当$x\neq h_1$，$(x-h_2)f(x)>0$当$x\neq h_2$，又

$$g(h_1)=f(h_2)=0。$$

则存在$d_1\in(c_1,h_1)$，$d_2\in(h_2,c_2)$，以及实数$\beta$，使

$$(x-d_1)(x-d_2)[f(x)-\beta g(x)]>0$$

当$x\neq d_1$，$x\neq d_2$。

**证**[1]　由 3)知$g(x)<0$当$x<h_1$，$g(x)>0$当$x>h_1$；

$f(x)<0$当$x<h_2$，$f(x)>0$当$x>h_2$。

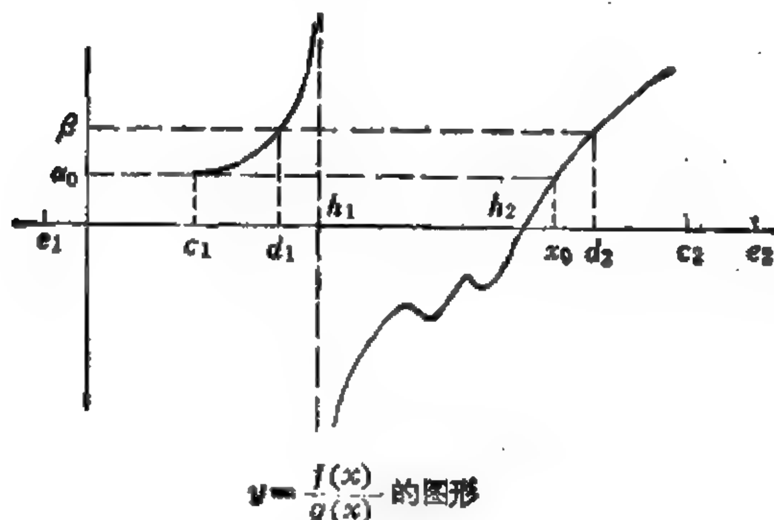
今取$\alpha_0=f(c_1)/g(c_1)>0$，于是由条件 2)与 3)知在$(c_1,h_1)$上有

$$f(x)-\alpha_0 g(x)=g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(c_1)}{g(c_1)}\right)<0。$$

又在$(h_1,h_2)$上有$f(x)-\alpha_0 g(x)<0$。因此由条件1)知，存在$x_0\in(h_2,c_2)$使$\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}=\alpha_0$。任取$d_2\in(x_0,c_2)$，记$\beta=\dfrac{f(d_2)}{g(d_2)}$，由 2)知有$\beta>\alpha_0$。又由 3)得

1)　文献[9.28]中原来的证明不够清楚，今改用章熙康的证明。

$$\lim_{x\to h_1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty.$$




$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的图形

图 9.5

故存在 $d_1\in(c_1,\ h_1)$，使 $f(d_1)/g(d_1)=\beta>\alpha_0$。

由 2)、3) 知 $\dfrac{f(x)}{g(x)}-\beta$ 在 $(c_1,\ d_1)$、$(d_1,h_1)$、$(h_2,d_2)$ 及 $(d_2,\ c_1)$ 中分别为负，正，负，正(见图 9.5)，注意到

$$\frac{f(x)}{g(x)}<0\ 在(h_1,\ h_2)上；\qquad g(x)\begin{cases}<0\ 在(c_1,\ h_1)上；\\>0\ 在(h_1,\ c_2)上。\end{cases}$$

即知有：

$$(x-d_1)(x-d_2)(f(x)-\beta g(x))$$

$$=(x-d_1)(x-d_2)g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\beta\right)>0,$$

当 $x\neq d_1$、$d_2$。引理证毕。 ▌

**引理 9.11** 在条件(9.63)之下，若 $1-4nl>0$，又(9.58)有极限环 $\Gamma$，则必 $\delta>\dfrac{-l-n}{\lambda l+1}$，且 $\Gamma$ 位于区域 $x-\lambda y<c$ 及 $x-\lambda y<\dfrac{1}{\lambda l+1}$ 中，这里

$$\lambda=\frac{-2n}{1+\sqrt{1-4nl}},\qquad c=\frac{\lambda^2-\delta\lambda+1}{2\lambda l+1}.$$

**证**　易见 $\lambda$ 满足方程 $l\lambda^2+\lambda+n=0$，$2\lambda l+1=\sqrt{1-4nl}>0$，$\lambda l+1=\dfrac{1+\sqrt{1-4nl}}{2}>0$。又

$$\frac{lc+\delta-\lambda}{\lambda l+1}-\delta=\frac{1+n\delta}{2\lambda l+1}\left(\delta+\frac{l+n}{\lambda l+1}\right)-\delta c(\lambda l+1).$$

因为 $0>\delta>-2$，故 $\lambda^2-\delta\lambda+1>0$，即

$$c=\frac{\lambda^2-\delta\lambda+1}{2\lambda l+1}>0.$$

记 $u=x-\lambda y$，则

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{u=c}=(P-\lambda Q)_{u=c}=(2\lambda l+1)(u-c)y$$

$$+(\delta-\lambda)u+lu^2=lc^2+(\delta-\lambda)c. \qquad (9.64)$$

所以 $x-\lambda y=c$ 是无切直线或积分直线(过无穷远奇点$(\lambda, 1, 0)$)，故不与 $\Gamma\supset(0, 0)$ 相交。已知 $(0, 0)$ 在 $x-\lambda y<c$ 中，故 $\Gamma$ 也在 $x-\lambda y<c$ 中。又

$$\left.\frac{d}{dt}(x-\lambda y)\right|_{x-\lambda y=\frac{1}{\lambda l+1}}=(P-\lambda Q)_{u=\frac{1}{\lambda l+1}}$$

$$=\frac{1}{\lambda l+1}\left[\delta+\frac{l+n}{\lambda l+1}\right](1-ny),$$

这说明在 $1-ny>0$ 中($\Gamma$ 在其中)$x-\lambda y=\dfrac{1}{\lambda l+1}$ 是无切直线而不与 $\Gamma$ 相交。已知$(0, 0)$ 在 $x-\lambda y<\dfrac{1}{\lambda l+1}$ 中，故 $\Gamma$ 亦位于 $x-\lambda y<\dfrac{1}{\lambda l+1}$ 中。

由(9.64)看出：当 $c=\dfrac{\lambda-\delta}{l}$ 时，$u=c$ 为积分直线。但由此式可以推得 $\delta=\dfrac{-l-n}{\lambda l+1}$，故这时 $x-\lambda y=\dfrac{1}{\lambda l+1}$ 也是积分直线，它就是 $x-\lambda y=c$。又因 $x-\lambda y=\dfrac{1}{\lambda l+1}$ 通过鞍点 $N\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$，故知当 $\delta=\dfrac{-l-n}{\lambda l+1}$ 时，$\Gamma$ 已经不存在。所以，要 $\Gamma$ 存在，必须 $\delta>\dfrac{-l-n}{l\lambda+1}$。引理证毕。 ▮

最后验证定理 9.13 的那些条件可被(9.58) 所满足即可。显

见在条件(9.63)之下$O(0, 0)$是正向渐近稳定的。又当$\delta>\delta'$时有：

$$P(x, y, \delta)Q(x, y, \delta')-P(x, y, \delta')Q(x, y, \delta)$$
$$=(\delta-\delta')x^2\geqslant 0。$$

等式仅在$y$轴上成立。又$\Gamma$必为正定向。

现设距$O$最近的极限环为$\Gamma_\delta$，则(9.58)的其他极限环都应包围$\Gamma_\delta$。

1) 先设$n>0$, $l\geqslant 0$。

由引理9.9知存在$c_1<0<c_2$，使$\Gamma_\delta$位于$c_1\leqslant y\leqslant c_2$中，且与$y=c_1$, $y=c_2$分别切于$(0, c_1)$与$(0, c_2)$。由引理9.8知有

$$-\infty<c_1<0<-\delta<c_2<\frac{1}{n}。$$

取$e_1=-\infty$, $h_1=0$, $h_2=-\delta$, $e_2=\frac{1}{n}$，记$f(y)=y+\delta$,

$$g(y)=(y-ny^2)e^{-ly},$$

则易知对任何实数$\alpha$, $f(y)+\alpha g(y)$在$(c_1, c_2)$中变号。又当$y\neq-\delta$时，$(y+\delta)f(y)>0$；当$y\neq 0$且$y<\frac{1}{n}$时，且$yg(y)>0$。又由引理9.8及$n>0$, $l\geqslant 0$知

$$\left(\frac{f(y)}{g(y)}\right)'=\frac{e^{ly}}{(y-ny^2)^2}[l(y+\delta)y(1-ny)$$
$$+n(y+\delta)^2-\delta(n\delta+1)]>0,$$

当$y(y+\delta)>0$。故由引理9.10知存在$d_1\in(c_1, 0)$, $d_2\in(-\delta, c_2)$及实数$\beta$，使

$$(y-d_1)(y-d_2)[f(y)-\beta g(y)]>0,$$

当$y\neq d_1$, $y\neq d_2$。

包围$\Gamma_\delta$的环若存在，它与$x=0$只分别在$y<c_1$和$y>c_2$相交。今取

$$W=\beta xe^{-ly}-2ly-\beta\int(y+\delta)e^{-ly}dy, \tag{9.65}$$

则

$$A = P_x + Q_y + PW_x + QW_y = y + \delta - \beta(y - my^2)e^{-ly}$$
$$= f(y) - \beta g(y)$$

满足：

(1) 在 $y=d_1$ 和 $y=d_2$ 上有 $A=0$；

(2) 在 $y \leqslant d_1$ 内存在 $N_1=-1$, $M_1=lx+y+\delta$, 使

$$PN_1 + QM_1 = y - my^2 < 0,$$

$$\left(\frac{AM_1}{PN_1+QM_1}\right)_x - \left(\frac{AN_1}{PN_1+QM_1}\right)_y = e^{-ly}\left(\frac{f(y)}{g(y)}\right)' > 0,$$

在 $y \geqslant d_2$ 内存在 $N_2=-1$, $M_2=lx+y+\delta$, 使

$$PN_2 + QM_2 = y - my^2 > 0,$$

$$\left(\frac{AM_2}{PN_2+QM_2}\right)_x - \left(\frac{AN_2}{PN_2+QM_2}\right)_y = e^{-ly}\left(\frac{f(y)}{g(y)}\right)' > 0.$$

在 $d_1 \leqslant y \leqslant d_2$ 内 $A \leqslant 0$, 故当 $Q=x \neq 0$ 时，有

$$\left(\frac{A}{Q}\right)_x = -\frac{A}{x^2} \geqslant 0.$$

定理 9.12 的一切条件都得到满足。因此证得(9.58)当 $n>0$, $l \geqslant 0$ 时，$O$ 外围极限环的唯一性。

2) 次设 $nl \leqslant 0$。

这时 $1-4nl>0$, 引理 9.11 成立。证明与前类似，但现在以 $u=x-\lambda y$ 代替 $y$, 即取引理 9.9 中的 $a=1$, $b=-\lambda$。又取

$$f(u) = \delta c(1-(\lambda l+1)u) + \frac{1+n\delta}{2\lambda l+1}\left(\delta + \frac{ln}{\lambda l+1}\right),$$

$$g(u) = u[1-(\lambda l+1)u],$$

则

$$\left(\frac{f(u)}{g(u)}\right)' = \left[\frac{\delta c}{u} + \frac{1+n\delta}{2\lambda l+1}\left(\delta + \frac{l+n}{\lambda l+1}\right)\frac{1}{1-(\lambda l+1)u}\right]'$$
$$= -\frac{\delta c}{u^2} + \frac{1+n\delta}{2\lambda l+1}(\lambda l+1)$$
$$\times\left(\delta + \frac{l+n}{\lambda l+1}\right)\frac{1}{[1-(\lambda l+1)u]^2} > 0, \text{ 当 } u \neq 0.$$

现在

$$P - \lambda Q = (u-c)[lu + (2\lambda l+1)y + \delta - \lambda + lc]$$

$$+c(\delta-\lambda+lc)=0$$

是双曲线。$u=c$ 是它的一条渐近线。在 $u<c$ 内只有 $P-\lambda Q=0$ 的一支。对任意的 $k<c$，直线 $u=k$ 和这一支有且只有一个交点。

又现在可取

$$W=-\left(\beta+\frac{l}{\lambda l+1}\right)(2\lambda l+1)y+\left(\beta\lambda-\frac{1}{\lambda l+1}\right)\ln(c-u),$$

则有：

$$\begin{aligned}A&=P_x+Q_y+PW_x+QW_y\\&=\frac{1}{c-u}\left[\delta c+\left(\frac{lc+\delta-\lambda}{\lambda l+1}-\delta\right)u-\beta u+\beta(\lambda l+1)u^2\right]\\&=\frac{1}{c-u}[f(u)-\beta g(u)].\end{aligned}$$

又在 $u\leqslant d_1$ 内可取 $N_1=-\lambda$，$M_1=(2\lambda l+1)(u-c)+\lambda^2$，在 $u\geqslant d_2$ 内可取

$$N_2=-\lambda,\ M_2=(2\lambda l+1)(u-c)+\lambda^2,$$

于是便有：

$$PN_i+QM_i=\mp g(u),$$

$$\left(\frac{AM_i}{PN_i+QM_i}\right)_x-\left(\frac{AN_i}{PN_i+QM_i}\right)_y$$
$$=(2\lambda l+1)\left(\frac{f(u)}{g(u)}\right)'>0,$$

又在 $d_1\leqslant u\leqslant d_2$ 内 $A\leqslant 0$，$P-\lambda Q\neq 0$ 时有：

$$\left(\frac{-\lambda A}{P-\lambda Q}\right)_x-\left(\frac{A}{P-\lambda Q}\right)_y=\frac{(2\lambda l+1)(u-c)A}{(P-\lambda Q)^2}\geqslant 0.$$

故定理 9.13 的一切条件都得到满足。定理得证。 ∎

由此定理的证明可以看出技巧性较高，估计要推广此法去证明(Ⅱ)$_{n=0}$ 的极限环的唯一性也是不容易的。

## 七、二次系统二阶细焦点外围极限环的唯一性

在二次系统三阶细焦点外围的无环性已获得证明之后，人们自然会猜想："是否二次系统在其二阶细焦点外围最多只有一个极限环，在其一阶细焦点外围最多只有两个极限环，在其粗焦点外围

最多只有三个极限环?"(见文献[9.29])对于这个问题，只有在二阶细焦点的情况有一些结果，但不完全。

首先，在1985年文献[9.30]对$(\mathrm{II})_{n=0}$类方程：

$$\dot{x}=-y+lx^2+mxy,\ \dot{y}=x(1+ax+by) \tag{9.66}$$

其中
$$ml-a(b+2l)=W_1=0,$$
而
$$W_2=ma(5a-m)(l^2b-a^2(b+2l))\neq 0.$$
证明了极限环的唯一性。证明大意如下：

1) 不妨设$m=-1$，于是$b=-2l-\dfrac{l}{a}$，$a\neq 0$。引进变换

$$dt=\frac{d\tau}{1+x}$$

把(9.66)化为二阶方程，再化到Liénard平面，可得：

$$\dot{x}=y-F(x),\quad \dot{y}=g(x)。\tag{9.67}$$

其中

$$f(x)=\frac{lx[1+(a+1)x]}{a(1+x)^2},$$

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx=\frac{2a+1}{a}l(x-\ln(1+x))-\frac{lx^2}{1+x},$$

$$g(x)=\frac{x}{a(1+x)^2}[\lambda x^2+a(a+1)x+a],\ \lambda=a^2-l^2(2a+1).$$

2) 对(9.67)引入Филиппов变换：

$$z=\int_0^x g(x)dx=G(x),$$

记$x_1(z)>0$及$x_2(z)<0$为上述变换之逆，又

$$F_1(z)=F(x)\text{当}x>0;\ F_2(z)=F(x)\text{当}x<0.$$

于是(9.67)变为：

$$\frac{dz}{dy}=F_i(z)-y\quad(i=1,\ 2). \tag{9.68}$$

3) 应用文献[9.11]中的下一个唯一性定理：

**定理 9.14** 设$f(x)$、$g(x)\in C(x_{02},\ x_{01})$，$x_{02}<0<x_{01}$，$xg(x)>0$当$x\neq 0$。记$z_{0i}=G(x_{0i})$ $(i=1,\ 2)$，$z_0=\min(z_{01},\ z_{02})$。又设：

i) 存在 $a$, $0\leqslant a\leqslant z_0$, 使 $F_1(z)\leqslant 0\leqslant F_2(z)$ 当 $0\leqslant z\leqslant a$, 又 $F_1(z)\neq F_2(z)$ 当 $0<z\ll 1$; $F_1(z)>0$ 当 $a<z<z_{01}$.

ii) $F_2'(z)\leqslant 0$ 当 $F_2(z)<0$, $0<z<z_{02}$.

iii) $F_1(z)F_1'(z)$ 在 $z>a$ 上不减, 或 $F(x)f(x)/g(x)$ 在 $(a^*, x_{01})$ 上不减, 这里 $a^*$ 是 $a$ 在 $x$、$z$ 变换之下 $a$ 的对应值.

iv) $F_1'(z)\geqslant F_2'(u)$ 若 $F_1(z)=F_2(u)$, $u\geqslant z>a$, 或是:

对任何常数 $c>0$, 二曲线 $F(u)=F(x)$ 和 $G(u)=G(x)+c$ 在区域 $x_{02}<u<0$, $a^*\leqslant x<x_{01}$ 内至多有一个 $S$ 交点[1)].

则方程(9.67)在带域 $x_{02}<x<x_{01}$ 内至多有一个极限环, 若存在, 必为稳定的. 即可证(9.66)在二阶细焦点 $O$ 外围至多只有一个极限环. 若存在, 必为稳定的. 详情太繁, 此处从略.

比文献[9.30]稍后, 在文献[9.31]中又证明了二次系统:

$$\dot{x}=-y+ax^2+xy,\quad \dot{y}=x+lx^2+mxy+\frac{1}{2}y^2 \tag{9.69}$$

的二阶细焦点 $O$ 外围若存在极限环, 必为唯一的. 这里

$$m\left(l+\frac{1}{2}\right)-a(1-2l)=0,$$

$$a(10l+1)\left[(4l-1)a^2+\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]\neq 0.$$

证明仍应用定理 9.14.

最近, 文献 [9.32] 讨论了比(9.66)更一般的 II 类具二阶细焦点 $O$ 的方程:

$$\dot{x}=-y+lx^2+mxy+y^2,\quad \dot{y}=x(1+ax+by) \tag{9.70}$$

的极限环的唯一性, 其中:

$$W_1=m(l+1)-a(b+2l)=0,$$

$$W_2=ma(5a-m)\left[(l+1)^2(b+1)-a^2(b+2l+1)\right]\neq 0. \tag{9.71}$$

得到以下两个定理:

---

1) 设 $\Delta>0$, 如果 $D(z)=F_1(z)-F_2(z)>0(<0)$, 当 $0<z-\Delta<<1$, 且存在 $z_1$, $0<z_1<\Delta$, 使 $D(z)\leqslant 0(\geqslant 0)$, 但 $D(z)\neq 0$ 当 $z_1<z<\Delta$, 则称 $(\Delta, F_1(\Delta))$ 为曲线 $y=F_1(z)$ 与 $y=F_2(z)$ 的一个 $S$ 交点(参见文献[9.11]).

**定理 9.15**　当$[(l+1)^2(b+1)-a^2(b+2l+1)](b+2l+3)<0$时若(9.70)满足下列两条件之一：

i) $0<m<5a$, $(5a+m)(b+1)-3am(a-m)<0$;

ii) $m>5a$, $(5a+m)(b+1)-3am(a-m)>0$。

则(9.70) 在二阶细焦点$O$外围最多存在一个极限环。又当 $b+2l+3=0$ 时，若 $l\in\left(-\frac{8}{5}, -1\right)$，则 (9.70) 至多存在一个极限环，它必须包围二阶细焦点。

**定理 9.16**　1) $l=-1$ 时有：

i) 当 $m\leqslant 5a$ 时(70)不存在极限环；

ii) 当 $m>5a$ 时(70)至多存在一个极限环，它必包围 $O$；

iii) 当 $0<m-5a\ll 1$ 时(70)存在唯一极限环。

2) $l\neq -1$ 时，若

$$[(l+1)^2(b+1)-a^2(b+2l+1)](b+2l+3)<0,$$

且 $0<\frac{b+2l}{l+1}-5\ll 1$，则(9.70)在二阶细焦点$O$外围存在唯一的环。

**推论**　具有二阶细焦点$O$和零特征根奇点 $N(0, 1)$的二次系统

$$\dot{x}=-y+lx^2+mxy+y^2, \quad \dot{y}=x(1+ax-y) \tag{9.72}$$

$\left(\text{其中 } m=a(2l-1)/(l+1),\ l\neq -2, -1, 0, \frac{1}{2}\right)$当$l\in(-2, -1)$时至多存在一个极限环，它必定包围$O(0, 0)$；当 $0<l+2\ll 1$ 时(9.72) 存在唯一极限环；当 $l\in(-\infty, +\infty)\setminus(-2, -1)$ 时，(9.72)没有极限环(见文献[9.33])。

定理 9.15 的证明需要用到下面的唯一性定理(见文献[9.34])：

**定理 9.17**　设方程

$$\dot{x}=\varphi(y)-F(x), \quad \dot{y}=-g(x) \tag{9.73}$$

满足下列条件：

1) $F(x)\in C^1(|x|<d_1)$, $F'(x)=f(x)$, $F(0)=0$;

2) $\varphi(y)\in C^1(|y|<d_2)$, $y\varphi(y)>0$, $\varphi'(y)>0\quad(y\neq0)$;

3) $xg(x)>0(x\neq0)$, $g(x)\in \mathrm{Lip}(|x|<d_1)$;

$$G(x)=\int_0^x g(x)dx;$$

4) 对于经过Филиппов变换后的 $F_1(z)$, $F_2(z)$ 有下列条件:

i) 存在 $a_0\geqslant0$, 使当 $0\leqslant z\leqslant a_0$ 时, 有 $F_1(z)\leqslant0\leqslant F_2(z)$, 但当 $0<z\ll1$ 时, $F_1(z)\not\equiv F_2(z)$; 又当 $z>a_0$ 时, $F_1(z)>0$; 当 $F_2(z)<0$ 时, 有 $F_2'(z)\leqslant0$。

ii) $F_1(z)F_1'(z)$ 在 $z>a_0$ 时不减; 当 $|y|$ 增加时, $\varphi'(y)$ 不增(或 $F_1'(z)$ 在 $z>a_0$ 上不减, 当 $y(\neq0)$ 增加时, $\varphi'(y)/\varphi(y)$ 不增)。

iii) 当 $F_1(u)=F_2(z)$ 时, $F_1'(u)\geqslant F_2'(z)$, $a_0\leqslant u\leqslant z$。

则(9.73)至多有一个极限环,若存在,必为稳定环。

最近文献[9.35]中在条件 $m<5a<0$, $b<0$, $b^2<15a^2$ 之下改用旋转向量解分解法重新证明了具二阶细焦点 $O$ 的二次系统(9.66)的包围 $O$ 的极限环的唯一性。我们希望能用这种方法证明任何二次系统在二阶细焦点外围极限环的唯一性。

关于二次系统极限环唯一性的文章还有[9.36]、[9.37]、[9.38]、[9.42]、[9.49]、[9.50]、[9.52]、[9.53]、[9.54]、[9.55]、[9.56]、[9.57]、[9.58]、[9.59]、[9.69]、[9.71]等。此外,关于有界二次系统极限环的唯一性, J. Llibre等得到很完整的结果,将于下一节介绍。因为所用的方法与本节的方法完全不同。

特别值得提到的是:具有抛物线解的二次系统的极限环的唯一性已在文献[9.60]与[9.62]中得到证明。我们将在§17中再介绍[9.62]的工作。此外,关于二次系统的极限环的存在性最近还有文献[9.72]和[9.73]。

在本节中我们看到不少多项式系统都是先化到Liénard平面,然后再去研究它的定性性质的。当然,此法也适用于一般平面自治系统。

我们知道, Liénard 方程:

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0 \tag{9.74}$$

可以化成一阶方程组：

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-f(x)y-g(x), \tag{9.75}$$

也可以化成：

$$\dot{x}=y-F(x),\ \dot{y}=-g(x),\quad F(x)=\int_0^x f(\xi)d\xi. \tag{9.76}$$

后者称为 Liénard 平面中的 Liénard 系统。

在文献[9.65]中发现，如果记 $f(x)=f_0(x)+f_e(x)$，其中

$$f_0(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2} \text{ 与 } f_e(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \tag{9.77}$$

分别表示 $f(x)$ 的奇函数部分和偶函数部分。于是易见(9.74)等价于：

$$\dot{x}=y-F_e(x),\ \dot{y}=-f_0(x)[y-F_e(x)]-g(x),$$
$$F_e(x)=\int_0^x f_e(\xi)d\xi. \tag{9.78}$$

当 $f$ 为偶(奇)函数时，(9.78)就是(9.76)和(9.75)，所以是二者的自然推广。在文献[9.65]中作者证明了，若 $g(x)$ 为奇函数，$xg(x)\neq 0$ 当 $x\neq 0$，$F_e(x)$ 当 $x>0$ 时不变号，且不恒等于零。则(9.78)没有非明显的周期解，推广了G.S.Rychkov与A.Lins，W.de Melo，C.C.Pugh的结果。在文献[9.66]中作者还用此法研究了极限环唯一性，易见(9.74)也等价于：

$$\dot{x}=y-F_0(x),\ \dot{y}=-f_e(x)[y-F_0(x)]-g(x),$$
$$F_0(x)=\int_0^x f_0(\xi)d\xi. \tag{9.79}$$

这一点在文献[9.65]中未曾注意到。

## 参考文献

[9.1] Ye Yanqian and others. Theory of limit cycles, Trans. Math. Monographs, v. 66, 1986, Amer. Math. Soc.

[9.2] Cai Sui-lin. A quadratic system with third order fine focus,

Chin. Ann. Math. 2(1981), 475～478.

[9.3] Wang Mingshu and Lin Yingju. Nonexistence of limit cycles for a quadratic system having a third order weak focus. Chin. Ann. Math. 3(1982), 721～724.

[9.4] Du Xingfu. Quadratic systems with a weak focus of order 3, Sci. Bull. 16(1982), 1020.

[9.5] Черкас. Л. А. Отсутствие Циклов в уравнение. $y'=Q_2/P_2$ имеющем фокуе третьей степени негрубости, Диф.урав.12(12), 1976, 2281～2282.

[9.6] Li Chengzhi. Non-existence of limit cycle around a weak focus of order three for any quadratic system, Chin. Ann. of Math. 7B (2), 1986, 174～190.

[9.7] Черкас Л А. Отсутствие предельных циклов вокруг трехкратного фокуса в квадратичной системе на плоскости, Диф.урав.22(1986), no. 11, 2015～2017.

[9.8] Ямчков Г С. Некоторые критерии наличия и отсутствия предельных циклов У динамической системы второго порядка, Сибирский Матем. Жур. 7(6), 1966, 1425～1431.

[9.9] 张平光。二次系统二阶三阶细焦点外围极限环不存在性的研究。科学通报, 1989, no. 18, 1365～1368.

[9.10] Coppel W A. Some quadratic systems with at most one limit cycle, Dynamics Reported, v. 2(1989), 61～88.

[9.11] 曾宪武。Lienard 方程极限环的唯一性问题。中国科学, A辑1(1982), no. 1, 14～20.

[9.12] Coll B and Llibre J. Limit cycles for a quadratic system with an invariant straight line and some evolution of phase portraits, Coll. Math. Soc. J. Bolya, I. 53, Qual.Th.Diff.Eqs., Szeged (Hungary), 1988, 111～123.

[9.13] Ye Yanqian. Rotated vector fields decomposition method and its applications, Lect. Notes in Math. v. 1455(1991) Springer-Verlag.

[9.14] Kooij R. Existence and uniqueness of limit cycles in qaudratic systems of class $(\text{II})_{l=m=0}$, Ann. of Diff. Eqs. 7(2), 1991, 133～144.

[9.15] Coppel. W A. A new class of quadratic systems, J.Diff.Eqs. 92(1991), no.2, 360～372.

[9.16] Coppel. W A. Quadratic systems with a degenerate critical point, Bull, Austr. Math. Soc. v. 38(1988), 1～10.

[9.17] Zhang Zhifen. On the uniqueness of limit cycles of certain equations of nonlinear oscillations, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 119 (1958), 659, 662, 或 Proof of the uniqueness theorem of limit cycles of generalized

Lienard equations, Applicable Anal. 23(1986), 63~76.

[9.18] Chen Lan Sun. Uniqueness of the limit cycle of a planar quadratic system, Acta Math. Scinica, 20(1977), 11~13.

[9.19] 孙建华. 二次系统(Ⅲ)$_{\delta=-m}$的极限环的唯一性问题. 科学通报, 1990, no.13, 887~890.

[9.20] 孙建华. 二次系统 (Ⅲ)$_{\delta=-m}$的极限环(一). 科学通报, 1991, no.12;

[9.21] 孙建华. 一类高次多项式系统的极限环及其对二次系统(Ⅲ)的应用. 数学学报, 33, 1990, no.5, 674~678.

[9.22] Zhang Ping guang. On the uniqueness of limit cycles and stability of separatrix cycle for a quadratic system, Northeastern Math. J. 6(2), 1990, 243~252.

[9.23] Ye Yanqian. New methods for the proof of non-existence and uniqueness of limit cycles of quadratic system (to appear).

[9.24] Coppel. W A. Quad atic systems with a critical point of higher multiplicity, Diff, & Int. Eqs. v.3(1990), no.4, 709~720.

[9.25] Andronov A A, Leontovich E A, Gordan I I and Maier A G. Qualitative theory of dynamical systems of second order, Halsted Press, 1973.

[9.26] Malkus. D S, Nohel J A and Plohr B J. Analysis of new phenomena in shear flow of non-Newtonian fluids, SIAM J. Appl, Math. (to appear).

[9.27] 叶彦谦. 微分方程定性理论的几个研究课题, 常微分方程与控制论, 1988, 华中师大出版社, 57~70.

[9.28] 张衡. 广义旋转向量场中极限环的唯一性. 南京大学学报数学半年刊(增刊). 1993, 81~90.

[9.29] Ye Yanqian. On the impossibility of (2, 2) distribution of limit cycles of any real quadratic differential system, J. Nanjing Univ. Math. Biquarterly 1985. no.2, 161~182.

[9.30] Han Maoan. On the uniqueness of limit cycles of quadratic systems of type (Ⅲ)$_{n=0}$ around a focus of order 2, Chin. Ann. of Math. 6(A), no.6, 1985, 661~668.

[9.31] Chen Weifeng. The uniqueness of limit cycles of a quadratic system with a fine focus of order 2, J. Zhejiang Univ. v.19, 1985, no.3, 107~113.

[9.32] Chen Wen-cheng, Zhang Ping guang. On the uniqueness of the limit cycle of the quadratic system with a weak focus of order 2, J. Sys. Sci and Math. Sci. 11(3), 1991, 217~226.

[9.33] 张平光, 蔡燧林. 具有二阶细焦点和零特征根奇点的二次系统. 科学通报, 1989, no.7, 486~489.

[9.34] 张芷芬，高素志。一类非线性方程极限环的唯一性问题。北京大学学报。1986, 1, 1～14。

[9.35] Ye Yanqian. A new method for the proof of the uniqueness of limit cycles (Preprint).

[9.36] Zhang Pingguang and Cai Suilin. Quadratic systems with a weak focus, Bull, Austr Math. Soc. v.44(1991), 511～526.

[9.37] 蔡燧林，张平光。具有细鞍点的二次系统。数学研究与评论，v. 7 (1987), no.1, 63～68.

[9.38] Zhang Pingguang. The uniqueness problem of limit cycles of quadratic systems $(I)_{l=0}$, Ann. of Diff. Eqs.7(2), 1991, 243～249.

[9.39] 蔡燧林，张平光。二次系统极限环的唯一性。高校应用数学学报，v.6 (1991), no.3, 450～461.

[9.40] 蔡燧林。二次系统研究近况。数学进展, v.18(1989), 5～21.

[9.41] 张平光，方小牛。二次系统(I)类方程极限环唯一性定理的证明，浙江大学学报, 23(1989), no.6, 912～915.

[9.42] 孙建华。二次系统$(\mathrm{II})_{m=0}(0<n<1)$的极限环的唯一性与分支。科学通报, 1992, v.37, 330。

[9.43] 韩茂安。对无环性的一个注解。(将于科学通报发表)。

[9.44] Liang Zhaojun. On the critical cycles of a quadratic system with third order focus, J. of Wuhan Univ. 6, 1986, no.4, 411～417.

[9.45] 王现。关于系统 $\dot{x}=\varphi(y)-F(x)$, $\dot{y}=-g(x)$ 的极限环的唯一性。南京大学学报, 26 (1990), no.3, 363～372.

[9.46] 汪中位。一类具有一阶细焦点的二次系统。浙江大学学报，1984, 18, 3, 74～86.

[9.47] 黄克成。一类具有一阶细焦点的二次系统。南京大学学报，数学半年刊(增刊), 1993.197～201.

[9.48] Chen Weifeng. A quadratic system with a second order weak focus, J. Zhejiang Univ. v.22(1988), no.1, 141～155.

[9.49] Perko L M and Shu S L. Existence, uniqueness and nonexistence of limit cycles for a class of quadratic systems in the plane, J. Diff. Eqs. 53(1984), no.2, 146～172.

[9.50] Wang Xian. The global bifurcation of a class of cubic system and the quadratic system $(B)_{a_{11}=0}$, Ann. of Diff, Eqs. 2(3), 1986, 313～326.

[9.51] Cai Suilin. The proof of non-existence of limit cycle for real quadratic systems having a stellar node or a center, J. Eng. Math. v.6, no.1, 1989, 92～94.

[9.52] Han Maoan. Existence of limit cycles for quadratic systems with one infinite singular point, Chin.Ann. Math.10B, 1989, 261～271.

[9.53] Zhang Pingguang. The uniqueness of limit cycles of quadratic system $(\mathrm{I})_{m=0}$, Chin. Sci. Bull., 1990, v.35, no.5, 360～365.

[9.54] Zhang Pingguang. Existence of the homoclinic loop for a quadratic system and limit cycles appearing near it, J. Zhejiang Univ., v.23(1989), no.1, 1～7.

[9.55] Chen Shuping. Limit cycles of second order systems having parabolic integral curves, J. Math. Res. Exp., 1987, no.1, 153～155.

[9.56] C. Christopher. Quadratic systems having a parabola as an integral curve, Proc. Roy. Soc. Eding., 112A(1989), 113～134.

[9.57] Zhou Kongrong. The equation $\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy$, $\dot{y}=x(1+ax)$ has only 2 limit cycles not containing each other in the whole plane, J. Chengdu. Univ., Nat. Sci, 5(1986), no.1, 31～38.

[9.58] Yang Xinan. A bounded quadratic system with a weak focus, Ann. of Diff. Eqs., 4(2), 1988, 231～242.

[9.59] Chen Weifeng. A quadratic system with a second order weak focus. (II), J. Zhejiang Univ. 22(1988), no.5, 1～10.

[9.60] Zegeling A and Kooij R E. Uniqueness of limit cycles in polynomial systems with algebraic invariants. (Preprint, 1992).

[9.61] Zhu Deming. Planar quadratic differential systems with a weak saddle, Ann. of Diff. Eqs, 2(4), 1986, 497～508.

[9.62] 谢向东，蔡燧林．具抛物线不变集的二次系统至多有一个极限环。科学通报，39(1994)，265～267.

[9.63] Xie Xiandong. On the nonexistence of limit cycles of quadratic system of type $(\mathrm{II})_{n=0}$, Ann.of Diff. Eqs. 8(1), 1992, 98～103.

[9.64] Zhang Pingguang and Li Wenhua. Quadratic system with weak focus and strong focus, Ann. of Diff. Eqs. 8 (1), 1992, 122～128.

[9.65] Villari G. A new system for Lienard equation, Boll. V. M. I.(7).1-A, 1987.

[9.66] Albrecht F. Villari G. On the uniqueness of the periodic solutions of certain Lienard equations, Nonl. Anal. The. Met. Appl. v. 11, (1987)no.11, 1267～1277.

[9.67] 蔡燧林．$(\mathrm{III})_{l=n=0}$类方程的极限环(预印本，1992)．

[9.68] Lu Gang and Liang Zhaojun. Non-existence of singular cycles in a quadratic differential system with fine focus of order three, Preprint, 1993.

[9.69] Малышев Ю В, Захаров В П. О квадратичных системах с предельными циклами, Диф. Ураф. Т. 28(1992), 1459～1461.

[9.70] Zhu Deming. Cycle control functions and the number of limit

cycles, Acta Math. Appl. Sinica, Eng. Ser. v.7(1991), 108~113.

[9.71] Zhang Weide. Existence and uniqueness of limit cycles for a class of quadratic system, Ann, of Diff Eqs. 7(4), 1991, 482~491.

[9.72] Ye Yanqian. Qualitative theory of the quadratic differential systems (I), Preprint, 1994.

[9.73] Ye Yanqian. Limit cycles and bifurcation phenomena for the quadratic differential systems (II)$_{m=0}$ having three anti-saddles (I), (II), Preprints, 1994.

[9.74] Ilamanov A I and Ilamanova M A. Quadratic systems having no more than two cycles, Akad. Nauk Turkmenst. SSR, Ronf. 4~6 okt. 1990, on differential equations, 63~64.

[9.75] Stolyarov V V. On the absence of limit cycle in a quadratic system, Diff. Int. Eqs., 1988, 18~19. Gor'kov. Gos. Univ. Gorki. (Russian).

# §10. 极限环的不存在性、存在性和唯一性(续)

本节主要介绍西班牙学派在这方面的贡献。他们的成果有关于二次系统的，也有关于次数高于二的多项式系统的，其所使用的方法与§9的完全不一样。

**一. 有一个有限远奇点的二次系统与有界二次系统** (见文献[10.1])

考虑一个平面二次系统，设 $O(0, 0)$ 是它的焦点或中心，则方程可写为：

$$\dot{x}=y+P_2(x, y),$$
$$\dot{y}=-x+\delta y+Q_2(x, y), \quad |\delta|<2 \tag{10.1}$$

的形式。现改用极坐标方程，将(10.1)变为：

$$\dot{\gamma}=u(\theta)\gamma+f(\theta)\gamma^2, \quad \dot{\theta}=v(\theta)+g(\theta)\gamma, \tag{10.2}$$

其中

$$u(\theta)=\delta\sin^2\theta, \quad v(\theta)=-1+\delta\sin\theta\cos\theta<0,$$
$$f(\theta)=\cos\theta P_2(\cos\theta, \sin\theta)+\sin\theta Q_2(\cos\theta, \sin\theta),$$
$$g(\theta)=\cos\theta Q_2(\cos\theta, \sin\theta)-\sin\theta P_2(\cos\theta, \sin\theta). \tag{10.3}$$

下面的引理是熟知的(见文献[10.2])：

**引理 10.1** 设 $\Gamma$ 是(10.1)的闭轨，其内域为 $D$，则存在一个包含 $D$ 的开域 $U$，使 $\dot{\theta}$ 在 $U$ 中不为零，于是 $\Gamma$ 有参数表示 $\gamma=\gamma(\theta)$，且代换 $(\gamma, \theta)\to(\rho, \theta)$ 是 $U$ 中一个微分同胚，这里

$$\rho=\frac{\gamma}{v(\theta)+g(\theta)\gamma}. \tag{10.4}$$

由引理 10.1 可知(10.1)的闭轨 $\Gamma$ 对应于 $U$ 中的方程

$$\frac{d\gamma}{d\theta}=\frac{u(\theta)\gamma+f(\theta)\gamma^2}{v(\theta)+g(\theta)\gamma} \tag{10.5}$$

的一个 $2\pi$ 周期解 $\gamma(\theta)$，满足 $\gamma(0)=\gamma(2\pi)$， 又 (10.5) 在变换 (10.4) 之下成为：

$$\frac{d\rho}{d\theta}=A(\theta)\rho^3+B(\theta)\rho^2+C(\theta)\rho\equiv S(\rho,\ \theta). \tag{10.6}$$

其中

$$A(\theta)=\frac{g(\theta)}{v(\theta)}[u(\theta)g(\theta)-v(\theta)f(\theta)]=\frac{g(\theta)F(\theta)}{v(\theta)},$$

$$B(\theta)=f(\theta)-g'(\theta)-\frac{g(\theta)}{v(\theta)}[v'(\theta)-2u(\theta)], \tag{10.7}$$

$$C(\theta)=\frac{u(\theta)-v'(\theta)}{v(\theta)}.$$

注意：在直角坐标之下有：

$$F(x,\ y)=(x-\delta y)P_2(x,\ y)+yQ_2(x,\ y),$$

$$g(x,\ y)=xQ_2(x,\ y)-yP_2(x,\ y). \tag{10.8}$$

显见 $g(x,\ y)=0$ 或 $g(\theta)=0$ 确定无限远奇点的位置。至于 $F(x,\ y)=0$ 的作用，可由下面的引理看出来。

**引理 10.2** (i) 若 $F(\theta^*)=0$，则或是存在 $\gamma^*\neq0$，使 $(\gamma^*\cos\theta^*,\ \gamma^*\sin\theta^*)$ 是 (10.1) 的一个异于 $O$ 的奇点，这时 $g(\theta^*)\neq0$；或是 $g(\theta^*)=0$。

ii) 反之，若 $(\gamma^*\cos\theta^*,\ \gamma^*\sin\theta^*)$ $(\gamma^*\neq0)$ 是 (10.1) 的一个奇点，则 $F(\theta^*)=0$。

**证** 先证 ii) 由假设有：

$$u(\theta^*)+f(\theta^*)\gamma^*=0,\quad v(\theta^*)+g(\theta^*)\gamma^*=0.$$

由于 $v(\theta)<0$，故 $g(\theta^*)\neq0$。由上两式消去 $\gamma^*$，可得：

$$g(\theta^*)u(\theta^*)-v(\theta^*)f(\theta^*)=0,\ \text{即}\ F(\theta^*)=0.$$

再证 i) 设 $\theta^*$ 使 $F(\theta^*)=0$。如果这时有 $g(\theta^*)=0$，则 i) 成立。否则，设 $g(\theta^*)>0$(或 $<0$)，则

$$\left(\theta^*,\ -\frac{v(\theta^*)}{g(\theta^*)}\right)\quad\left(\text{或}\left(\theta^*,\ -\frac{v(\theta^*+\pi)}{g(\theta^*+\pi)}\right)\right)$$

便是(10.1)的一个异于$O$的奇点。 ▌

注 10.1　当$F(\theta^*)=g(\theta^*)=0$时，由

$$F(\theta)=u(\theta)g(\theta)-v(\theta)f(\theta)$$

可导出$f(\theta^*)=0$。再由(10.3)可解出$P_2(\cos\theta^*, \sin\theta^*)=Q_2(\cos\theta^*, \sin\theta^*)=0$，这表示方程(10.1)的两条等倾线都经过赤道上极角为$\theta^*$的无限远奇点，故$(1, \tan\theta^*, 0)$为一无穷远奇点。

注 10.2　当$F(\theta^*)=0$且存在$\gamma^*\neq 0$，使$(\gamma^*\cos\theta^*, \gamma^*\sin\theta^*)$是(10.1)的有限远奇点时，必有$g(\theta^*)\neq 0$。这一事实也可以如此解释：如果$g(\theta^*)=0$，则射线$\theta=\theta^*$通过三个奇点(其中之一为无限远奇点)，从而它应是(10.1)的积分直线。但由前面$|\delta|<2$的假定知道这是不可能的。

关于比方程(10.6)更一般的，具周期系数的 Abel 方程

$$\frac{d\rho}{d\theta}=A(\theta)\rho^3+B(\theta)\rho^2+C(\theta)\rho+D(\theta). \tag{10.9}$$

有下面的古典的定理(见文献[10.3])：

**定理 10.1**　设(10.9)中的系数都是$\theta$的连续$2\pi$周期函数，且$A(\theta)$保持常号，但不恒等于零，则它最多有三个$2\pi$周期解。

证明大意：设(10.9)有四个$2\pi$周期解：

$$\rho_1(\theta)>\rho_2(\theta)>\rho_3(\theta)>\rho_4(\theta).$$

易证以下恒等式成立：

$$\frac{\dot\rho_1-\dot\rho_2}{\rho_1-\rho_2}-\frac{\dot\rho_1-\dot\rho_3}{\rho_1-\rho_3}-\frac{\dot\rho_4-\dot\rho_2}{\rho_4-\rho_2}+\frac{\dot\rho_4-\dot\rho_3}{\rho_4-\rho_3}$$
$$=A(\theta)(\rho_1-\rho_4)(\rho_2-\rho_3).$$

两边从0到$2\pi$积分，得到

$$\ln\frac{(\rho_1-\rho_2)(\rho_4-\rho_3)}{(\rho_1-\rho_3)(\rho_4-\rho_2)}\Bigg|_0^{2\pi}$$
$$=0=\int_0^{2\pi}A(\theta)(\rho_1-\rho_4)(\rho_2-\rho_3)d\theta>0\ (<0).$$

引出矛盾。

对于方程(10.6)，由于$D(\theta)\equiv 0$，且由(10.7)知

$$A(\theta+\pi)=A(\theta),\ B(\theta+\pi)=-B(\theta),$$
$$C(\theta+\pi)=C(\theta)。\qquad(10.10)$$

因此若$\rho(\theta)$是(10.6)的一个解，则$-\rho(\theta+\pi)$也是(10.6)的一个解，又由$v(\theta)<0$可知(10.2)所定义的流微分同胚于$(\rho,\ \theta)$(半圆柱$\rho\leqslant 0,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$)上的流。在这里我们把直线$\theta=0$与$\theta=2\pi$等同起来。因此，若(10.6)的一个解满足$\rho(0)=\rho(2\pi)$，则它是一闭解(closed solution)。

当$A(\theta)\equiv 0$时，有下面的定理[10.4]：

**定理 10.2**　若在(10.6)中有$A(\theta)\equiv 0$，而$B$与$C$为连续$2\pi$周期函数，则(10.6)或是最多有两个闭解，或是$[0,\ 2\pi]$中的一切解都是闭的(证略，由(10.1)、(10.7)、(10.8)容易看出)。

由于$\rho\equiv 0$总是(10.6)的一个闭解，由(10.10)知，当$A(\theta)\equiv 0$时，或是(10.6)只有唯一的闭解$\rho\equiv 0$，或是(10.6)的一切解都是闭的。因此，以后我们不妨在条件$A(\theta)\not\equiv 0$之下来研究(10.6)的闭解，借以导出有关(10.1)的极限环的若干结论来。

为此目的，当然应用定理10.1是可以得到一些结果的。但不能导出极限环必为单重环(粗环)的结论。如果应用文献[10.5]的几个公式，则可达到此目的。

对如定理10.2前所定义的圆柱$G$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，定义$\theta=0$上的返回映射$h$如下[1)]：

对$\theta=0$上一点$(0,\ x)$定义$h(x)=\rho(2\pi,\ x)$，其中$\rho(\theta,\ x)$是(10.6)的满足$\rho(0,\ x)=x$的解。我们有如下定理[10.5]：

**定理 10.3**　$h(x)$的前面三阶导数有如下的表达式：

$$h'(x)=\exp\int_0^{2\pi}\frac{\partial S}{\partial\rho}(\rho(\theta,\ x),\ \theta)d\theta,$$

$$h''(x)=h'(x)\left[\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 S}{\partial\rho^2}(\rho(\theta,\ x),\ \theta)\times\exp\left\{\int_0^{\theta}\frac{\partial S}{\partial\rho}(\rho(\varphi,\ x)\varphi)d\varphi\right\}d\theta\right],\qquad(10.11)$$

1)　这里假定$\dot\theta>0$，如果$\dot\theta<0$，则应改初始条件$\rho(0,\ x)=x$为$\rho(2\pi,\ x)=x$，并且在下面的(10, 11)式中对调一切积分的上下限。

$$h'''(x)=h'(x)\left[\frac{3}{2}\left(\frac{h''(x)}{h'(x)}\right)^2+\int_0^{2\pi}\frac{\partial^3 S}{\partial\rho^3}(\rho(\theta, x), \theta)\right.$$
$$\left.\times\exp\left\{2\int_0^{\theta}\frac{\partial S}{\partial\rho}(\rho(\varphi, x), \varphi)d\varphi\right\}d\theta\right].$$

现在可以证明：

**定理 10.4** 设在(10.6)中 $A(\theta)\neq0$，且 $A(\theta)$ 保持常号，则：

1) 方程(10.6)在 $G$ 中至多有三个闭解，其中之一是 $\rho\equiv0$；

2) (10.6)在半圆柱 $\rho<0$ 上至多有一个闭解，若 $x$ 是此解在 $\theta=0$ 上的点 $(0, x)$ 的纵坐标，则 $h'(x)\neq1$。

3) 若 $\delta=0$，则 $\rho\equiv0$ 是(10.6)的唯一的闭解。

证 注意
$$\frac{\partial^3 S(\rho, \theta)}{\partial\rho^3}=6A(\theta),$$
从而可知：若 $A(\theta)\geqslant0$，则由定理 10.3 有 $h'''(x)>0$ 对一切 $x$。若 $A(\theta)\leqslant0$，可以改变 $\theta$ 的符号，以达到 $A(\theta)\geqslant0$ 的目的，为了证明定理，只须注意下面几点：

i) $x=0$ 是 $h(x)-x=0$ 的解，因为 $\rho\equiv0$ 是(10.6)的解。

ii) 若 $h(x)-x=0$ 有解 $x=x_1$，即 $\rho(\theta, x_1)$ 是(10.6)的闭解，则 $-\rho(\theta, x_1)$ 也是(10.6)的闭解，从而 $x_2=-\rho(\pi, x_1)$ 也是 $h(x)-x=0$ 的解，当 $x_1\neq0$ 时，易见有 $x_1x_2<0$。

iii) 若 $h'(x)=1$，则 $x$ 至少是 $h(x)-x=0$ 的二重根。但由 $h(x)-x=0$ 最多只有三个实根以及(10.10)知此种解不存在，除非 $x=0$。

iv) $\delta=0$ 时有 $C(\theta)\equiv0$，从而 $\rho=0$ 是(10.6)的至少为二重的闭解，由 $h'''(x)>0$ 知(10.6)不能再有其他闭解。

最后注意，$A(\theta)$ 保持常号当且仅当 $F(\theta)g(\theta)$ 保持常号，我们就得到文献[10.1]的第一个主要定理（但其中并不要求有限远奇点唯一）。 ▌

**定理 10.5** 若在方程(10.1)中 $F(x, y)g(x, y)$ 保持常号，则：

1) 当 $\delta\neq0$ 时，(10.1)至多有一个包围 $O$ 点的极限环，它是单重环。

2) 当 $\delta=0$ 时，(10.1) 没有包围 $O$ 点的极限环。

**注 10.3** 由定理 10.5 导不出 (I) 类方程极限环的唯一性。因为这时 $P_2(x, y)\equiv 0$，从而 $Fg=xyQ_2^2(x, y)$ 不是常号。

**注 10.4** 在 (10.1) 中特别取 $P_2(x, y)\equiv Q_2(x, y)$，$\delta=2$，则得到

$$\dot{x}=y+P_2(x, y), \quad \dot{y}=-x+2y+P_2(x, y).$$

它满足 $F(x, y)\equiv g(x, y)$，从而 $Fg$ 保持常号。但此方程不存在极限环是显而易见的。因若令 $u=x-y$，$v=x$，它就变为：

$$\dot{u}=u, \quad \dot{v}=v-u+P_2(v, v-u).$$

这是可积方程。

如何应用定理 10.5 导出一些没有或有唯一极限环的二次系统，是一个值得思考的问题。为此，在文献[10.1]中作了更深入的探讨。

今后我们常用 $QS_n$ 记一个恰有 $n$ 个有限奇点的二次系统 ($n=1, 2, 3$ 或 $4$)。

**定理 10.6** 与二次系统 (10.1) 对应的 $\Delta(\theta)$ 保持常号且不恒等于零，当且仅当下列两组互相排斥的条件之一成立（注意：(10.1) 中设 $|\delta|<2$，故不包括注 10.4 中的方程）：

1) 此二次系统为 $-QS_1$，$F(\theta)$ 有唯一的单重或三重零点 $\theta_1$，$g(\theta)$ 或只有一零点 $\theta_1$，或有单零点 $\theta_1$ 和二重零点 $\theta_2$。

2) 此二次系统为 $-QS_2$，$F(\theta)$ 有二重零点 $\theta_1$ 与单零点 $\theta_2$，$g(\theta)$ 或只有一零点 $\theta_2$，或有单零点 $\theta_2$ 与二重零点 $\theta_3$。

**证** 只须注意 $F(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 各最多只有三个实零点。今若

$$F(\theta_i)=g(\theta_i)=0 \quad (\text{对 } i=1, 2, 3),$$

则由于 $|\delta|<2$，故

$$\begin{vmatrix} -\delta\sin\theta+\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} > 0 \ (\text{对一切 } \theta),$$

从而

$$P_2(\cos\theta_i, \sin\theta_i)=Q_2(\cos\theta_i, \sin\theta_i)=0, \\ (i=1, 2, 3).$$

于是 $P_2(x, y) \equiv Q_2(x, y) \equiv 0$, 即(10.1)为线性系统, 这与假设不符。

其次,若二次系统有无数多个奇点,则由引理 10.2 知 $F(\theta) \equiv 0$, 从而 $A(\theta) \equiv 0$, 亦与假设不符。最后, 若二次系统为 $-QS_3$(或 $QS_4$), 则 $F(\theta)$ 有两个(或三个)零点。由引理 10.2 知 $g(\theta)$ 不以 $F(\theta)$ 的这些实零点作为它的零点, 从而 $F(\theta)g(\theta)=A(\theta)v(\theta)$ 应变号, 这与假设不符。对于剩下的 $QS_1$ 与 $QS_2$ 两种情况, 为使 $A(\theta)$ 保持常号, 易见必有定理中的 1) 或 2) 两情况之一出现。 ∎

下面研究定理 10.5 对 $QS_1$ 的应用。当二次系统为 $QS_1$ 时, 可以分属下列诸情况之一:

1) $F(\theta) \equiv 0$;

2) $F(\theta)$ 有三个不同的实零点 $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$;

3) $F(\theta)$ 有一个单零点 $\theta_1$ 和一个二重零点 $\theta_2$;

4) $F(\theta)$ 有一个单或三重零点 $\theta_1$, 由于现在 $O$ 为唯一的有限远奇点, 故由引理 10.2 知道 $g(\theta_1)=0$。这时又可分为五种情况:

($4_1$) $\theta_1$ 是 $g(\theta)$ 的唯一零点,单的或三重的;

($4_2$) $g(\theta)$ 以 $\theta_1$ 为单零点,但又有二重零点 $\theta_2$;

($4_3$) $g(\theta)$ 以 $\theta_1$ 为二重零点,但又有单零点 $\theta_2$;

($4_4$) $g(\theta)$ 有三个单零点 $\theta_1$、$\theta_2$、$\theta_3$;

($4_5$) $g(\theta) \equiv 0$。

现在证明下面的关于 $QS_1$ 的分类定理:

**定理 10.7** 设(10.1)为一$QS_1$, 则根据以上的不同情况, 可得下列结论:

i) 在情况 1) 与 ($4_5$) 有 $A(\theta) \equiv 0$, 故由定理 10.2 可知, 或是(10.6)有唯一的闭解 $\rho=0$, 或是(10.6)的一切解都是闭的。

ii) 在情况 2), 因 (10.1) 为 $QS_1$, 故由引理 10.2 知道, 由 $F(\theta_i)=0$ 可导出 $g(\theta_i)=0$ (对 $i=1, 2, 3$), 从而 $P_2 \equiv Q_2 \equiv 0$, 于是(10.1)为线性系统。

iii) 在情况 3), 方程(10.1)可经坐标变换化为:

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-x+\delta' y+Q_2'(x,\ y)。\tag{10.12}$$

iv）在情况$(4_1)$与$(4_2)$，可以应用定理10.5判定极限环的唯一性。

v）在情况$(4_3)$，(10.1)可经线性变换化为方程：

$$\dot{x}=y+x^2,\ \dot{y}=-x+\delta' y+Q'(x,\ y)。\tag{10.13}$$

vi）在情况$(4_4)$，原点$O$有可能成为三阶细焦点。

**证** i)、ii)、iv)已得证明。今证其余三种情况：

iii）的证明：与ii)一样，现在有

$P_2(\cos\theta_i,\ \sin\theta_i)=Q_2(\cos\theta_i,\ \sin\theta_i)=0\quad(i=1,\ 2)$。

故或有$Q_2\equiv kP_2$，或有$P_2\equiv0$(或$Q_2\equiv0$)。在第一种情况，可再作变换

$$y_1=y-kx,\quad x_1=x,$$

$$u=y_1,\ v=(-1+\delta k-k^2)x_1+(\delta-k)y_1,$$

即得对$u$、$v$的方程(10.12)。

其次，当$P_2\equiv0$时(10.1)已具有(10.12)的形式。当$Q_2\equiv0$时，可对(10.1)再作线性变换$u=y,\ v=-x+\delta y$。

v）的证明：此时如前可知$P_2$与$Q_2$应有一次公因式$lx+my$。先设$l\neq0$，于是(10.1)可写成：

$$\dot{x}=y+(lx+my)P_1,$$

$$\dot{y}=-x+\delta y+(lx+my)Q_1。\tag{10.1'}$$

改令$x_1=lx+my,\ y_1=y$，(10.1')可写成：

$$\dot{x}_1=-\frac{m}{l}x_1+\frac{l^2+lm\delta+m^2}{l}y_1+x_1(l\overline{P}_1+m\overline{Q}_1),$$

$$\dot{y}_1=Q(x_1,\ y_1),\tag{10.14}$$

又我们知道现在(由于$g(\theta)$以$\theta_1$为二重零点)

$$g(x,\ y)=xQ_2-yP_2=(lx+my)(xQ_1-yP_1)$$

有一因子$(lx+my)^2$，即在$x_1$、$y_1$坐标系之下，

$$x\overline{Q}_1-y_1(l\overline{P}_1+m\overline{Q}_1)$$

应可被$x_1$除尽，故$l\overline{P}_1+m\overline{Q}_1=kx_1$，从而(10.14)可写为：

$$\dot{x}_1=-\frac{m}{l}x_1+\frac{l^2+lm\delta+m^2}{l}y_1+kx_1^2,\ \dot{y}_1=Q(x_1,\ y_1)。$$

注意 $k\neq 0$，$l^2+lm\delta+m^2\neq 0$(因为 $|\delta|<2$)，故若令

$$x_2=x_1,\quad y_2=\frac{1}{k}\left[-\frac{m}{l}x_1+\frac{l^2+lm\delta+m^2}{l}y_1\right],\quad t_1=kt,$$

则得：

$$\dot{x}_2=y_2+x_2^2,\ \dot{y}_2=\alpha x_2+\beta y_2+\overline{Q}_2,\ \alpha\neq 0. \tag{10.15}$$

(10.15)与(10.13)形式相同。

当 $l=0$ 时，可令 $x_1=y$，$y_1=-x+\delta y$，则得：

$$\dot{x}_1=y_1+mx_1\overline{Q}_1,\ \dot{y}_1=Q.$$

这里 $m\neq 0$ 就相当于(10.1′)中的 $l\neq 0$，故可同前一样来处理。

vi) 的证明：这时可举出有三阶细焦点的二次系统如下：

$$\dot{x}=y+x(ax+y),\quad \dot{y}=-x+\delta y+x(lx+my), \tag{10.16}$$

其中

$$a<0,\quad (m-a)^2+4l>0,$$
$$(-1-a\delta+l)^2+4(l-ma)<0. \tag{10.17}$$

现在如果取 $l=1/5$，$\delta=0$，$m=3a$，则可看出：

$$W_1=W_2=0,\ W_3\neq 0.$$

即 $O(0,0)$ 是(10.16)的三阶细焦点。

结合定理 10.5 与定理 10.7 可得文献[10.1]中的第二个主要结果，如下定理所述：

**定理 10.8**　若二次系统只有一个有限远奇点，则在前述的情况 1)、2) 与 $(4_5)$，方程不存在极限环；在情况 $(4_1)$ 与 $(4_2)$，由定理 10.5 知最多存在一个极限环；在情况 3) 与 $(4_3)$，方程可分别化为 (10.12) 与 (10.13)，其极限环的唯一性已在文献 [10.7] 及 [10.28]中有证明。只有在情况 $(4_4)$，即当 $F(\theta)$ 有唯一的单重或三重实零点，而 $g(\theta)$ 有三个实零点 $\theta_1$、$\theta_2$、$\theta_3$ 时，它才有可能存在一个、两个或三个极限环。

关于有界二次系统在文献[10.7]中已有所介绍，但对极限环的唯一性问题并未得到圆满的解决。现在介绍文献[10.1]中关于有界二次系统的极限环的唯一性的定理。至于有界系统的极限环的相对位置和分支理论，我们将在 § 16 中再详细介绍。

**定理 10.9**　$BQS_3$(有三个有限远奇点的有界系统)可以存在二阶细焦点，因而极限环的最多个数至少是2。$BQS_1$ 及 $BQS_2$ 若存在极限环，必为唯一的单重环[1]。

**证明**　由文献[10.7]的定理 17.2 及[10.45]知，对一有界二次系统，不妨设它的方程为：

$$\dot{x} = -y + \delta x + lx^2 + mxy,\ \dot{y} = x(1 + x + by), \tag{10.18}$$

其中诸系数满足下列三条件之一：

1) $(b-l)^2 + 4m < 0,\ mb < 0$；　(10.19)

2) $|l| < 2,\ b = m + 1 = 0,\ l \geqslant \delta$；　(10.20)

3) $bl = m,\ b + l = 0,\ 1 + b\delta = m,\ mb < 0$[2]。　(10.21)

当(10.21)式成立时，唯一有限远奇点 $O(0, 0)$ 为稳定正常结点，特征根为 $l<0$ 及 $\frac{1}{l}<0$，且过 $O$ 有积分直线为 $y = \frac{x}{l}$，故(10.18)不存在极限环，相应的相图见图10.1(*a*)。今设(10.19)或(10.20)成立，又 $O$ 是(10.18)的细焦点，则 $\delta = 0$。用文献[10.6]中的焦点量公式得：

$$W_1 = -lm + 2l + b,$$

$$W_2 = -l(2l + b)(b - 3l)[l^2(2 - m) + m].$$

当条件(10.19)成立时，有 $m<0,\ b>0,\ m - lb < 0$。若 $bl \geqslant 0$，则 $W_1 > 0$；若 $bl < 0$ 且 $W_1 = 0$，则

$$W_2 = -l^3 m(m-5)(m - lb) < 0.$$

在后一情况有 $(1+m)^2 - 4bl > 0$，从而此时(10.18)有三个有限远奇点。

当条件(10.20)成立时，若 $l = 0$ 或 $l = \delta$，则 $x = -1$ 上充满了奇点；若 $l \neq 0,\ l \neq \delta$，则(10.18)为 $BQS_1$ 且 $W_1 = 3l \neq 0$，故 $O$ 为一阶细焦点。

今设(10.18)为 $BQS_1$ 或 $BQS_2$，则

---

1) 关于 $BQS_2$ 的极限环的唯一性在文献[10.9]中已有证明。

2) [10.9]的条件 3) $m=0,\ b=l>0$ 是错误的，已在文献[10.1]中指出，这里的条件 3) 是[10.45]中所得到的。

$$(bl-m)x^2+(1-m+b\delta)x+1=0$$

至多有一实根，故

$$(1-m+b\delta)^2-4(bl-m)\leqslant 0。$$

在(10.18)中交换 $x$ 与 $y$ 后可算出：

$$F(x,\ y)=y[bx^2+(m+1-b\delta)xy+(l-\delta)y^2]\equiv yF_2(x,\ y),$$

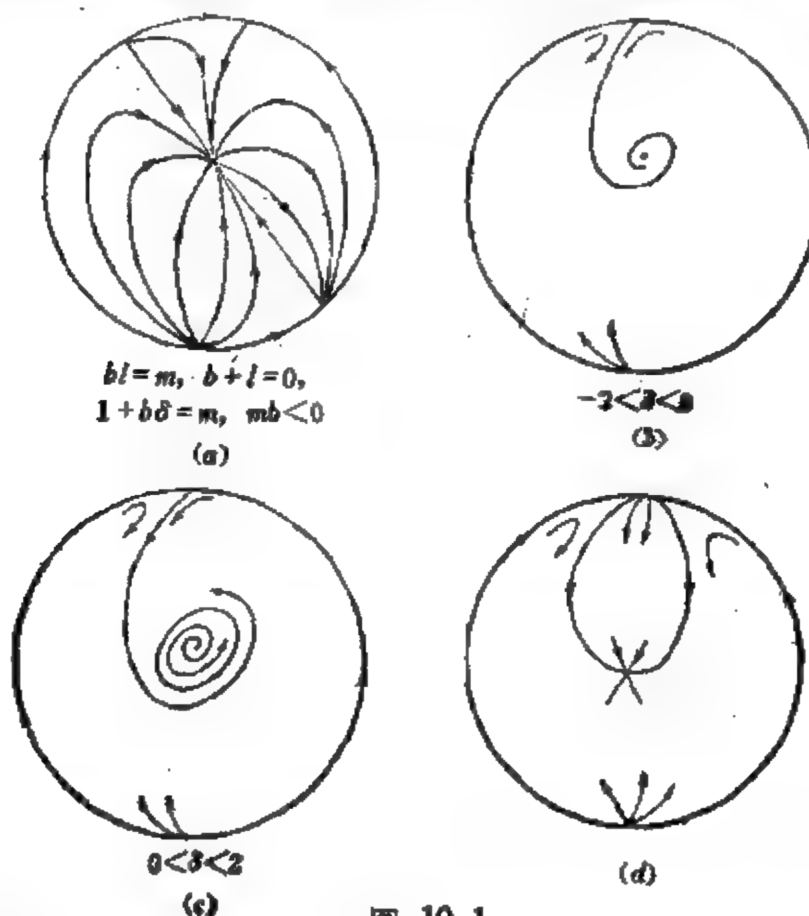
$$g(x,\ y)=y(mx^2+(l-b)xy-y^2)\equiv yg_2(x,\ y).$$

由于从 $(1-m+b\delta)^2-4(bl-m)\leqslant 0$ 可导出

$$(m+1-b\delta)^2\leqslant 4b(l-\delta).$$

由此以及(10.19)式立刻看出 $F_2$ 与 $g_2$ 不变号，从而 $Fg=y^2F_2g_2$ 不变号，故由定理 10.5 即得定理 10.9 后半部的结论。

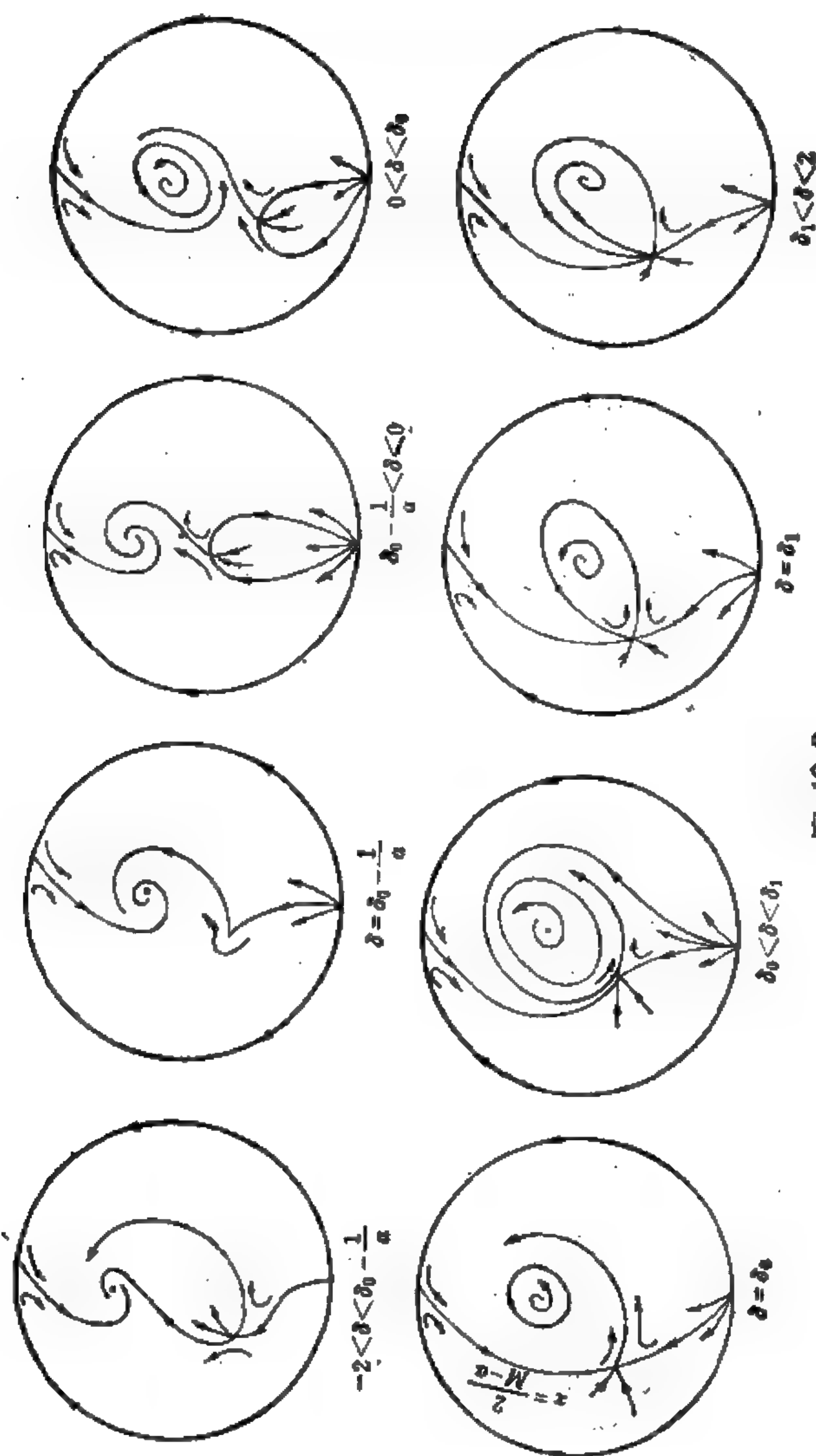
在文献 [10.1] 中还得到了 $BQS_1$ 与 $BQS_2$ 的可能相图如图 10.1 与 10.2。证明从略[1]。我们只写出下面的定理。



$bl=m,\ b+l=0,$ $1+b\delta=m,\ mb<0$ (a)　$-2<\delta<0$ (b)　$0<\delta<2$ (c)　(d)

图 10.1

1) 这里图 10.1(a)在文献[10.45]中也有，有界二次系统仅在这一情况有两个无穷远奇点。亦见 §16。



$0<\delta<\delta_0$
$\delta_1<\delta<2$
$\delta_0-\frac{1}{a}<\delta<0$
$\delta=\delta_1$
$\delta=\delta_0-\frac{1}{a}$
$\delta_0<\delta<\delta_1$
$-2<\delta<\delta_0-\frac{1}{a}$
$\delta=\delta_0$
$x=\frac{M-a}{2}$


图 10.2

**定理 10.10** 一个 $BQS_1$ 必可写成(10.18)的形式，其中

$$(1-m+b\delta)^2-4(bl-m)<0,$$

其相图只有图 10.1 中的 4 种。一个 $BQS_1$ 必可改写成：

$$\dot{x}=-y+\delta x+\left[\frac{(a+M)^2}{4}+a\delta\right]x^2+(M+\delta)xy,$$

$$\dot{y}=x(1+ax+y)。$$

这里设 $O\in\left(-\frac{a+M}{2}-\frac{1}{a},\ -\frac{a+M}{2}\right)$，极限环当 $\delta$ 从 0 增大时产生，而当 $\delta=\delta_1<2$ 时成为分界线环而消失，其相图有图 10.2 中的 8 个。当 $\delta=\delta_0=-\frac{a+M}{2}$ 时 $O$ 以外的有限远奇点

$$(x_0,\ y_0)=\left(\frac{2}{M-a},\ \frac{a+M}{a-M}\right)$$

位于积分直线 $x=\frac{2}{M-a}$ 上，当 $\delta=\delta_0-\frac{1}{a}$ 时 $(x_0,\ y_0)$ 是尖点。

最后，简单介绍文献[10.8]和[10.1]中关于有一个无限远奇点的 $QS_1$ 的结果。早在文献[10.8]中就证明过，这时方程总可写成：

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy,\qquad \dot{y}=x(1+ax+by) \tag{10.22}$$

的形式，其中诸系数满足下列三个条件之一：

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\ \ b=0,\ a=-m,\ l\neq a\delta,\ l^2<4a^2;\\&\text{(ii)}\ \ b=l\neq 0,\ a\neq 0,\ m=0,\ (a+b\delta)^2<4b^2;\\&\text{(iii)}\ \ (a-m+b\delta)^2<4(bl-am),\ (b-l)^2+4am<0。\end{aligned} \tag{10.23}$$

但文献[10.8]中犯了与文献[10.9]研究有界二次系统所犯的同样错误，即：当作赤道上的鞍结点的两个鞍状区充满了赤道的一侧，而结点区则充满了赤道的另一侧。事实上，有时结点区可被赤道一分为二，一部分在赤道的这一侧，另一部分则在赤道的另一侧(见图 10.3)。文献[10.1]应用前面已介绍过的分析方法指出了文献[10.8]的错误，并找到当 $\delta=-\frac{l}{2}$ 时(10.22)的一条抛物线解，从而画出正确的相图。结合文献[10.8]与[10.1]的结果，可得下面的定理：

**定理 10.11**　当有一无限远奇点的 $QS_1$ 有方程(10.22)时，不妨设 $l>0$, $a>0$。若(i)与(iii)成立，则它是有界系统，当 $\delta>0$ 时有唯一的极限环(单重)，而当 $\delta\leqslant 0$ 时无环，相图已见图 10.1。若(ii)成立，则(10.22)可化为：

$$\dot{x}=y+x^2,\quad \dot{y}=-x+\delta y+(l+\delta)x^2+xy,\qquad (10.24)$$

其中 $l+\delta>0$, $l^2-4<0$。当 $l>0$ 且 $-\frac{l}{2}<\delta<0$ 时，(10.24)有唯一的极限环(单重)；若 $l>0$ 而 $\delta=\frac{-l}{2}$，则(10.24)有抛物线分界环

$$y=-\frac{x^2}{2}+\delta x+\frac{l}{2};$$

若 $l>0$ 而 $\delta\geqslant 0$ 或 $\delta<-\frac{l}{2}$，或是 $l\leqslant 0$，(10.24)都无极限环。情况(ii)之下的相图见图 10.3(证明从略)。

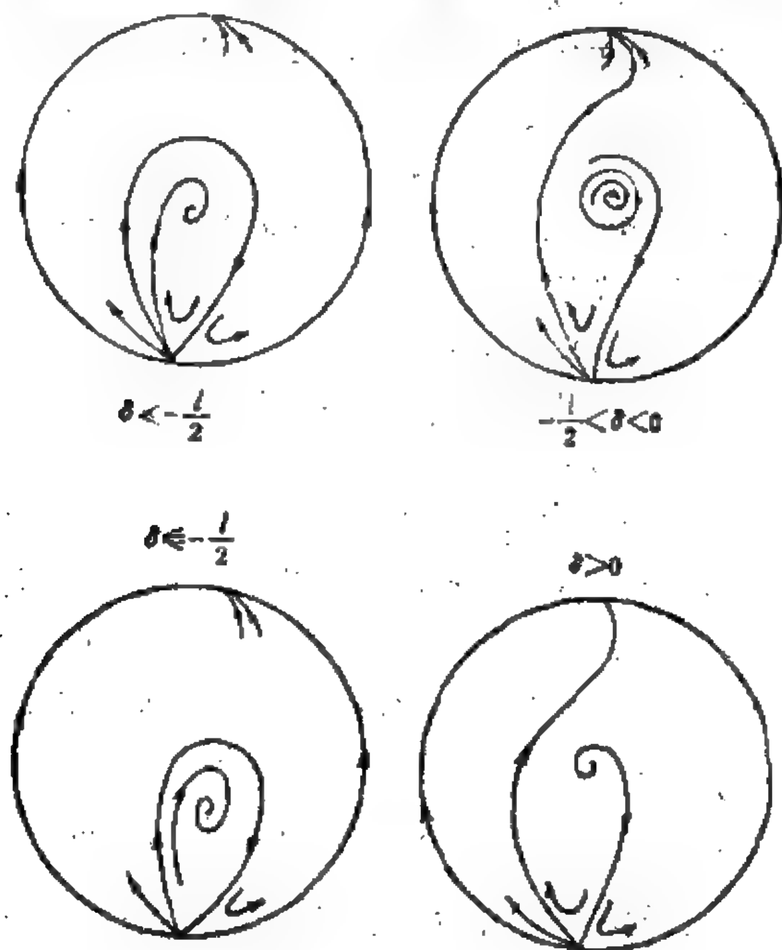



图 10.3

此外,文献[10.1]还纠正了文献[10.29]中关于有唯一有限远奇点的(I)类方程全局相图的一个错误。

二. 向量场

$$\dot{v}=X(v)=Av+f(v)Bv \tag{10.25}$$

的极限环

这里 $v=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$为二元向量, $A$、$B$ 都是实二阶方阵, $f: R^2\to R$ 是光滑实函数。

定义 10.1　若 $f$ 满足条件

$$f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)=r^D f(\cos\theta,\ \sin\theta), \tag{10.26}$$

则称 $f$ 为 $D$ 次齐次函数,特别,若

$$f(\lambda x,\ \lambda y)=\lambda^D f(x,\ y), \tag{10.27}$$

则称 $f$ 为通常意义下的 $D$ 次齐次函数 $(D\geqslant 1)$。当 $f(x,\ y)$ 是 $D$ 次齐次多项式时, (10.25) 是 $D+1$ 次多项式系统。

当 $f$ 为 $v$ 的线性函数时,(10.25)是一个特殊的二次系统,其极限环问题曾在文献[10.10]与[10.11]中被研究过, 所给的条件和处理问题的方法用到矩阵论的知识,很有新意。后来文献[10.12]推广此法进而研究 $f$ 不是线性函数的方程 (10.25), 但限于讨论 $O(0,\ 0)$ 是焦点的情况。文献[10.13]和[10.14] 进一步推广到 $O$ 也可以是结点的情况, 且在方法上又有所改进。这里主要介绍[10.13]中的一部分结果。

设 $C$ 是二阶方阵, $C'$ 是 $C$ 的转置; $(C)_s=\frac{1}{2}(C+C')$ 是 $C$ 的对称部分。以 $J$ 记二阶辛阵$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。

假设 $H_1$　$(JB)_s$ 与 $(B'JA)_s$ 都是定号的,且符号相同[1]。

定义 10.2　称函数 $f$ 是正(负)定的, 如果 $f(v)>0\ (<0)$ 对

1) 当 $(JB)_s$ 与 $(B'JA)_s$ 的定号相反时, 可以改为考虑 $-X$, 对它假设 $H_1$ 成立。

一切的 $v\in R^2\setminus\{(0,0)\}$；称 $f$ 是半正（负）定的，如果 $f(v)\geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ 对一切 $v\in R^2$，且存在 $w\neq 0$ 使 $f(w)=0$。称 $f$ 是不定的，如果 $f$ 既能取到正值，又能取到负值。

以后对定号(或半定号）的 $f$，我们不妨常设它是正定的（或半正定的)，否则，可以改为考虑

$$X(v)=Av-f(v)(-B)v.$$

**假设 $H_2$** $f$ 为正定的，半正定或不定的，且存在

$$v_0\in R^2\setminus\{(0,0)\},$$

使得 $\mathrm{Tr}B\cdot f(v_0)<0$。

这里 $\mathrm{Tr}B$ 表示方阵 $B$ 的迹，即主对角线元素之和。

当 $f$ 只是满足 $f(0,0)=0$ 的光滑函数时，$H_2$ 中的后一条件改为：存在 $v_0\in R^2\setminus\{0,0\}$，使得：

$$\mathrm{Tr}B\lim_{r\to+\infty}f(rv_0)=-\infty. \tag{10.28}$$

特别，若 $f$ 是齐次函数时，(10.28)等价于 $\mathrm{Tr}B\cdot f(v_0)<0$。

下面将先在 $f$ 为光滑，$f(0,0)=0$，且假设 $H_1$、$H_2$ 成立的条件下推导出一些关于有限奇点和无穷远的性质。如通常，我们用 $\langle u,v\rangle$ 来记两向量 $u$、$v\in R^2$ 的内积。

**引理 10.3** 若 $A$ 与 $B$ 皆为可逆方阵，则 $A^{-1}B$ 无实的特征值，当且仅当 $(B'JA)_s$ 是定号的。

**证** $\lambda^{-1}\neq 0$ 是 $A^{-1}B$ 的实特征值，当且仅当存在 $v\neq 0$ 使

$$(A^{-1}B-\lambda^{-1}I)v=0,\quad 这里\ I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

上式即 $Av=\lambda Bv$，亦即 $Av$ 与 $Bv$ 平行。由此知对这个 $v\neq 0$ 有：

$$\langle (B'JA)_s v,v\rangle=\langle B'JAv,v\rangle=\langle JAv,Bv\rangle=0,$$

即 $(B'JA)_s$ 不是定号的。上式中第一个等式可由直接计算证得。

**引理 10.4** 若 $A^{-1}B$ 无实特征值，则 $O(0,0)$ 是(10.25)的唯一奇点。

**证** 若 $v$ 是(10.25)的奇点，则 $(I+f(v)A^{-1}B)v=0$，由此可见 $v=0$ 当且仅当 $f(v)=0$。若 $v\neq 0$ 是(10.25)的一奇点，则

$$\left(A^{-1}B+\frac{1}{f(v)}I\right)v=0,$$

即 $-\frac{1}{f(v)}$ 是 $A^{-1}B$ 的一个实特征值。引理得证。 ∎

**引理 10.5** 在假设 $H_1$ 之下 $O(0, 0)$ 不是 (10.25) 的鞍点或不稳定结点。

**证** 若 $O$ 是 (10.25) 的鞍点或结点，则 $A$ 有一特征向量 $v$。其对应的特征值为非零实数 $a$。因为

$$\begin{aligned}\langle(B'JA)_s v, v\rangle &= \langle B'JAv, v\rangle = -\langle(JB)'Av, v\rangle\\ &= -\langle Av, JBv\rangle = -a\langle JBv, v\rangle = -a\langle(JB)_s v, v\rangle.\end{aligned}$$

由 $H_1$ 知应有 $a<0$，但鞍点和不稳定结点必有一个正实数的特征值，故知 $O$ 不能是鞍点或不稳定结点。

由引理 10.5 知在 $H_1$ 之下，$O$ 只能是 (10.25) 的焦点或稳定结点。

**引理 10.6** (i) 在坐标系的线性变换下，假设 $H_1$ 保持不变；(ii) $(JB)_s$ 为定号；当且仅当 $B$ 的实法式为 $\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$，其中 $d>0$，即 $B$ 有复共轭特征值 $c\pm id$。

**证** (i) 设 $v=Tu$。则 (10.25) 变为：

$$\dot{u}=X_1(u)=T^{-1}ATu+f(Tu)T^{-1}BTu,$$

且

$$\begin{aligned}&\langle(JT^{-1}BT)_s w, w\rangle = \langle JT^{-1}BTw, w\rangle\\ &= \langle JT^{-1}BTT^{-1}z, T^{-1}z\rangle = \langle(T^{-1})'JT^{-1}Bz, z\rangle\\ &= \det(T^{-1})\langle JBz, z\rangle = \det(T^{-1})\langle(JB)_s z, z\rangle,\end{aligned}$$

这里 $z=Tw$。类似地可证明下式：

$$\langle[(T^{-1}BT)'J(T^{-1}AT)]_s w, w\rangle = \det(T^{-1})\langle(B'JA)_s z, z\rangle.$$

(ii) 若 $\langle JBv, v\rangle$ 对一切 $v\neq 0$ 都不等于零，则 $Bv$ 与 $v$ 当 $v\neq 0$ 时不平行[1]，即 $B$ 没有实特征值。 ∎

---

[1] 设 $Bv=\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$，则 $JBv=\begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$，$\langle JBv, v\rangle = \left\langle\begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right\rangle = w_1v_2 - w_2v_1 \neq 0$ 即 $\frac{w_1}{w_2}\neq\frac{v_1}{v_2}$；即 $Bv$ 与 $v$ 不平行，因为 $\langle JBv, v\rangle = v'(JB)_s v$，故此事实可作为 $(JB)_s$ 定号的定义。

由以上诸引理可以看出假设 $H_1$ 和 $H_2$ 的用处。

现在引进极坐标 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 设(10.25)变为：

$$\dot{r}=V(r,\theta),\quad \dot{\theta}=U(r,\theta) \tag{10.29}$$

或 $X=V\dfrac{\partial}{\partial r}+U\dfrac{\partial}{\partial\theta}$。则易见：

$$\begin{aligned}V&=rQ'+rf(r\cos\theta,\ r\sin\theta)Q,\\ U&=R'+f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)R,\end{aligned} \tag{10.30}$$

其中

$$\begin{gathered}Q'=Q'(u)=\langle (A)_s u,\ u\rangle,\quad Q=Q(u)=\langle (B)_s u,\ u\rangle,\\ u=(\cos\theta,\ \sin\theta),\\ R'=R'(u)=-\langle (JA)_s u,\ u\rangle,\\ R=R(u)=-\langle (JB)_s u,\ u\rangle,\end{gathered} \tag{10.31}$$

**引理 10.7** 对(10.31)中的 $u$、$Q$、$Q'$、$R$、$R'$ 有

$$Q'(u)R(u)-R'(u)Q(u)=\langle (B'JA)_s u,\ u\rangle。 \tag{10.32}$$

**证** 设 $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}$, 则易算出

$$\begin{aligned}Q&=b_1\cos^2\theta+(b_2+b_3)\cos\theta\sin\theta+b_4\sin^2\theta,\\ Q'&=a_1\cos^2\theta+(a_2+a_3)\cos\theta\sin\theta+a_4\sin^2\theta,\\ R&=b_3\cos^2\theta+(b_4-b_1)\sin\theta\cos\theta-b_2\sin^2\theta,\\ R'&=a_3\cos^2\theta+(a_4-a_1)\sin\theta\cos\theta-a_2\sin^2\theta。\end{aligned}$$

由此立刻算出：

$$\begin{aligned}Q'R-R'Q=&(a_1b_3-a_3b_1)\cos^4\theta\\ &+(a_2b_3+a_1b_4-a_3b_2-a_4b_1)\cos^3\theta\sin\theta\\ &+(a_2b_4-a_4b_2+a_1b_3-a_3b_1)\sin^2\theta\cos^2\theta\\ &+(a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2-a_4b_1)\cos\theta\sin\theta\\ &+(a_2b_4-a_4b_2)\sin^4\theta=(a_1b_3-a_3b_1)\cos^2\theta\\ &+(a_1b_4+a_2b_3-b_1a_4-b_2a_3)\cos\theta\sin\theta\\ &+(a_2b_4-a_4b_2)\sin^2\theta=\langle (B'JA)_s u,\ u\rangle。\end{aligned}$$

证毕。∎

当 $H_1$ 成立时，由(10.32)看出：若 $u\neq0$, 则 $Q'R-R'Q\neq0$,

即(10.29)除$O$外无其他奇点，与引理10.4的结论一致。

**引理10.8** 设$X(v)$如同(10.25)，又记$L(v)=Bv$，$I(v)=v$。则：

1) $\det(X(v),\ L(v))=\langle(B'JA)_s v,\ v\rangle$； (10.33)

2) $\det(X(v),\ I(v))=r^2(\langle(JA)_s u,\ u\rangle+f(ru)\langle(JB)_s u,\ u\rangle)$，$v=ru$。

**证**

$$\begin{aligned}\det(X(v),\ L(v))&=\det(Av+f(v)Bv,\ Bv)\\&=\det(Av,\ Bv)\\&=\langle JAv,\ Bv\rangle=\langle B'JAv,\ v\rangle\\&=\langle(B'JA)_s v,\ v\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det(X(v),\ I(v))&=\det(Av+f(v)Bv,\ v)\\&=\det(Av,\ v)+\det(f(v)Bv,\ v)\\&=\langle JAv,\ v\rangle+f(v)\langle JBv,\ v\rangle\\&=r^2(\langle(JA)_s u,\ u\rangle+f(ru)\langle(JB)_s u,\ u\rangle)\\&=-r^2U.\end{aligned}$$

根据(10.30)式，即得证。 ∎

由假设$H_1$及引理10.6知可设

$$B=\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix},$$

其中$d>0$。又与向量场$L(v)$对应的极坐标方程是

$$\dot r=cr,\ \dot\theta=d。 \tag{10.34}$$

今设$l$是从$O$出发的半射线(图10.4)，$p$是$l$上的一点，$p\neq O$，$\Gamma$是(10.34)的从$p$出发的轨线，设它和$l$再次交于一点$q$，则$\Gamma$上的$\overset{\frown}{pq}$与$l$上的$\overline{pq}$一起围成一个包含$O$的有界单连通域$G$。

**引理10.9** 设在(10.25)中的

$$B=\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix},$$

$d>0$，又假设$H_1$成立。则对如上所述的每一区域$G$，(10.25)的轨线凡与$\Gamma$相遇者，必从$G$的外部进入其内部。

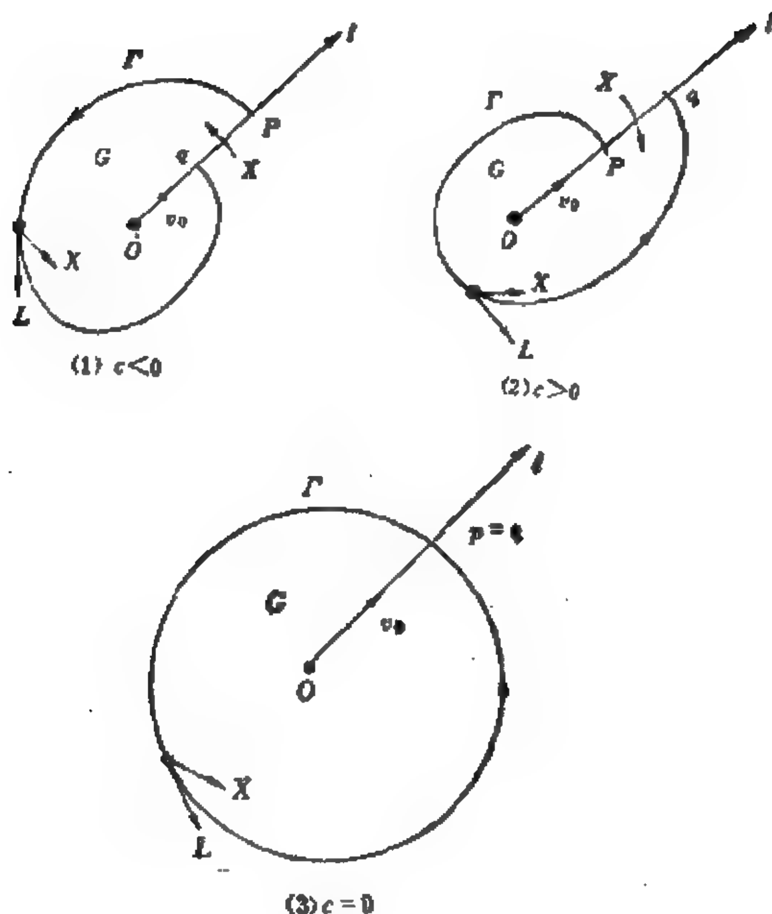



图 10.4

证 因为 $H_1$ 成立，故由 $\langle (JB)_s v, v\rangle = -d\langle v, v\rangle < 0$ 知

$$\det(X, L) = \langle (B'JA)_s v, v\rangle,$$

它应与

$$\langle (JB)_s v, v\rangle = -d\langle v, v\rangle$$

同号。因为 $d>0$，故 $\det(X, L)$ 恒为负，这表示(10.25)的轨线常穿过 $\Gamma$ 而进入 $G$。证毕。 ∎

引理 10.8 与 10.9 指出 $H_1$ 的另一用处是图 10.4 中 $X$ 的轨线都穿过 $\Gamma$ 而进入 $G$。(10.33) 的 2) 则可用以证明，当 $G$ 甚大时，轨线都穿过 $\overline{qp}$ 而进入 $G$，见下面的定理 10.12。

定义 10.3 我们称无穷远是排斥的，如果它有一个邻域，使其中 (10.25) 的每一轨线都是负向趋于无限的。

注意：当 $f$ 是一般的齐次函数时，(10.25) 不一定能拓广到射

影平面或Poincaré半球面上去，因此无法定义无穷远奇点。

**定理 10.12** 设 (10.25) 满足 $H_1$, $H_2$, 又 $f: R^2 \to R$ 是光滑函数，$f(0, 0)=0$, 则无穷远是排斥的。

**证** 由引理10.6知可设

$$B=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix},\ d>0,$$

而 $c=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}B$. 如果我们能证明，对于图10.4中与$O$相距足够远的 $l$ 上的点 $p$, (10.25) 的轨线凡与 $l$ 上的 $\overline{pq}$ 相遇者，必穿过它而进入 $G$, 定理便得到证明了。

先设 $c>0$, 则由(10.28)式知存在 $v_0$, 使当 $r_0$ 足够大而 $r \geq r_0$ 时有 $f(rv_0)<0$, 且 $|f(rv_0)|$ 可以任意大。取 $v_0$ 所确定的半射线为图10.4中的 $l$, 由(10.33)的第二式看出：

$$\begin{aligned}&\det(X(rv_0),\ I(rv_0))\\&=r^2(\langle (JA)_s v_0,\ v_0\rangle - df(rv_0)\langle v_0,\ v_0\rangle)>0.\end{aligned}$$

即在图10.4(2)中从 (10.25) 的轨线正向$X$转到 $l$ 的正向是逆时针的，故$X$穿过 $\overline{pq}$ 而进入 $G$.

反之，若 $c<0$, 则如前可证 $\det(X(rv_0),\ I(rv_0))<0$, 即在图10.4(1)中从(10.25)的轨线正向$X$转到 $l$ 的正向是顺时针的，故$X$仍穿过 $\overline{pq}$ 而进入$G$。

当 $c=0$ 时 $p=q$, 由 $\det(X,\ L)<0$ 已可得出结果。 ▮

**注 10.5** 在假设 $H_1$ 之下，如果对从$O$出发的一半射线 $l_0$ 能证明 $\det(X(v),\ I(v))\mathrm{Tr}B>0$ 对一切 $v\in l_0$, 则图10.4中的域$G$常为正向不变，不论它有多大，从而$O$在这时是全局渐近稳定的。

**注 10.6** 在假设 $H_2$ 的前半部成立时，为使无穷远是排斥的，$H_2$ 的后半部是必要的。

**例 10.1**[1] 对

---

1) 例10.1取自文献[10.12]，用以证明"$f$为不定号"这一条件对于该文的定理2.4来说是必要的。

$$\dot{x}=\frac{1}{2}x-y+(x^2+y^2)(x-y),$$

$$\dot{y}=x+\frac{1}{2}y+(x^2+y^2)(x+y),\qquad(10.35)$$

易证现在$A$与$B$满足$H_1$，又 $f=x^2+y^2$ 为正定的，$\mathrm{Tr}B=2$。故$\mathrm{Tr}B\cdot f>0$。在极坐标下(10.35)成为：

$$\dot{r}=\frac{1}{2}r+r^3,\quad \dot{\theta}=1+r^2\qquad(10.36)$$

故无穷远不是排斥而是吸引的，若改取$f=x^2$，它是半正定的，则代替(10.36)有

$$\dot{r}=\frac{1}{2}r+r^3\cos^2\theta,\quad \dot{\theta}=1+r^2\cos^2\theta.\qquad(10.37)$$

无穷远仍是吸引的。

**定理 10.13**　设(10.25)满足$H_1$、$H_2$，$f$为光滑函数，$f(0,0)=0$。若$O(0,0)$是一不稳定焦点，则$O$是(10.25)的唯一奇点，无穷远是排斥的，(10.25)至少存在一个包围$O$的闭轨线。

**证**　由引理10.3和10.4以及定理10.12和Poincaré-Bendixson环域定理知本定理成立。 ∎

**注 10.7**　由引理10.5知在定理10.13中不能假设$O$是不稳定结点。

**定理 10.14**　设(10.25)满足$H_1$，$f$为光滑函数，$f(0,0)=0$，则当下列(相互排斥的)条件之一成立时，$O$为全局渐近稳定：

1) $\mathrm{Tr}B=0$；

2) $O$为一结点，又对$A$的某一特征向量$v_0$和一切$r>0$有

$$f(rv_0)\mathrm{Tr}B<0.$$

**证**　当 1) 成立时，由(10.34)看出图10.4中的$G$为一圆，但其半径可以任意大。故$O$为全局渐近稳定的。

当 2) 成立时，可设 $B=\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix}$，而$d>0$，因为$v_0$是$A$的特征向量，故有：

$$\langle (JA)_s v_0,\ v_0\rangle=\langle JAv_0,\ v_0\rangle=k\langle Jv_0,\ v_0\rangle=0.$$

从而

$$\det(X(rv_0),\ I(rv_0)) = r^2 f(rv_0)\langle (JB)_s v_0,\ v_0\rangle$$
$$= -dr^2 f(rv_0)\langle v_0,\ v_0\rangle.$$

由 2) 中的假设条件知有

$$\det(X(rv_0),\ I(rv_0))\operatorname{Tr}B > 0.$$

仿引理 10.9 及定理 10.12 的证明可证：对于如图 10.4 的任一包围 $O$ 的区域 $G$，(10.25) 的轨线凡与 $G$ 的边界相交的，都从外部穿向内部，即 $O$ 为全局渐近稳定的。 ∎

注意：若 (10.25) 只满足 $H_1$ 而 $f$ 不一定为齐次的，则一般来说，(10.25) 可以有任何多个数的极限环．这说明定理 10.13 不能保证极限环的唯一性。

例 10.2 设

$$f(x,\ y) = g(\sqrt{x^2+y^2}) - g(0),\ A = g(0)I,$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$g(\sqrt{x^2+y^2})$ 是一光滑的实函数，$g(0) < 0$。则 (10.25) 满足 $H_1$，因为 $(JB)_s = -I$，$(B'JA)_s = g(0)I$。但在极坐标之下 (10.25) 成为

$$rg(r)\frac{\partial}{\partial r} + (g(r) - g(0))\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

若 $g(r_0) = 0$，则 $U|_{r=r_0} = -g(0)$。易见 $O$ 是一结点，极限环的个数与 $g$ 的孤立正零点的个数一样多。

若在上例中取 $A = g(0)J$，且 $g(0) > 0$，则 $O$ 是一线性中心。

为了得到极限环的唯一性定理，今后我们假设 $f$ 是次数为 $D$ 的齐次函数，并以 $K$ 记 (10.30) 式中

$$U = R' + r^D fR = 0$$

的轨迹。且 $f = f(\theta)$。

引理 10.10 设 (10.30) 中的 $f$ 是 $D$ 次齐次函数，且 $H_1$ 满足，$K$ 是 $r^D = \dfrac{-R'}{fR}$ 的轨迹，则对 $K$ 上每一点 $p$，(10.29) 所确定的向量沿着从 $O$ 到 $p$ 的半射线，且方向指向 $O$。

**证**　设 $u=(\cos\theta, \sin\theta)$, 若 $ru\in K$, 则有

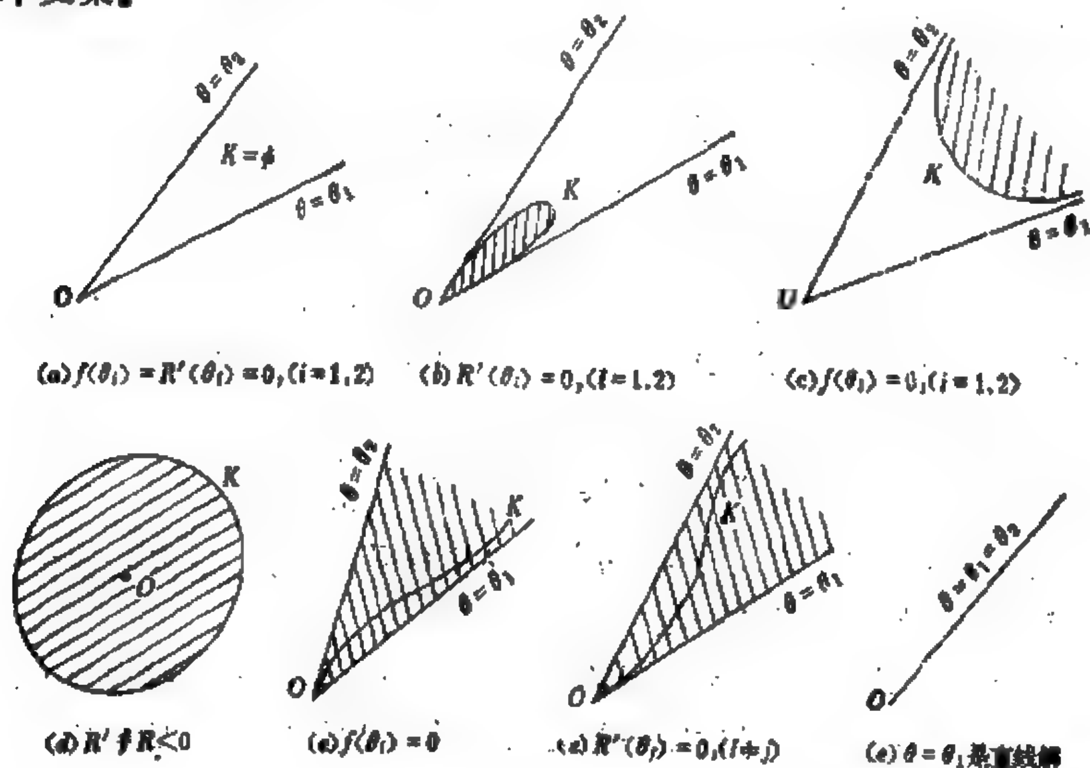
$$\dot{V}=r\frac{1}{R(u)}[R(u)Q'(u)-R'(u)Q(u)]。$$

由引理 10.7 及 $H_1$ 知

$$\dot{V}=-\frac{\langle(BJA)_s u, u\rangle r}{\langle(JB)_s u, u\rangle}<0,$$

即 $\dot{r}<0$。证毕。 ▮

**引理 10.11**　在引理 10.10 的条件之下，$K$ 或是图 10.5 的 $(a)$、$(b)$、$(c)$、$(e)$ 中诸扇形域内的曲线的和集，或是一个包围 $O$ 的单闭曲线(图 10.5$(d)$)，并且图 10.5 中的阴影区域为正向或负向不变集。




(a) $f(\theta_i)=R'(\theta_i)=0, (i=1,2)$　(b) $R'(\theta_i)=0, (i=1,2)$　(c) $f(\theta_i)=0, (i=1,2)$

(d) $R'fR<0$　(e) $f(\theta_i)=0$　(e) $R'(\theta_j)=0, (i\neq j)$　(e) $\theta=\theta_1$是直线解

图 10.5

**证**　由假设 $H_1$ 及引理 10.6 的(ii)知道 $R$ 为定号，再由引理 10.10 即知引理 10.11 的结论成立。 ▮

**注 10.8**　当 $R'fR<0$ 时，$K$ 是一单闭曲线，此时由引理 10.6 的(ii)知道 $O$ 应是焦点。

由引理 10.11 立刻可导出以下引理。

**引理 10.12**　在引理 10.10 的条件下，若$K$有图 10.5 的 (a) 中所画的一支曲线，则(10.29)没有闭轨。若$\Gamma$是 (10.29) 的闭轨，则$\Gamma\cap K=\varnothing$。

**引理 10.13**　设$f$为次数$D$的齐次函数，则(10.29)等价于：

$$\dot{\rho}=D(\rho Q'+\rho^2 fQ),\ \dot{\theta}=R'+\rho fR. \tag{10.38}$$

**证**　令$\rho=r^D$，可由(10.29)导出(10.38)，此处$f=f(\cos\theta, \sin\theta)$。 ▮

**引理 10.14**　设$h(x)$如同定理 10.3 前面那样定义，则

$$h'(x)=\frac{h(x)}{x}\exp\int_0^{2\pi}\rho(\theta,\ x)\ \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\ \frac{d\rho}{d\theta}\right)d\theta. \tag{10.39}$$

**证**　由定理 10.3 的(10.11)式知有

$$h'(x)=\exp\int_0^{2\pi}\frac{\partial S}{\partial\rho}[\rho(\theta,\ x),\ \theta]d\theta. \tag{10.40}$$

其中$\rho(\theta,\ x)$是$\frac{d\rho}{d\theta}=S(\rho,\ \theta)$的解．注意，$\frac{d\rho}{d\theta}=\rho\frac{d}{d\theta}\ln\rho$，可知

$$\frac{\partial S}{\partial\rho}=\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{d}{d\theta}\ln\rho\right]=\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{d}{d\theta}\ln\rho\right)+\frac{d}{d\theta}\ln\rho,$$

代入(10.40)式，即得：

$$\begin{aligned}h'(x)&=\exp\left(\ln\frac{\rho(2\pi,\ x)}{\rho(0,\ x)}\right)\exp\int_0^{2\pi}\rho(\theta,\ x)\ \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{d}{d\theta}\ln\rho\right)d\theta\\&=\frac{h(x)}{x}\exp\int_0^{2\pi}\rho(\theta,\ x)\ \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\ \frac{d\rho}{d\theta}\right)d\theta.\end{aligned}$$

**定理 10.15**　设系统(10.29) 满足$H_1$，又$f$为正定或半正定的$D$次齐次函数，则有下列结论：

1) 若$K$不是包围$O$的单闭曲线，则(10.29)至多存在一个极限环$\Gamma$，它是单重环．又当$\sigma(\Gamma)R>0\ (<0)$时，$\Gamma$是不稳定（稳定）的，这里$\sigma(\Gamma)=+1\ (-1)$，当$\Gamma$为正(负)定向。

2) 若$K$是包围$O$的单闭曲线(从而$O$是焦点)，设$R^2\setminus K$的有界分支为$G_1$；无界分支为$G_2$。则(10.29)至多在$G_1$与$G_2$中各有一个极限环：$\Gamma_1\subset G_1$，$\Gamma_2\subset G_2$。又当$\sigma(\Gamma_1)R>0$ $(\sigma(\Gamma_1)R<0)$时$\Gamma_1$为不稳定(稳定)环，而$\Gamma_2$为稳定(不稳定)环。

**证** 1) 由引理 10.3 与 10.4 知道 $O$ 是(10.29)的唯一奇点。由引理 10.12, 可以改为考虑方程(10.38)。由引理 10.11 知 $\theta$ 沿 $R^2\backslash K$ 的一个可能包含极限环的分支中不变号。故由引理 10.14 知有:

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \exp\left[\sigma(\Gamma)\int_0^{2\pi}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta}\right)d\theta\right] \\ &= \exp\left[\sigma(\Gamma)\int_0^{2\pi}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{D(Q'+\rho fQ)}{R'+\rho fR}\right)d\theta\right] \\ &= \exp\left[D\int_0^{2\pi}\frac{\sigma(\Gamma)\rho f(R'Q-Q'R)}{(R'+\rho fR)^2}d\theta\right]. \end{aligned} \quad (10.41)$$

这里 $x_0$ 是 $\Gamma$ 与正 $x$ 轴的交点。由引理 10.7 及 $H_1$ 知

$$(R'Q-Q'R)(u) = -\langle (B'JA)_s u, u\rangle$$

是定号的, 且与 $R(u) = -\langle (JB)_s u, u\rangle$ 同号。此外, $f\geqslant 0$。故由 (10.41) 式看出 $h'(x_0)>1$ (或 $<1$), 当 $\sigma(\Gamma)R>0$ (或 $<0$), 且 (10.38) 的每一极限环都是单重不稳定(或稳定)。因此, 极限环若存在必为唯一的。

2) 证明与 1) 类似, 但须注意若 $\Gamma_1$ 与 $\Gamma_2$ 同时存在, 则应有不同的定向, 因为 $U$ 在 $K$ 的两边异号。 ∎

**定理 10.16**[1] 设方程 (10.25) 满足假设 $H_1$、$H_2$, $f$ 为正定或半正定齐次函数。设 $A$ 的特征值为 $a\pm bi$, $b\neq 0$, 则 $O(0, 0)$ 是 (10.25) 的唯一奇点, 无穷远是排斥的, 且下列结论成立:

1) 若 $O$ 是不稳定焦点 $(a>0)$, 则 (10.25) 恰有一个极限环, 它是稳定单重环;

2) 若 $O$ 为稳定焦点 $(a<0)$, 则 (10.25) 的奇点 $O$ 是全局渐近稳定的;

3) 若 $O$ 为一线性中心 $(a=0)$, 则 (10.25) 无极限环。

**证** 由引理 10.3 和 10.4 知 $O$ 是唯一的奇点。由定理 10.12 知无穷远是排斥的。由引理 10.6 知可设

$$A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix},\ b>0,$$

1) 这是文献[10.13]中的第一个主要定理。

从而 $R'(u)=b$。

1) 由定理 10.13 知(10.29)至少有一个极限环 $\Gamma$。若 $K$ 是空集，由于 $b>0$ 而 $U=b+r^D fR$，故必 $R>0$(若 $R$ 能 $<0$，则 $U=0$ 的轨迹不空)。因此，$\sigma(r)R>0$。由定理 10.15 的 1) 知 $\Gamma$ 是(10.29)的唯一极限环，它是不稳定的，但这和无穷远为排斥相矛盾。因此 $K\neq\emptyset$。今若 $f$ 为半正定，从而 $K$ 不是单闭曲线，由定理 10.15 的 1) 知 $\Gamma$ 是(10.29)的唯一极限环。若 $f$ 为正定的，则定理 10.15 的2) 的条件满足。由于 $O$ 与无穷远都是排斥的，故(10.25)有唯一的极限环 $\Gamma$，它位于 $G_1$ 中，且是稳定的。

2) 若 $K$ 是空集，仿1)，注意到 $O$ 为吸引而无穷远为排斥，知极限环不能存在。

若 $K\neq\emptyset$ 而 $f$ 为半正定的，可如前一样否定极限环的存在。若 $K\neq\emptyset$ 而 $f$ 为正定的。由于 $b>0$ 而 $U=b+r^D fR$，故 $R<0$，从而 $\sigma(\Gamma)R<0$。又由定理 10.15 的 2)，可能存在的位于 $G_1$ 中的极限环应是稳定的，从而必不存在。另一可能性是极限环位于 $G_2$ 中，且应是不稳定的，但这与无穷远为排斥是矛盾的。归纳起来，可知 $O$ 是全局渐近稳定的。

3) 此时极限环也不能存在.事实上，若有极限环存在，由定理 10.15 知道，它们都应是单重环，从而当 $a<0$ 而 $|a|\ll 1$ 时，这些极限环仍保持存在，这和 2) 中的结论相矛盾。 ∎

仿此可证以下定理：

**定理 10.17**　设方程(10.25)满足 $H_1$、$H_2$，$f$ 为正定或半正定齐次函数。若 $O$ 是一个结点(即 $A$ 有实特征值)，则(10.25)的奇点 $O$ 是全局渐近稳定的。

**证**　由引理 10.5 知 $O$ 应是稳定结点，而由定理 10.12 知无穷远是排斥的。若(10.25)存在一个极限环 $\Gamma$，由定理 10.15 的 1) 知 $\Gamma$ 是唯一极限环，且是单重环，但这与无穷远及 $O$ 的性质相矛盾。 ∎

在文献[10.13]中还研究了 $f$ 为不定齐次函数，且 $O$ 为焦点和单向结点的情况。借助于对 $h(x)$ 及其对 $x$ 与 $a$ ($a$ 是 $A$ 的特征值的

实部)的一、二阶偏导数的细致分析,又证明了另外两个定理,即下面的定理10.18与定理10.19。

**定理10.18**　设方程(10.25)满足$H_1$、$H_2$, $f$为不定齐次函数, $A$的特征值为$a\pm bi$, $b\neq 0$, 则$O(0,0)$是唯一的奇点,无穷远是排斥的,且有:

1) 若原点是不稳定焦点($a>0$),则(10.25)恰有一个极限环,它是单重稳定环。

2) 若原点是稳定焦点($a<0$),则(10.25)或是有两个单重环,外为稳定,内为不稳定;或是有一个半稳定环;或是无环。

3) 若原点是稳定焦点或线性中心($a\leqslant 0$),且$f$是通常意义下的$D$次齐次函数,$D$为奇数,则(10.25)没有极限环。

4) 若原点为一线性中心($a=0$),则(10.25)或无环,或有一单重稳定环。

**定理10.19**　设(10.25)满足$H_1$,又$f_1$为通常意义下的不定号齐次函数。若$O$是一单向结点,则$O$是唯一的奇点,它是吸引的,无穷远是排斥的。关于极限环的结论与定理10.18的2)相同。

后来在文献[10.14]中作者们又解决了$O$为双向结点的情况。得到如下结果:

**定理10.19′**　若(10.25)满足$H_1$, $f$是不定号的齐次函数,又$O$是一结点,则$O$是唯一的奇点,它是吸引的,无穷远是排斥的。关于极限环的结论与定理10.19相同。

此定理的证明用到一个比定理10.1更深入的结果:

**定理10.20**　若(10.25)满足$H_1$,且$f$是一个不定号的齐次函数,则(10.25)最多只有两个极限环。

**证**　在(10.25)中作代换

$$x=r^{\frac{1}{D}}\cos\theta,\quad y=r^{\frac{1}{D}}\sin\theta,$$

则(10.25)变为:

$$\dot{r}=rDQ'+r^2\bar{f}DQ,\ \dot{\theta}=R'+r\bar{f}R,\qquad (10.42)$$

其中$Q$、$Q'$、$R$、$R'$如(10.31),而$u=(\cos\theta,\ \sin\theta)$。再令

$$\rho = \frac{r}{R' + r\bar{f}R}.$$

则(42)成为:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = A(\theta)\rho^3 + B(\theta)\rho^2 + C(\theta)\rho. \qquad (10.43)$$

其中

$$A(\theta) = \frac{D}{R'}(Q'R - R'Q)R\bar{f}^2,$$

$$B(\theta) = D\bar{f}Q + \frac{1}{R'}\bar{f}R(R'_\theta - 2DQ') - (\bar{f}R)_\theta,$$

$$C(\theta) = \frac{1}{R'}(DQ' - R'_\theta).$$

今设(10.25)有三个极限环，则(10.42)有三个周期解 $\rho_1(\theta)$、$\rho_2(\theta)$、$\rho_3(\theta)$，此外，(10.43)还有明显解 $\rho_4(\theta) \equiv 0$。不难算出:

$$\frac{\dot{\rho}_1 - \dot{\rho}_2}{\rho_1 - \rho_2} - \frac{\dot{\rho}_1 - \dot{\rho}_3}{\rho_1 - \rho_3} - \frac{\dot{\rho}_4 - \dot{\rho}_2}{\rho_4 - \rho_2} + \frac{\dot{\rho}_4 - \dot{\rho}_3}{\rho_4 - \rho_3}$$
$$= A(\theta)(\rho_1 - \rho_4)(\rho_2 - \rho_3).$$

两边积分，得到:

$$\ln[(\rho_1 - \rho_2)(\rho_4 - \rho_3)/(\rho_1 - \rho_3)(\rho_4 - \rho_2)]\Big|_0^{2\pi}$$
$$= \int_0^{2\pi} A(\theta)(\rho_1 - \rho_4)(\rho_2 - \rho_3)d\theta. \qquad (10.44)$$

注意

$$\rho_i - \rho_j = \frac{R'(r_i - r_j)}{(R' + r_i\bar{f}R)(R' + r_j\bar{f}R)}, \quad r_4 = 0.$$

可知(10.44)式左边为

$$\ln\left[\frac{r_3(r_1 - r_2)}{r_2(r_1 - r_3)}\right]\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

另一方面，(10.44)右边的被积函数等于:

$$H(\theta) = \frac{[D\bar{f}^2(Q'R - R'Q)Rr_1(r_2 - r_3)]}{(R' + r_1\bar{f}R)(R' + r_2\bar{f}R)(R' + r_3\bar{f}R)},$$

由 $H_1$，引理 10.7 及引理 10.12 知 $H(\theta)$ 是一不变号的连续函数，故(10.44)右边不等于零。这一矛盾证明了(10.25)最多只能有两个极限环[1)]。

1) 研究方程(10.25)的还有文献[10.69]。

### 三、其他

由(10.25)可以看出，当$f(x, y)$是普通意义下的$D$次齐次多项式时，它是一个非常特殊的$D+1$次系统，即其中只有线性项和$D+1$次项，且两个$D+1$次齐次式有一线性公因式。推广这种系统，J.Llibre等在文献[10.15]中研究了较为一般的$n$次多项式系统：

$$\dot{x}=ax-y+P_n(x, y),\ \dot{y}=x+ay+Q_n(x, y)。\tag{10.45}$$

其中$O(0, 0)$是焦点，$P_n$与$Q_n$是齐$n\geqslant 2$次多项式，并假设在(10.45)被化成(10.43)的形式以后$A(\theta)$不变号，得到至多存在一个(当$n$为偶数)或两个(当$n$为奇数)极限环的结论。这时极限环如存在，必包含所有的有限远奇点在其内部。

后来，M. Carbonell和J. Llibre又在文献[10.16]中考虑了(10.45)以及

$$\dot{x}=ax+P_n(x, y),\ \dot{y}=\beta y+Q_n(x, y)。\tag{10.46}$$

其中$\alpha\beta>0$或$\alpha=\beta\neq 0$。当(10.45)与(10.46)被化为极坐标方程时有：

$$\dot{r}=a(\theta)r+f(\theta)r^n,\quad \dot{\theta}=b(\theta)+g(\theta)r^{n-1}。\tag{10.47}$$

其中

$$f(\theta)=\cos\theta P_n(\cos\theta, \sin\theta)+\sin\theta Q_n(\cos\theta, \sin\theta),$$

$$g(\theta)=\cos\theta Q_n(\cos\theta, \sin\theta)-\sin\theta P_n(\cos\theta, \sin\theta)。$$

而

$$a(\theta)=\alpha,\ b(\theta)=1\quad(\text{对于}(10.45))$$

$$a(\theta)=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta,\quad b(\theta)=(\beta-\alpha)\cos\theta\sin\theta$$

$$(\text{对于 }(10.46),\ \alpha\beta>0,\ \alpha\neq\beta)$$

$$a(\theta)=\alpha+\cos\theta\sin\theta,\quad b(\theta)=-\sin^2\theta$$

$$(\text{对于 }(10.46),\ \alpha=\beta\neq 0)。\tag{10.48}$$

再像(10.7)中那样定义：

$$F(\theta)=a(\theta)g(\theta)-b(\theta)f(\theta),\ A(\theta)=g(\theta)F(\theta)。\tag{10.49}$$

**定理 10.21**　对于方程(10.45)与(10.46)设 $A(\theta)$ 不变号，则有下列结论：

1) 方程的任一闭轨必包围 $O(0, 0)$。

2) 若 $O$ 是非退化焦点或线性中心，则当 $n$ 为偶数时方程最多有一个极限环，当 $n$ 为奇数时最多有两个极限环。又若 $g(\theta)$ 不取零值，则方程至多有一个极限环，且 $n$ 必为奇数。

3) 若 $O$ 是非退化结点，则当 $n$ 为偶数时无环，当 $n$ 为奇数时最多有两个环。

这定理改进了文献[10.15]中的相应结果，并且简化了证明[1]。

**定理 10.22**　设在(10.45)或(10.46)中 $F(\theta)$ 不变号，则 $n$ 必为奇数，这时方程的任一闭轨必包围 $O$，且若 $O$ 是非退化焦点或线性中心，则最多只有一个极限环。

**定理 10.23**　设(10.45)或(10.46)在赤道上有无数多个奇点，则：

1) 若 $O$ 是一非退化焦点或线性中心，则当 $n$ 为偶数时，方程不存在极限环，当 $n$ 为奇数时，至多存在一个极限环。反之，若方程有一极限环，则 $O$ 是唯一的有限奇点，且赤道上充满了奇点。

**定理 10.24**　设(10.45)或(10.46)有唯一的有限远奇点和唯一的无穷远奇点。1) 若 $n$ 为偶数，则当 $O$ 为非退化焦点或线性中心时，方程最多有一个极限环；当 $O$ 为非退化结点时不存在闭轨。2) 若 $n$ 为奇数，$g(\theta)<0$ 对某一 $\theta$，且 $O$ 是一非退化焦点或线性中心，则方程最多只有一个极限环。

证明这些定理仍用 I) 与 II) 两段中已见到的那些方法，但有所改进。例如，对方程(10.45)如果 $g(\theta)$ 不取零值，则 $\rho=\dfrac{1}{g}$ 是

$$\frac{d\rho}{d\theta}=A_1(\theta)\rho^3+B(\theta)\rho^2+C(\theta)\rho \tag{10.50}$$

的解(此解对应于(10.47)的 $r=\infty$)。(10.50)是由(10.47)经代换

1) 此定理和它后面的三个定理是文献[10.16]中的四个主要定理。

$$\rho = \frac{r^{n-1}}{b(\theta) + r^{n-1} g(\theta)} \tag{10.51}$$

而得到的。在(10.50)中:

$$A_1(\theta) = \frac{n-1}{b} A(\theta);$$

$$B(\theta) = \frac{n-1}{b} (bf - 2ag) + \frac{1}{b} (b'g - bg'); \tag{10.52}$$

$$C(\theta) = \frac{n-1}{b} (a - b').$$

对于方程(10.45),由(10.48)可知 $b \equiv 1$, $b' = 0$。利用这一事实就可把(10.50)改写成为

$$\frac{d}{d\theta} (\rho^{-1} - g) = (n-1)(\rho^{-1} - g)(F\rho - \alpha),$$

或

$$\frac{d}{d\theta} \ln(\rho^{-1} - g) = (n-1)(F\rho - \alpha).$$

对(10.50)的一闭轨 $\rho(\theta)$,将上式从 0 到 $2\pi$ 积分,得到:

$$0 = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{d}{d\theta} \ln(\rho^{-1}(\theta) - g(\theta)) \right] d\theta$$
$$= (n-1) \left[ \int_0^{2\pi} F(\theta)\rho(\theta) d\theta - 2\pi\alpha \right].$$

故

$$\int_0^{2\pi} F(\theta)\rho(\theta) d\theta = 2\pi\alpha.$$

利用此等式,在 $F(\theta)$ 不变号的条件下,若设存在两条闭轨,就可导出矛盾。

此外,当 $F(\theta)$ 不变号时,同样能证明图 10.5 中的任一阴影区域都是正向或负向不变集,这就是定理 10.22 证明的主要技巧。

关于文献[10.15]与[10.16]中诸定理的证明细节,此处从略。类似的工作还有研究当 $A$、$B$、$C$ 之一不变号时(10.50)的闭轨的文章[10.26]。

关于其他多项式系统的极限环问题,较好的工作还有文献[10.17],其中给出方程

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=\sum_{1\le i+j\le 2m+1} b_{ij}x^iy^j \quad (m\geqslant 1) \tag{10.53}$$

存在极限环的一些充分条件。

在文献[10.20]中研究了所谓 Bogdanov-Takens 系统:

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=e_1x+e_2y+x^3-x^2y \tag{10.54}$$

和

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=e_1x+e_2y+e_3x^2y+x^3-x^4y. \tag{10.55}$$

关于(10.54)作者们证明了:对一切 $e_1$、$e_2$, 方程至多存在一个单重极限环。若存在,必为稳定。关于(10.55)证明:对一切 $e_1$、$e_2$, 方程至多存在两个单重极限环。所用的方法属于§9中的那种初等方法,避免了使用椭圆积分,Picard-Fuchs 方程和 Riccati 方程(见文献[10.21]、[10.22]、[10.23]、[10.24])。[10.49]在此基础之上进一步给出了(10.55)的分支图,[10.50]分析了它的全局拓扑结构。

文献[10.30]研究了方程

$$\begin{aligned}\dot{x}&=e_1x+Bxy+d_1x^3+d_2xy^2,\\ \dot{y}&=e_2+\eta x^2-y^2+d_3x^2y+d_4y^3\end{aligned} \tag{10.56}$$

和

$$\begin{aligned}\dot{x}&=x(e_1+p_1x+p_2y+q_1x^2+q_2xy+q_3y^2),\\ \dot{y}&=y(e_2+p_3x+p_4y+q_4x^2+q_5xy+q_6y^2)\end{aligned} \tag{10.57}$$

的极限环的存在与唯一性(但设 $e_1$、$e_2$ 为小参数),较许多前人的结果为好(见文献[10.31]、[10.32]、[10.33]、[10.34])。最近又有[10.42]、[10.43]及[10.44]用初等方法研究了以上两个方程,所得结果比[10.30]更好。

在文献[10.7]中曾提到文献[10.47]得到如下结果:

**定理** 设 $N=2n+1$ 或 $2n+2$, 则对任一 $m$, $0\leqslant m\leqslant n$, 必有 $N$ 次多项式 $F(x)$ 使方程:

$$\dot{x}=y-F(x),\quad \dot{y}=-x \tag{10.58}$$

恰有 $m$ 个闭轨。

在[10.47]中还猜想:对于(10.58), $n$ 是极限环的最多个数。

这猜想只在 $n=1$ 时得到证明。但在文献[10·48]中证明了:

对于 $O(0, 0)$ 外围的小振幅极限环（即由 $O$ 改变稳定性而产生的极限环）这个猜想是对的，见本书 §15。

在文献[10.37]中对于极坐标方程：

$$\dot{r}=R(r, \theta), \quad \dot{\theta}=S(r, \theta) \tag{10.59}$$

得到如下的定理：

**定理 10.25** 设存在不含 $O(0, 0)$ 的环域 $D$，使 $R$、$S$ 在 $D$ 中为二次连续可微；对每一固定的 $\theta$，$S(r, \theta)$ 对 $r$ 至多在 $D$ 中有一零点。

1) 若存在 $D$ 中一个可微函数 $h(r)>0$，使 $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{hR}{S}\right)$ 在 $D$ 中不变号且不恒等于零，则 (10.59) 在 $D$ 中最多有一个极限环 $\Gamma$，它包围 $O$ 且为负定向。

2) 若 $\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\dfrac{R}{rS}\right)$ 不变号且在 $D$ 中不恒等于零，则 (10.59) 在 $D$ 中至多有两个极限环，它们包围 $O$ 且皆为负定向。

此定理以定理 10.1 作为特例，且可用来研究方程

$$\begin{aligned}\dot{x}&=P_m(x, y)+P_n(x, y),\\ \dot{y}&=Q_m(x, y)+Q_n(x, y) \quad (n>m)\end{aligned} \tag{10.60}$$

的极限环的唯一性与唯二性$\left(取\ h(r)=\dfrac{1}{r}\right)$。

在文献[10.39]中对系统

$$\dot{x}=\xi, \quad \dot{\xi}=-\varphi_0(x)-\varphi_1(x)\xi-\varphi_2(x)\xi^2 \tag{10.61}$$

用化为 Lienard 方程再使用张芷芬的唯一性定理的方法证明了以下定理：

**定理 10.26** 设(10.61)中 $\varphi_i$ 为一次连续可微，

$$x\varphi_0(x)>0 \quad (x\neq 0), \quad \varphi_1(0)<0 \quad (>0),$$

又

$$\psi(x)=\begin{vmatrix} 1 & \varphi_2(x) & 0 \\ \varphi_1(x) & \varphi_1'(x) & \varphi_0'(x) \\ 0 & \varphi_1(x) & \varphi_0(x) \end{vmatrix}>0 \quad (<0), \tag{10.62}$$

则它至多存在一个极限环，若存在，必为稳定（不稳定）。

用此定理可以给(I)类方程当

$$l+n>0,\ \delta<0,\ l\geqslant 0,\ n\geqslant 0$$

时极限环的唯一性一个较简单的证明。

在文献[10.39]中对

$$\dot{x}=f_0(x)-f_1(x)y,\qquad \dot{y}=g_0(x)+g_1(x)y+g_2(x)y^2$$

也得到类似的结果，但相应的(10.62)式中的 $\varphi_0$、$\varphi_1$、$\varphi_2$ 有较繁的依赖于 $f_i$ 与 $g_i$ 的表达式。

在文献[10.40]与[10.41]中研究了具有双曲线解的(2, 3)型多项式系统：

$$\begin{cases}\dot{x}=a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{30}x^3\\ \qquad +a_{21}x^2y+a_{12}xy^2+a_{03}y^3,\\ \dot{y}=b_{10}x+b_{01}y+b_{20}x^2+b_{11}xy+b_{02}y^2,\end{cases}$$

他们的研究说明了 $a_{03}y^3$ 这一项的存在与否对于极限环和分界线环的存在性有很大的影响。

在文献[10.44]中证明了有四条实积分直线的三次系统极限环的唯一性，推广了二次系统方面相应的结果。

文献[10.46]中研究了广义 Lienard 方程的全局吸引性和极限环的存在性。作为特例，证明了五次系统

$$\dot{x}=y-2x^3(1+\delta x+x^3),\quad \dot{y}=-x^3$$

的唯一奇点 $O(0,0)$ 有一个以它为顶点的椭圆域，当 $\delta\leqslant-\dfrac{3}{2^{2/3}}$ 时，有稳定极限环 $L_\delta$ 包围此椭圆域；又有 $-\dfrac{3}{2^{2/3}}<\delta_0<0$，使 $L_{\delta_0}$ 成为椭圆域的边界，而当 $\delta=\delta_0$ 时，$O$ 为全局弱吸引，椭圆域仍保持。

文献[10.64]中研究了方程

$$\dot{x}=-y+\delta x+axy+bxy^2+cxy^{2n},\ n\geqslant 2,\ \dot{y}=x$$

的极限环的不存在性、唯一性与唯二性。

文献[10.51]、[10.52]、[10.53]对含参数且有过细鞍点的同宿环，或有过一个鞍点的∞字形奇异环，或有过两鞍点的异宿环的一般平面自治系统：

$$\dot{x}=f(x,y)+\alpha f_0(x,y,\alpha,\delta),$$
$$\dot{y}=g(x,y)+\alpha g_0(x,y,\alpha,\delta). \tag{10.63}$$

得到了在小扰动下由奇异环分支出唯一极限环的条件。可惜的是，即使(10.63)是二次系统，要计算条件中出现的几个分支量仍有困难。

近十年来，极限环的存在与唯一性在化学反应、生态学、医学等方面的应用在国内也出现了许多好的工作。例如文献[10.19]研究了 Fitzhugh 神经传导方程：

$$\dot{x}=\alpha+x+y-\frac{1}{3}x^3,\quad \dot{y}=\rho(a-x-by) \tag{10.64}$$

的极限环问题，所得结果比过去一些有关此方程的工作更好。

文献[10.25]、[10.67]详细研究了 Plant-herbivore 系统：

$$\dot{x}=x(1-x)[\alpha(1-y)+x],\ \dot{y}=\beta y(Kx-y) \tag{10.65}$$

的极限环的不存在性和存在性。

文献[10.35]研究了由具功能性反应的食饵-捕食者两种群模型导出的多项式系统：

$$\dot{x}=x(A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3)-x^2y,\quad \dot{y}=-y+x^2y \tag{10.66}$$

在正平衡点外围存在唯一极限环的条件。研究类似于(10.66)的还有文献[10.63]。

文献[10.63]研究了一个生化反应系统，得到了

$$\dot{x}=x^2y-x+b,\quad \dot{y}=-x^2y+a\quad(a>0,\ b>0) \tag{10.67}$$

的极限环存在唯一的充要条件为 $a-b>(a+b)^3$。

文献[10.38]研究了生化反应中的数学模型：

$$\dot{x}=x(1+y)(c-b-y^2),$$
$$\dot{y}=x(1+y)(b+y^2)-ay\quad(a>0,\ b\geqslant 0) \tag{10.68}$$

证得：如果

$$\frac{1}{1+\sqrt{c-b}}\geqslant\frac{2(c-b)}{c}\quad 或\quad b=0,$$

则在第一象限中不存在闭轨，如果

$$b>0, \quad 且 \quad \frac{1}{1+\sqrt{c-b}}<\frac{2(c-b)}{c},$$

则存在唯一稳定极限环。

文献[10.54]和[10.55]、[10.65]研究了

$$\dot{x}=a-bx-xy^2, \quad \dot{y}=bx+xy^2-y \quad (a>0,\ b\geqslant 0) \tag{10.69}$$

的极限环问题。

文献[10.56]研究了具有常数收获率的 Volterra 模型:

$$\begin{aligned} \dot{x}&=x(a_{10}-a_{11}x-a_{12}y)-h, \\ \dot{y}&=y(-a_{20}+a_{21}x-a_{22}y), \end{aligned} \tag{10.70}$$

存在唯一极限环的条件和有异宿分界环的条件。

文献[10.57]、[10.58]研究了微生物传染病动力学中的数学模型:

$$\begin{aligned} \dot{x}&=(a-b)x+(\alpha+\nu)y+(a-b)x^2+(\alpha+\nu-\lambda)xy, \\ \dot{y}&=-(\alpha+b+\nu)y+[\lambda-(\alpha+b+\nu)]xy \\ &(a>b>0,\ \alpha>0,\ \nu>0,\ \lambda>0) \end{aligned} \tag{10.71}$$

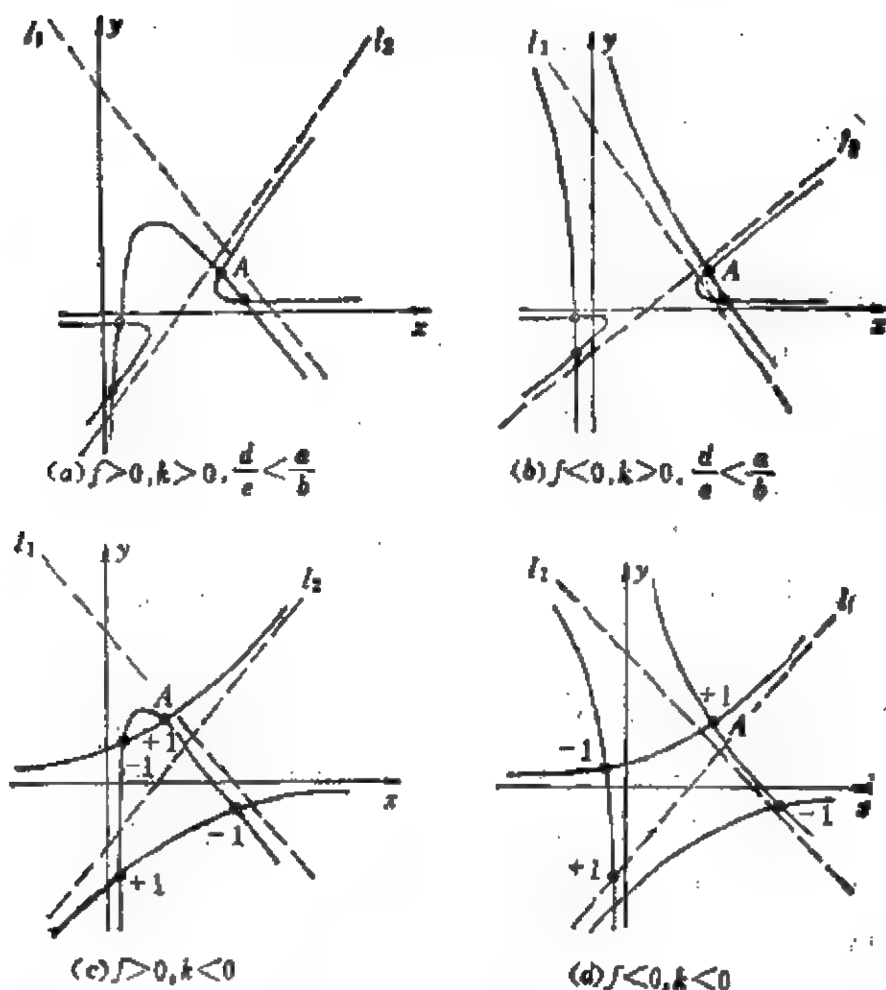
在第 I 象限中的相图、极限环和分界线环。

其他还有许多工作,不一一列举了.请参看[10.59]、[10.60]、[10.62]、[10.65]、[10.68]、[10.70]、[10.71]、[10.72]以及全国常微分定性理论会议论文集(南京大学数学半年刊 1993 年增刊)。尽管这类工作很多,有的结果也不错,但从多项式系统定性理论的观点来看,研究工作还有待进一步深入。例如,对于被开发的(即具有常数收获率或放养率的)Lotka-Volterra 捕-食系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}&=x[a-bx-cy]-f, \\ \dot{y}&=y[-d+ex-gy]-k \end{aligned} \tag{10.72}$$

(其中 $a$、$b$、$c$、$d$、$e$、$g$ 为非负常数),它比熟知的 Volterra 方程只多了两个常数 $f$ 与 $k$,关于这方面的研究工作除了文献[10.56]和[10.59]外,还有文献[10.61]。

对 $f$、$k$ 的四种不同的正负值,(10.72)的等倾线图为图 10.6(a)、(b)、(c)、(d)。其中 $l_{11}$ $bx+cy=a$ 与 $y$ 轴是 $P(x,y)=0$ 的渐近线,$l_{21}$ $ex-gy=d$ 与 $x$ 轴是 $Q(x,y)=0$ 的渐近线。



(a) $f>0, k>0, \frac{d}{e}<\frac{a}{b}$　　(b) $f<0, k>0, \frac{d}{e}<\frac{a}{b}$

(c) $f>0, k<0$　　(d) $f<0, k<0$

图 10.6

注意：每一图中在第Ⅰ象限内都有一个指标为 $+1$ 的奇点 $A$，它的外围极限环的个数或全局稳定性是主要的研究对象。

设 $A=A(x_0, y_0)$，移原点到 $A$，则(10.72)成为：

$$\begin{cases}\dot{u}=(a-2bx_0-cy_0)u-cx_0v-bu^2-cuv,\\ \dot{v}=ey_0u+(ex_0-2gy_0-d)v+euv-gv^2.\end{cases}\tag{10.73}$$

计算当 $A$ 为细焦点时的焦点量，我们只看一个特殊情况，假设(10.73)可经转轴变换化为标准型：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y+lx^2+mxy+ny^2,\\ \dot{y}&=x+px^2+qxy+ry^2.\end{aligned}\tag{10.74}$$

由于焦点量 $W_1$、$W_2$、$W_3$ 当 $A$ 为细焦点时只依赖于方程的二次项的系数，且它们的符号不随转轴而变，故可就(10.73)来计算 $W_1$。

按照文献[10.7]中§12的计算公式可得：

$$W_1 = b(c+2g) + g(e-2b) = bc + eg. \tag{10.75}$$

当 $W_1=0$ 时(这时 $b$、$c$、$e$、$g$ 中至少有某两个应等于零，因为已设它们都是非负的)，可算出：

$$W_2 = bg[g(g-c) - b(b+e)][(e-2b)(-3b-e) + (c+2g)(3g-c)], \tag{10.76}$$

1) $b=e=0$, 或 $b=g=0$ 或 $c=g=0$, 则 $W_2=0$;

2) $c=e=0$, 则

$$W_2 = 6bg(g^4 - b^4). \tag{10.77}$$

又由(10.73)的形式容易算出文献[10.7]中§12的(12.18)式中的 $\sigma=0$, 从而

$$W_3 = 0. \tag{10.78}$$

但当 $c=e=0$ 时(10.72)成为

$$\dot{x} = x[a-bx] - f, \ \dot{y} = y[-d-gy] - k. \tag{10.79}$$

这时显然不存在焦点和极限环。

由以上的分析可看出：当(10.72)有在第Ⅰ象限中的焦点 $A$ 时必有 $W_1>0$, 从而 $A$ 外最多只能有一个小振幅极限环。因此我们猜想：

$$\dot{x} = -y + \delta x + lx^2 + mxy, \ \dot{y} = x + bxy + cy^2 \tag{10.80}$$

当 $l<0$, $m<0$, $b>0$, $c<0$ 时，在 $O(0, 0)$ 外围有唯一的极限环；而当 $l$、$m$、$b$、$c$ 的符号任意时，$O(0, 0)$ 外最多有两个极限环。方程(10.80)在§9及本节中未曾见到过($b=l$, $c=m$ 的特殊情况是例外，见§9中(9.54)式)。

# 参 考 文 献

[10.1] Coll B, Gasull A and Llibre J. Some theorems on the existence, uniqueness and non-existence of limit cycles for quadratic systems, J. Diff. Eqs. 67(1987), 372～399.

[10.2] Cherkas L A. Bifurcation of limit cycles of a quadratic system with variation of the parameter rotating the field, Diff. Uravn.

17, no.11 (1981), 2002~2016.

[10.3] Pliss V A. Nonlocal problems in the theory of oscillations, Acad. Press., New York, 1966.

[10.4] Lins A. On the number of solutions of the equation $\frac{dx}{dt}=\sum_{j=0}^{n}a_j(x)x^j$, $0\leq t\leq 1$, for which $x(0)=x(1)$, Inv. Math.59 (1980), 67~76.

[10.5] Lloyd N G. A note on the number of limit cycles in certain two-dimensional systems, J. Lond. Math. Soc. 20 (1979), 277~286.

[10.6] Li Chengzhi. Two problems of planar quadratic systems, Sci. Sinica (Ser. A), 26(1983), 471~481.

[10.7] Ye Yanqian and others. Theory of limit cycles, Trans. Math. Monographs, v.66 (1986), Amer. Math, Soc.

[10.8] Coppel W A. A simple class of quadratic systems, J. Diff. Eqs. 64(1986), no.3, 275~281.

[10.9] Yang Xin-an. Number of limit cycles of the bounded quadratic systems with two finite singular points, Chin.Ann.Math.4(Ser.B), 1983, 217~225.

[10.10] Koditschek D E and Narendra K S. The stability of second order quadratic differential equations, IEEE, Trans. Automet. Control, AC 27(1982), 783~798.

[10.11] Koditschek D E and Narendra K S. Limit cycles of planar quadratic differential equations, J. Diff. Eqs. 54(1984), 181~195.

[10.12] Chicone C. Limit cycles of a class of polynomial vector fields in the plane, J. Diff. Eqs. 63(1986), no.1, 68~87.

[10.13] Gasull A, Llibre J and Sotomajor J. Limit cycles of vector fields of the form $X(v)=A(v)+f(v)Bv$, J. Diff. Eqs., 67(1987), 90~110.

[10.14] Gasull A, Llibre J and Sotomayor J. Further considerations on the number of limit cycles of vector fields of the form $X(v)=Av+f(v)Bv$, J. Diff. Eqs. 68(1987), 36~40.

[10.15] Carbonell M and Llibre J. Limit cycles of a class of polynomial systems, Proc. Roy. Soc. Eding. 109 A(1988), 187~199.

[10.16] Carbonell M and Llibre J. Limit cycles of polynomial systems with homogeneous non-linearities, J. Math. Anal, Appl, 142(1989), 573~590.

[10.17] Huang Kecheng. On the sufficient conditions for the existence of limit cycles of the system $\dot{x}=y$, $\dot{y}=\sum_{1\leq i+j\leq 2m+1}b_{ij}x^iy^j$, Acta Math. Sinica, New Series, v.1(1985), no.3, 256~260.

[10.18] Жительзейф Е Д. О периодических решениях уравнений

некоторых автономных систем. ПММ. 36(1972), 1114～1117.

[10.19] Cai Suilin and Zhang Pingguang. Qualitative analysis on Fitzhugh's nerve conduction equation, Chin. Ann. of Math. 7B(2), 1986, 221～231.

[10.20] Li Chengzhi, Rousseau C and Wang Xian. A simple proof for the unicity of the limit cycle in the Bogdanov-Takens system, Canadian Math. Bull. v.33(1), 1990, 84～92.

[10.21] Petrov G S. Elliptic integrals and their non-oscillation, Funct. Anal. Appl. 20(1986), 37～40.

[10.22] Dumortier F, Roussarier R and Sotomayor J. Generic 3-parameter families of vector fields on the plane, unfolding a singularity with nilpotent linear part. The cusp case of codimension 3, Ergodic Theory & Dynamical Systems, 7(1987), 375～413.

[10.23] Li Chengzhi, Rousseau C. A system with three limit cycles appearing in a Hopf bifurcation and dying in a homoclinic bifurcation, J. of Diff. Eqs. v.79(1), 1989.

[10.24] Mardesic P. The number of limit cycles of polynomial deformations of a Hamiltonian vector field(preprint, 1988).

[10.25] Yang Xin-an. A survey of cubicsystems, Ann. of Diff Eqs. v.7, no.3(1991), 323～363.

[10.26] Gasull A and Llibre J. Limit cycles for a class of Abel equations SIAM J. of Math. Anal. 1994.21, no.5, 1235～1244.

[10.27] Coppel W A. Quadratic system with a degenerate critical point, Bull. Austr. Math. Soc. v.38(1988), 1～10.

[10.28] Wang Xian. The global bifurcation of a class of cubic systems and the quadratic differential system $(B)_{a_{02}=0}$, Ann. of Diff. Eqs. 2(3), 1986, 3[illegible]～326.

[10.29] Perko L M and Shu S L. Existence, uniqueness and nonexistence of limit cycles for a class of quadratic systems in the plane, J. Diff. Eqs. 53(1984), 146～171.

[10.30] Chow S N, Li C Z and Wang D. Uniqueness of periodic orbits of some vector fields with codimension two singularities, J. Diff. Eqs.77(1989), no.2, 231～253.

[10.31] Carr J, Chow S N and Hale J K. Abelian integrals and bifurcation theory, J. Diff. Eqs., 59(1985), 413～436.

[10.32] Cushman R and Sanders J. A codimension two bifurcation with a third order Picard-Fuchs equation, J. Diff. Eqs., 59(1985), 243～256.

[10.33] Van Gils S A. A note on "Abelian integrals and bifurcation

theory", J. Diff Eqs., 59(1985), 437~441.

[10.34] Zoladek H. Bifurcations of certain family of planar vector fields tangent to axes, J. Diff Eqs., 67(1987), 1~55.

[10.35] Chen J P and Zhang H D. The qualitative analysis of two species Predator-Prey Model with Holling's type Ⅲ functional response, 74~86., Appl. Math. Mec. 7(1), 1986, 73~80.

[10.36] Han Maoan. On limit cycles of a biochemical reaction system, J. Nanjing Univ., Math. Biquarterly, 1986, no.1, 50~53.

[10.37] Han Maoan. On sufficient conditions for certain two-dimensional systems to have at most two limit cycles (Preprint).

[10.38] 陈均平,周进。一类平面四次系统的极限环。数学学报,1993, 36(5)。

[10.39] 杜星福。一类多项式系统极限环的唯一性定理(预印本)。

[10.40] Zhang Jianfeng Limit cycles and global structure for a class of cubic systems with an invariant centred conic, Ann. of Diff. Eqs. 5(2), 1989, 211~234.

[10.41] 沈伯骞。具有双曲线解的系统 $E_3^2$ (预印本)。

[10.42] Zhang Pingguang and Zhao Shenqi. Existence and uniqueness of limit cycles for a class of normal form equations with codimension two singularities (Preprint, 1992).

[10.43] Zhao Shenqi and Zhang Pingguang. Existence and uniqueness of limit cycles for a class of normal form equations with codimension two singularities (Preprint, 1992).

[10.44] Zegeling A and Kooij R E. Uniqueness of limit cycles in polynomial systems with algebraic invariants. (Preprint, 1992).

[10.45] Han Mao-an. Properties in the large of quadratic systems in the plane, Chin. Ann. Math, 10B(3), 1989.

[10.46] 王向荣,冯滨鲁,韩茂安。非线性系统 $\dot{x}=h(y)-F(x)$, $\dot{y}=-g(x)$ 的全局吸引性与极限环的存在性(预印本,1992)。

[10.47] Lins A W. de Melo and Pugh C C. On Lienard equation, Lect. Notes in Math. 597, 1977, 335~357.

[10.48] Blows T R and Lloyd N G. The number of small-amplitude limit cycles of Lienard equations, Proc. Camb. Phil. Soc. 95(1984), 359~366.

[10.49] Li Chengzhi and Rousseau C. Codimension 2 symmetric homoclinic bifurcations and application to 1:2 resonance, Can. J. Math., 1990, 42(2), 191~212.

[10.50] 穆献中,梁肇军。一类具有三阶尖点的多项式系统的全局分析。华中师大学报, v.26(1992), no.4, 404~407.

[10.51] 罗定军,韩茂安,朱德明。奇闭轨分支出极限环的唯一性(I).数学学报,

v.35, no.3, 1992, 409~417.

[10.52] 韩茂安，罗定军，朱德明．奇闭轨分支出极限环的唯一性(Ⅰ)．数学学报，v.35(1992)，no.4.

[10.53] 韩茂安，罗定军，朱德明．奇闭轨分支出极限环的唯一性(Ⅱ)，数学学报，v.35(1992)，no.5, 673~684.

[10.54] 陈兰荪，王东达．一个生物化学反应的振动现象．数学物理学报，v.5, 1985, no.3, 261~266.

[10.55] 梁肇军．多项式微分系统全局分析导引．华中师大出版社，1989.

[10.56] 梁肇军，陈兰荪．食饵种群具有常数收获率的二维 Volterra 模型的定性分析．生物数学学报，v.1(1986)，no.1, 22~28.

[10.57] 张洪伟．一个微生物数学模型的极限环、奇异环和全局结构．成都科技大学学报，(1988)，no.1.

[10.58] 梁肇军．一个微生物数学模型的分支函数．数学物理学报，v.6, 1986, no.4.

[10.59] 陈兰荪．生态数学模型及研究方法．科学出版社，1988.

[10.60] 戴国仁．具有常数收获率与放养率的 Kolmogorov 型捕食系统．生物数学进展，全国生物动力系统研讨会综合报告文集，(1992)，20~41.

[10.61] 符天武．一类二次微分系统的极限环存在性和唯一性．西安交大生物数学讨论班资料．

[10.62] Holmes C A. Existence and uniqueness of periodic orbits in he cubic autocatalator, Dyn. & Stab.Systems, v.7(1992), no.3, 153~171.

[10.63] Wang Cheng-wen. A class of ecological system with prey having constant adding rate, J. Shangdong Inst. Min. & Tech. v. 10 (1991), 91~100.

[10.64] Zhang Weide. On limit cycles for a class of (2n+1)-degree differential system, Ann. of Diff. Eqs. 9(1), 1993, 116~122.

[10.65] 程中瑗，冷忠建．一类生化反应模型的系统分析．应用数学学报，v.15 (1992)，389~396.

[10.66] 刘德明，富钰．三分子模型定性分析．数学物理学报，v.11(1991).

[10.67] 李家成．一个植物-食植物者系统模型的定性分析．西北大学学报，25 (1991)，no.1, 17~20.

[10.68] 李万同．一类 $n$ 次 Kolmogorov 系统的极限环．应用数学学报，v.5 (1992)，no.2, 13~17.

[10.69] 何永慈．向量场 $X(v)=A(v)+f(v)v$ 的极限环，四川大学学报，14, (1991)，no.4, 7~12.

[10.70] 张奇洲．Lienard 方程的无穷远奇点和极限环．数学研究与评论，(1990)，v.10, no.1, 137~143.

[10.71] Kooij R E, Zegeling A.Qualitative properties of two-dimensional predator-prey systems, Rep. 93~75, Delft Univ. Tech. (1993), Preprint.

# §11. 包含多个奇点的极限环

关于三次系统的极限环在文献[11.1]的§5中已介绍过几个例子，近十年来，除了用摄动方法由可积三次系统摄动出各种不同的极限环分布以外(将在§15中介绍)，对于不是小参数的三次系统的全局结构和分支问题，研究得比较多而且工作比较深入的乃是属于

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=Q_3(x,y) \tag{11.1}$$

的一个特殊类型的方程：

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=q_3(x)-f(x)y. \tag{11.2}$$

其中 $q_3(x)$ 是 $x$ 的不含常数项的三次多项式，$f(x)$ 是 $x$ 的二次多项式. 把(11.2)化到 Liénard 平面上，可得方程：

$$\dot{x}=y-F(x),\quad \dot{y}=q_3(x). \tag{11.3}$$

其中

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx \tag{11.4}$$

是 $x$ 的不含常数项的三次多项式. (11.2) 等价于二阶非线性方程：

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}-q_3(x)=0. \tag{11.5}$$

它在应用科学上是比较常见的. 例如. 与流体力学中的振动现象以及薄板颤振有关的方程：

$$\ddot{x}+(\alpha+\gamma x^2)\dot{x}+\beta x+\delta x^3=0\quad(\beta<0,\ \delta>0) \tag{11.6}$$

就属于这种类型.

对于方程(11.6)当$|\alpha|$、$|\gamma|$很小时，在文献[11.2]的第七章§3已有详细分析. 其中指出：相应于(11.6)的动力系统

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-\beta x-\delta x^3-(\alpha+\gamma x^2)y \tag{11.7}$$

有可能存在包含三个奇点在其内部的极限环，且可能不只是一个。

在国内对方程(11.2)或次数比3更高的类似的多项式系统的极限环、全局结构和分支问题研究得较多且深入的有王现、黄克成、李继彬、索光俭、韩茂安等。在文献[11.3]中王现提出了 $n$ 次 Lienard 软弹簧系统：

$$\dot{x} = y - h_1 x - \cdots - h_n x^n,$$
$$\dot{y} = -x(k - cx^2) \quad (k,\ c > 0) \tag{11.8}$$

对 $n = 2m$ 或 $n = 2m+1\ (m \geqslant 1)$ 分析了无穷远奇点 $(0,\ 1,\ 0)$ 邻域中轨线的性态，并用以研究 $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ 等情况下极限环的存在性和轨线的全局拓扑结构。

接着，在文献[11.4]中详细研究了

$$\dot{x} = y - a_1 x - a_2 x^2, \quad \dot{y} = x - x^3 \quad (a_2 \neq 0) \tag{11.9}$$

的极限环、全局结构和分支问题。下面介绍文献[11.4]的工作。因为(11.9)虽然是(11.3)的特例，但其研究方法和出现的分支现象都是有代表性的。

不妨设(11.9)中的 $a_2 > 0$，否则，可将 $y$、$t$ 变号以达到此目的。又可设 $a_1 \geqslant 0$，否则，可将 $x$、$t$ 变号，这时 $a_2$ 保持不变。(11.9)有三个奇点：

$$O(0,\ 0),\ A(-1,\ a_2 - a_1),\ B(1,\ a_2 + a_1).$$

容易看出：$O$ 是鞍点，$B$ 总是稳定非鞍点，又当 $0 \leqslant a_1 < 2a_2$ 时，$A$ 是不稳定非鞍点，而当 $a_1 > 2a_2$ 时，$A$ 是稳定的，当 $a_1 = 2a_2$ 时移原点到 $A(-1,\ -a_2)$，则(11.9)变为：

$$\dot{\xi} = \eta - a_2 \xi^2, \quad \dot{\eta} = -2\xi + 3\xi^2 - \xi^3. \tag{11.10}$$

取 Lyapunov 函数

$$V(\xi,\ \eta) = \xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 - \xi^3 - a_2 \xi^2 \eta - \frac{1}{3} a_2 \eta^3 + \frac{1 - 2a_2^2}{4}\xi^4 + \frac{a_2}{5}\xi^3 \eta - \frac{2a_2}{5}\xi \eta^3,$$

那末沿着(11.10)的轨线有：

$\frac{dV}{dt}=-\frac{2a_2}{5}(\xi^4+\eta^4)+h.o.t.<0$ 当$|\xi|$与$|\eta|$足够小。故知此时$A$是稳定细焦点。

(11.9)是否存在单独包含$A$或$B$的闭轨线，这是我们要解决的第一个问题。注意：对(11.9)来说，其发散量为$-a_1-2a_2x$。由此立刻看出，单独包含$B$的闭轨线(它若存在，必须位于$x>0$半平面中)不可能存在。至于单独包含$A$的闭轨线，则有如下引理：

引理 11.1 当$a_1\geqslant 2a_2$或$a_1\leqslant\sqrt{2}a_2$时，(11.9)没有单独包含$A$的闭轨线。若$\sqrt{2}a_2<a_1<2a_2$，则(11.9)至多只能有一个单独包含$A$的极限环。如果存在，它是稳定的。

证 移原点到$A(-1,\ a_2-a_1)$，则(11.9)成为：

$$\dot{\xi}=\eta-[(a_1-2a_2)\xi+a_2\xi^2],\ \dot{\eta}=-(2\xi-3\xi^2+\xi^3).\tag{11.11}$$

根据熟知的判别极限环不存在的准则，只须证明方程组：

$$\begin{aligned}a_2u^2+(a_1-2a_2)u&=a_2v^2+(a_1-2a_2)v,\\ \frac{1}{4}u^4-u^3+u^2&=\frac{1}{4}v^4-v^3+v^2\end{aligned}\tag{11.12}$$

在$-\infty<u<0$、$0<v<1$中无解即可。(11.12)等价于：

$$u+v=\frac{2a_2-a_1}{a_2},$$

$$\frac{1}{4}\frac{2a_2-a_1}{a_2}(u^2+v^2)-\left(\frac{2a_2-a_1}{a_2}u+v^2\right)+\frac{2a_2-a_1}{a_2}=0.\tag{11.13}$$

改写(11.13)的第二方程为：

$$\frac{2a_2-a_1}{a_2}\left(\frac{u}{2}-1\right)^2-\frac{a_1+2a_2}{4a_2}v^2=0.\tag{11.14}$$

立刻看出：当$a_1\geqslant 2a_2$时(11.12)无解。又当$a_1=0$时，(11.13)的第一个方程无解。下面考虑$0<a_1<2a_2$的情况。由(11.14)可解出：

$$u=2-v\sqrt{\frac{a_1+2a_2}{2a_2-a_1}},$$

代入(11.13)的第一个方程，得到：

$$v\left(1-\sqrt{\frac{a_1+2a_2}{2a_2-a_1}}\right)=-\frac{a_1}{a_2}. \tag{11.15}$$

它当 $0<a_1<\sqrt{2}a_2$ 时无解，因为等式左边的 $v$ 满足 $0<v<1$，而当 $0<a_1\leqslant\sqrt{2}a_2$ 时易证

$$0>1-\sqrt{\frac{a_1+2a_2}{2a_2-a_1}}>-\frac{a_1}{a_2},$$

故(11.15)不可能成立。这就证明了引理 11.1 的前半部。

其次，由旋转向量场理论知道，当 $a_1<2a_2$ 且 $2a_2-a_1\ll 1$ 时，$A$ 外围有稳定极限环，为了证明环的唯一性，可以用张芷芬的定理。即证明：对

$$f(\xi)=(a_1-2a_2)+2a_2\xi,\quad g(\xi)=2\xi-3\xi^2+\xi^3$$

当 $\xi<1$，$\xi\neq 0$ 时有

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{f(\xi)}{g(\xi)}\right)=\frac{f'g-fg'}{g^2}>0. \tag{11.16}$$

记 $$\varphi(\xi)=f'\cdot g-f\cdot g'=-4a_2\xi^3-3(a_1-4a_2)\xi^2+6(a_1-2a_2)\xi+2(2a_2-a_1),$$

则 $$\varphi'(\xi)=-6[2a_2\xi^2+(a_1-4a_2)\xi+(2a_2-a_1)],$$

$\varphi'(\xi)=0$ 的零点为 $\xi_1=\dfrac{2a_2-a_1}{2a_2}<1$ 和 $\xi_2=1$。又

$$\varphi''(\xi_1)=6a_1>0,$$

故 $\varphi(\xi)$ 在 $\xi_1$ 取到最小值

$$\varphi(\xi_1)=\frac{2a_2-a_1}{4a_2^2}(2a_1a_2+a_1^2)>0,$$

从而(11.16)成立。引理 11.1 得证。 ∎

为了研究分支问题，下面改为对与(11.9)等价的方程：

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=x-x^3-(a_1+2a_2x)y \tag{11.17}$$

进行讨论。在半平面 $x\leqslant 0$ 中以 $S_1$ 与 $U_1$ 分别表示进入和跑出鞍点 $O_1$ 的分界线。(11.17)除 $O_1$ 外还有两个指标 $+1$ 的奇点 $A_1(-1, 0)$ 和 $B_1(1, 0)$。

**引理 11.2** 对任一给定的 $a_2>0$，存在唯一的 $a_1^*=a_1^*(a_2)$，

$\sqrt{2}a_2<a_1^*<2a_2$，使当 $a_1=a_1^*$ 时，(11.17)在左半平面中有过 $O_1$ 而包围 $A_1$ 的内侧稳定分界线环；当 $a_1<a_1^*$ 时，(11.17)没有闭轨线和奇闭轨线，而当 $a_1^*<a_1<2a_2$ 时，(11.17)存在唯一的包含 $A_1$ 的稳定极限环。

证 当 $a_1=2a_2$ 时，$A_1$ 是(11.17)的稳定细焦点，且由引理11.1知，此时(11.17)没有单独包含 $A_1$ 的闭轨线或奇闭轨线，易见此时 $S_1$ 与 $U_1$ 都必与负 $x$ 轴相交，所以 $S_1$ 与负 $x$ 轴的交点应在 $U_1$ 与负 $x$ 轴的交点的左方，当 $a_1=\sqrt{2}a_2$ 时，$A_1$ 为不稳定。外围也没有闭轨线和奇闭轨线，故 $S_1$ 与负 $x$ 轴的交点应在 $U_1$ 与负 $x$ 轴的交点的右方。由于当 $a_1$ 减少时 (11.17) 构成旋转向量场族，所以 $S_1$ 与 $U_1$ 都绕 $O_1$ 逆时针旋转。故必存在 $a_1^*=a_1^*(a_2)$，$\sqrt{2}a_2<a_1^*<2a_2$，使当 $a_1=a_1^*$ 时，$S_1$ 与 $U_1$ 相接而构成包含 $A_1$ 的分界线环，又因 $\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\Big|_{O_1}=-a_1^*<0$。故此分界环为内侧稳定。根据引理11.1知道此分界线环正是由 $A_1$ 改变稳定性时产生的稳定极限环随 $a_1$ 的减少而扩大时所达到的极限位置。引理证毕。 ∎

其次，考虑(11.17)是否存在同时包含 $A_1$ 与 $B_1$ 的奇闭轨线以及同时包含 $A_1$、$O_1$、$B_1$ 的闭轨线的问题。首先考虑：

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=x-x^3-2a_2xy. \qquad (11.17)_{a_1=0}$$

易知约去 $dt$ 以后的方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x(1-x^2-2a_2y)}{y} \qquad (11.18)$$

是可积的。

1) 当 $0<a_2<\sqrt{2}$ 时，(11.18)有通积分：

$$\ln[\{2y+a_2(x^2-1)\}^2+(2-a_2^2)(x^2-1)^2]-\frac{2a_2}{\sqrt{2-a_2^2}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2y+a_2(x^2-1)}{(x^2-1)\sqrt{2-a_2^2}}=C_1. \qquad (11.19)$$

2) 当 $a_2=\sqrt{2}$ 时，(11.18)有通积分：

$$\ln[\{\sqrt{2}y+(x^2-1)\}^2+\frac{2(x^2-1)}{\sqrt{2}y+(x^2-1)}=C_2 \qquad (11.20)$$

和特解：

$$l:\ y=-\frac{1}{\sqrt{2}}(x^2-1)。\tag{11.21}$$

3) 当 $a_2>\sqrt{2}$ 时，(11.18)有通积分：

$$\ln|[2y+a_2(x^2-1)]^2-(a_2^2-2)(x^2-1)^2|$$
$$-\frac{a^2}{\sqrt{a_2^2-2}}\ln\left|\frac{2y+(a_2-\sqrt{a_2^2-2})(x^2-1)}{2y+[a_2+\sqrt{a_2^2-2})(x^2-1)}\right|=C_3\tag{11.22}$$

以及特解：

$$l_1:\ y=-\frac{1}{2}(a_2-\sqrt{a_2^2-2})(x^2-1)；$$
$$l_2:\ y=-\frac{1}{2}(a_2+\sqrt{a_2^2-2})(x^2-1)。\tag{11.23}$$

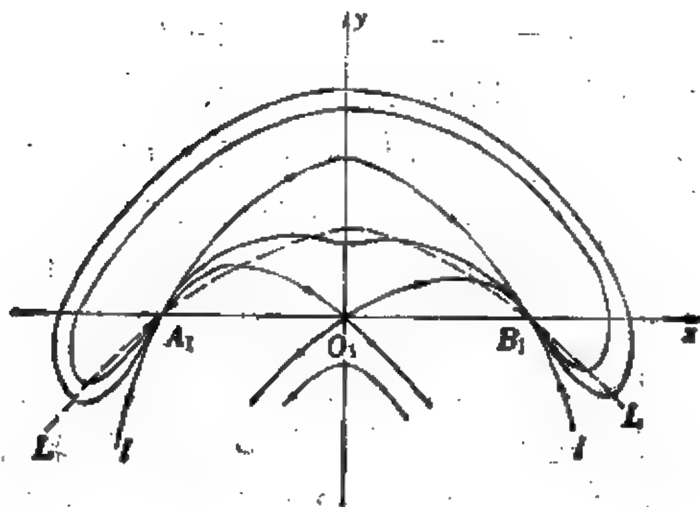



图 11.1

注意：(11.18) 所确定的方向场对称于 $y$ 轴，有水平等倾线 $x=0$ 与 $L:y=\frac{1}{2a_2}(x^2-1)$，又当 $a_2=\sqrt{2}$ 时，$A_1(-1,\ 0)$是不稳定退化结点，过 $A_1$ 有特解 $l$。故可画出 $a_2=\sqrt{2}$ 时的相图，如图 11.1。当 $a_2>\sqrt{2}$ 时，$A_1(-1,\ 0)$成为不稳定正常结点，轨线的拓扑结构与图 11.1 类似，但不同之处是：代替 $l$，现在有 $l_1$、$l_2$ 以及夹在它们之间的无数多条通过 $A_1$ 与 $B_1$ 两点的轨线。由此可知，

在这两种情况下，$(11.17)_{a_1=0}$ 既无包含 $A_1$、$B_1$ 的奇闭轨线，亦无同时包含 $A_1$、$O_1$、$B_1$ 的闭轨线。

当 $0<a_2<\sqrt{2}$ 时，$A_1$ 成为不稳定焦点。下面证：从直线 $x=-1$ 上任一点 $P_0(-1,\ y_0<0)$ 出发的正半轨线必与负 $x$ 轴在 $x<-1$ 部分相交于一点。事实上，由(11.19)可得出这样的轨线方程为：

$$\ln\frac{[2y+a_2(x^2-1)]^2+(2-a_2^2)(x^2-1)^2}{4y_0^2}$$
$$=\frac{2a_0}{\sqrt{2-a_2^2}}\left[\frac{\pi}{2}+\mathrm{tg}^{-1}\frac{2y+a_2(x^2-1)}{(x^2-1)\sqrt{2-a_2^2}}\right].$$

令 $y=0$，得到：

$$\ln\frac{(x^2-1)^2}{2y_0^2}=\frac{2a_2}{\sqrt{2-a_2^2}}\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{tg}^{-1}\frac{a_2}{\sqrt{2-a_2^2}}\right)=K.$$

由此可求出唯一的

$$x=-\sqrt{1+\sqrt{2y_0^2e^k}}<-1.$$

现在注意：由 $O_1$ 出发向左下方的分界线 $U_1$ 必与 $x=-1$ 交于一点 $P(-1,\ y_{-1}<0)$。于是 $U_1$ 在 $P$ 之后将交负 $x$ 轴于一点 $E$。由引理 11.1 知没有单独包含 $A_1$ 的闭轨线或奇闭轨线。又因 $A_1$ 为不稳定焦点，故自左上方进入 $O_1$ 的分界线 $S_1$ 应交负 $x$ 轴于 $E$ 与 $A_1$ 之间的点，而 $U_1$ 在 $E$ 之后又应回头交正 $y$ 轴于一点 $F$。考虑到对称性，可知 $U_1$ 最后将与正 $x$ 轴交于 $E$ 的对称点 $G$，然后回头进入 $O_1$ 而形成包含 $A_1$ 与 $B_1$ 且过 $O_1$ 的奇闭轨解 $\Gamma$。在 $\Gamma$ 外部则存在一系闭轨线，它们同时包含 $A_1$、$O_1$、$B_1$ 在其内部，在 $\Gamma$ 内部不再有闭轨线，如图 11.2 所示。

总结以上分析得如下引理：

**引理 11.3** 系统 $(11.17)_{a_1=0}$ 或(11.18) 当 $a_2\geqslant\sqrt{2}$ 时不存在同时包含 $A_1$ 与 $B_1$ 的奇闭轨线，也不存在同时包含 $A_1$、$O_1$、$B_1$ 的闭轨线。当 $0<a_2<\sqrt{2}$ 时，(11.18)存在同时包含 $A_1$ 与 $B_1$ 而过 $O_1$ 的奇闭轨线 $\Gamma$，其外部则有一系同时包含 $A_1$、$O_1$、$B_1$ 在其内部的闭轨线。

注意：(11.17)关于 $a_1$ 构成旋转向量场族，可得如下引理：

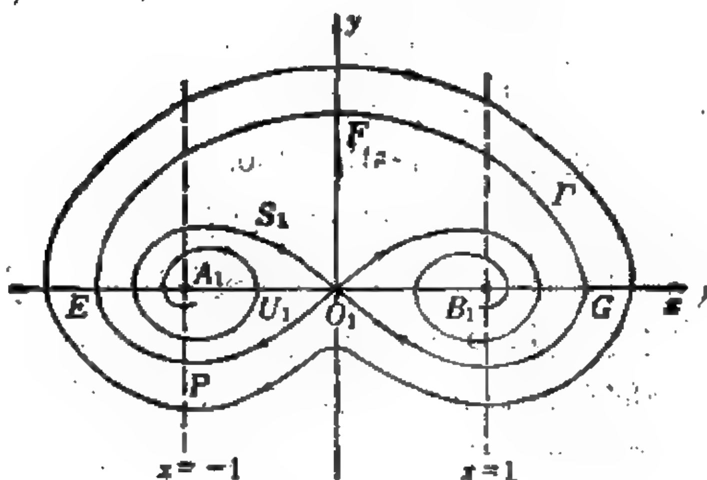



图 11.2

**引理 11.4** 系统(11.17) 当 $a_1>0$ 时既无包含 $A_1$ 与 $B_1$ 的奇闭轨线，也无包含 $A_1$、$O_1$、$B_1$ 的闭轨线。

总结以上各引理，得到如下定理：

**定理 11.1** 对于系统(11.9)有以下一些结论：

(1) 对任何 $a_2>0$, $a_1\geqslant 0$, 在半平面 $x\geqslant 0$ 内不存在闭轨线或奇闭轨线。

(2) 对任何给定的 $a_1>0$, 存在唯一的 $a_1^*=a_1^*(a_2)$, $\sqrt{2}\,a_2<a_1^*<2a_2$, 使在半平面 $x\leqslant 0$ 内存在一内侧稳定的分界线环，且不再有其他的闭轨线。当 $a_1\geqslant 2a_2$ 或 $0\leqslant a_1<a_1^*$ 时，(11.9)不存在闭轨线与奇闭轨线；当 $a_1^*<a<2a_2$(图 11.3 中的阴影区域)时，存在唯一的包含 $A_1$ 在其内部的稳定极限环。

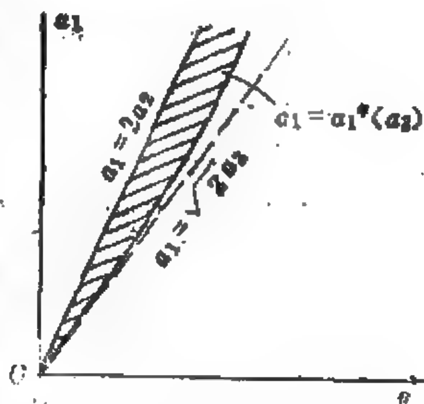



图 11.3

(3) $(11.17)_{a_1=0}$ 当 $0<a_2<\sqrt{2}$ 时存在同时包含 $A_1$ 与 $B_1$ 的奇闭轨线，其外部有一系同时包含 $A_1$、$O_1$、$B_1$ 的闭轨线，其内部不再有闭轨线，当 $a_2\geqslant\sqrt{2}$ 时既无包含 $A_1$、$B_1$ 的奇闭轨线，亦无包含 $A_1$、$O_1$、$B_1$ 的闭轨线。

(4) 对任何 $a_1>0$, $a_2>0$, 不存在同时包含 $A_1$、$B_1$ 的奇闭轨线，也不存在同时包含 $A_1$、$O_1$、$B_1$ 的闭轨线。

注 11.1 若改 (11.9) 的第二方程右方为 $x^3-x$, 则由文献[11.3]的定理 4 知道，当 $a_1=0$ 时 $O(0, 0)$为中心，而当 $a_1\neq 0$ 时方程无闭轨。这时 $O(0, 0)$是非鞍点，而$(\pm 1, 0)$都是鞍点。

其次，我们来研究方程(11.7)的极限环的全局分支问题。关于这个问题在文献[11.5]与 [11.6] 中曾进行过一些大范围分析，但极限环个数问题未能解决。文献[11.7]和 [11.33] 对一特殊情况(相当于在下面的方程(11.24)中取 $a_1=-a$, $3a_3=1$) 给出了完整的结果，但证明较困难。下面介绍文献[11.8]的工作：

方程(11.7)经尺度变换以后可以化为：

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=x-x^3-(a_1+3a_3x^2)y. \tag{11.24}$$

易见 $a_1=a_3=0$ 时(11.24)是可积系统，$a_1a_3\geqslant 0(a_1^2+a_3^2\neq 0)$时，发散量保持常号，故无闭轨线与奇闭轨线。因此可限于讨论 $a_1a_3<0$ 的情况。又不妨设 $a_1<0<a_3$, 奇点 $O(0, 0)$是鞍点，$A(-1, 0)$与 $B(1, 0)$当 $a_1<-3a_3(>-3a_3)$时，是指标为 $+1$ 的不稳定(稳定)初等奇点。当 $a_1=-3a_3$ 时，是不稳定一阶细焦点。

注意：(11.24)关于 $a_1$ 和 $a_3$ 都各构成旋转向量场族，(11.24)所确定的方向随 $a_1$ 或 $a_3$ 的增加而向顺时针方向旋转。又(11.24)对于原点对称，因此在讨论只含一个奇点的极限环时不妨限于在右半平面之内。

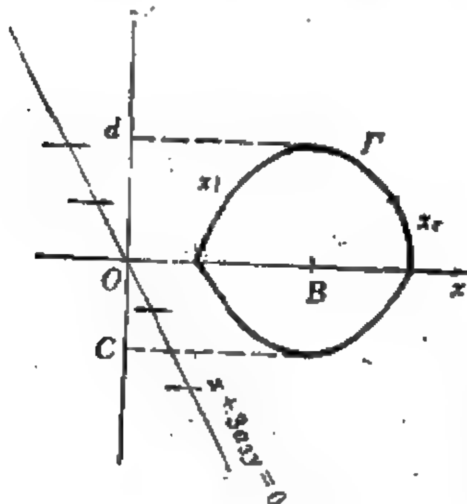


图 11.4

引理 11.5 当 $a_1\leqslant -3a_3$ 时 (11.24) 没有单独包含$B$ (或 $A$) 的闭轨。

证 只须证明 $a_1=-3a_3$ 时引理的结论成立，则由旋转向量场理论，当 $a_1<-3a_3$ 时引理自然成立。当 $a_1=-3a_3$ 时(11.24)成为：

$$\dot{x}=y,$$

$$\dot{y}=(1-x^2)(x+3a_3y). \tag{11.25}$$

如果 (11.25) 在$B$外围有闭轨线$\Gamma$，则它只能在直线 $x+3a_3y=0$ 的右上方，如图 11.4 所示。故沿着$\Gamma$有$x+3a_3y>0$。在计算发散量沿$\Gamma$的积分时，我们把$\Gamma$分成左右两部分，其上点的$x$坐标分别记为$x_l$与$x_r$，而$y$则在$c<0$到$d>0$之间变动。于是有：

$$h(\Gamma)=\oint_\Gamma\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dt=3a_3\int_0^T(1-x^2)\,dt$$

$$=3a_3\int_c^d\frac{x_r(y)-x_l(y)}{(x_l(y)+3a_3y)(x_r(y)+3a_3y)}\,dy>0,$$

但$\Gamma$内部的奇点$B$为不稳定的，故上式说明$\Gamma$不可能存在。

**引理 11.6** 当 $a_1\geqslant -a_3$ 时(11.24)没有单独包含$A$或$B$的闭轨线。

证 将坐标原点移到 $B(1,\ 0)$，则(11.24)化为：

$$\dot{\xi}=\eta,$$

$$\dot{\eta}=-(\xi^3+3\xi^2+2\xi)-(a_1+3a_3+6a_3\xi+3a_3\xi^2)\eta. \tag{11.26}$$

考虑(11.26)的等价系统：

$$\dot{x}=y-[(a_1+3a_3)x+3a_3x^2+a_3x^3],$$

$$\dot{y}=-(x^3+3x^2+2x). \tag{11.27}$$

这里$x\in(-1,\ \infty)=I$。记

$$F(x)=a_3x^3+3a_3x^2+(a_1+3a_3)x,$$

$$f(x)=3a_3x^2+6a_3x+a_1+3a_3=F'(x),$$

$$g(x)=x^3+3x^2+2x,$$

$$G(x)=\int_0^x g(\tau)\,d\tau=\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2.$$

则 $f(x)$、$g(x)$在$I$内连续可微，且$xg(x)>0$ $(x\neq 0)$当$x\in I$。下面证明联立方程组：

$$\begin{cases}F(u)=F(v)\\ G(u)=G(v)\end{cases} \tag{11.28}$$

在$-1<u<0,\ 0<v<\infty$中无解。

在(11.28)中消去$u-v$，可得：

$$a_3(u^2+uv+v^2)+3a_3(u+v)+a_1+3a_3=0,$$

$$u^3+(u^2+uv+v^2)v+4(u^2+uv+v^2)+4(u+v)=0. \tag{11.29}$$

再由(11.29)消去 $u^2+uv+v^2$，可得：

$$3a_3v^2+(3a_3u+11a_3+a_1)v-a_3u^3+8a_3u+4a_1+12a_3=0. \tag{11.30}$$

当 $a_1\geqslant-a_3$ 且 $-1<u<0$, $0<v<\infty$ 时有

$$3a_3u+11a_3+a_1>0,$$

$$-a_3u^3+8a_3u+4a_1+12a_3>0.$$

故(11.30)无解，从而(11.28)无解。由熟知的定理知道(11.24)没有单独包含 $B$ 的闭轨线。 ▌

引理 11.7 当 $-3a_3<a_1<-a_3$ 时，(11.24)至多有一极限环，若存在，应是单重不稳定环。

极限环的存在性可由细焦点改变稳定性而知。至于唯一性则可用 W. A. Coppel 的唯一性定理(文献 [11.12])证明（在此从略）。

根据以上诸引理，由旋转向量场的理论可知：对给定的 $a_3>0$ 存在 $a_{11}=a_{11}(a_3)$，$-3a_3<a_{11}<-a_3$，使当 $-3a_3<a_1<a_{11}$ 时存在分别包含 $A$ 与 $B$ 的唯一单重不稳定环 $\Gamma_A$ 与 $\Gamma_B$。而当 $a_1=a_{11}$ 时存在过 $O$ 而包含 $A$ 和 $B$ 的分界线环 $\Gamma_0$，它是当 $a_1\to a_{11}$ 时 $\Gamma_A$ 与 $\Gamma_B$ 的极限，因而是内侧不稳定的。但由

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{(0,0)}=-a_{11}>0$$

可知 $\Gamma_0$ 也是外侧不稳定的。当 $a_1>a_{11}$ 时 $\Gamma_0$ 破裂。这时 $A$、$O$、$B$ 与过 $O$ 的分界线一起构成指标为 $+1$ 的稳定奇点系，如图 11.5 所示。实际上，这个集合正是文献 [11.10] 中 §8 所谓的广义焦点。又当 $a_1\leqslant a_{11}$ 时它们构成不稳定的广义焦点。

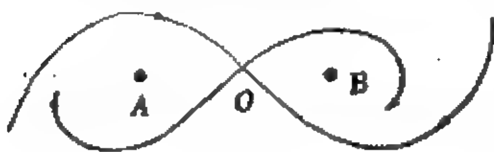



图 11.5

引理 11.8 当 $a_1\geqslant-a_3$ 时(11.24)没有同时包含奇点 $A$、$O$、$B$ 的闭轨线。

证　因为 $a_1 \geqslant -a_3 > a_{11}$，所以 $A$、$O$、$B$ 与过 $O$ 的分界线一起构成稳定广义焦点。由旋转向量场理论，只须证明 $a_1 = -a_3$ 时引理的结论成立即可。此时与(11.24)等价的系统为：

$$\dot{x} = y - a_3(x^3 - x), \quad \dot{y} = x - x^3. \tag{11.31}$$

今取同时包含 $A$、$O$、$B$ 的闭曲线族

$$\lambda(x, y) = x^4 - 2x^2 + 2y^2 = c \geqslant 0,$$

则沿着(11.31)的轨线有

$$\frac{d\lambda}{dt} = -4a_3x^2(x^2-1)^2 \leqslant 0.$$

注意：当 $c=0$ 时 $\lambda(x, y)=0$ 是过 $O$ 的∞形曲线，而对于∞内部的点有 $\lambda(x, y)<0$，即知(11.31)没有同时包含 $A$、$O$、$B$ 的闭轨线。▌

**引理 11.9**　当 $a_1 < -a_3$ 时 (11.24) 至多有两个同时包含 $A$、$O$、$B$ 的极限环。

证　考虑(11.24)的等价系统：

$$\dot{x} = y - (a_3x^3 + a_1x), \ \dot{y} = -x^3 + x. \tag{11.32}$$

记

$$F(x) = a_3x^3 + a_1x, \quad f(x) = F'(x) = 3a_3x^2 + a_1,$$

$$g(x) = x^3 - x,$$

$$G(x) = \int_{\pm 1}^{x} (\tau^3 - \tau)\,d\tau = \frac{1}{4}(x^2-1)^2, \ |x| \geqslant 1.$$

则 $F(x)=0$ 与 $f(x)=0$ 的根分别为：

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{a_1}{a_3}} < x_0 = 0 < x_2 = \sqrt{-\frac{a_1}{a_3}},$$

$$x_1' = -\sqrt{\frac{-a_1}{3a_3}} < 0 < x_2' = \sqrt{-\frac{a_1}{3a_3}}.$$

$g(x)=0$ 的根是 $-1, 0, 1$。由于 $a_1 < -a_3$，故 $x_1 < -1 < 0 < 1 < x_2$。易证：

$xF(x) < 0$ 当 $x \in (x_1, x_2)$ 且 $x \neq 0$；

$xF(x) > 0$ 当 $x \notin (x_1, x_2)$；

$f(x) < 0$ 当 $x \in (x_1', x_2')$；

$f(x) > 0$ 当 $x \notin (x_1', x_2')$；

$xg(x)<0$ 当 $x\in(-1,1)$，且 $x\neq 0$；

$xg(x)>0$ 当 $x\notin(-1,1)$。

考察：

$$\psi(x)=2G(x)[f'(x)g(x)-f(x)g'(x)]+f(x)g^2(x)$$
$$=\frac{1}{2}(x^2-1)^3(3a_3x^2-a_1),$$

由此可见当 $|x|>1$ 时有 $\psi(x)>0$。故由文献[11.11]的定理2（即本节定理11.9)即得引理的证明。 ∎

由以上的这些结果知道：当 $-\infty<a_1\leqslant a_{11}$ 时，由于$(A, O, B)$构成不稳定的广义焦点，故按文献[11.9]中推广了的Драгилёв定理知道(11.24)有奇数个包含三个奇点的极限环。再用引理11.9即知应有唯一的单重稳定环 $\Gamma_1$。当 $a_{11}<a_1<-a_3$ 时，$(A, O, B)$变为稳定的广义焦点，在 $0<a_1-a_{11}\ll 1$ 时 $\Gamma_1$ 仍存在，但由 $a_1=a_{11}$ 时的分界线环 $\Gamma_0$ 破裂又产生一不稳定环 $\Gamma_2\subset\Gamma_1$。由引理11.9，$(A, O, B)$外围只能有这两个环。然后在 $a_1=a_{12}(a_3)<-a_3$ 时 $\Gamma_1=\Gamma_2$ 成为半稳定环，它在 $a_1>a_{12}$ 时消失。

总结起来可得如下定理：

**定理 11.2** 对于给定的 $a_3>0$ 存在 $a_{11}=a_{11}(a_3)$ 及 $a_{12}=a_{12}(a_3)$，满足 $-3a_3<a_{11}<a_{12}<-a_3$，使得系统(11.24)有如下的性质：

1) 当 $-\infty<a_1\leqslant -3a_3$ 时，没有单独包含 $A$ 或 $B$ 的闭轨线，但存在唯一同时包含 $A$、$O$、$B$ 三奇点的单重稳定极限环 $\Gamma_1$。

2) 当 $-3a_3<a_1<a_{11}$ 时，有单独包含 $A(B)$ 的唯一单重不稳定环 $\Gamma_A(\Gamma_B)$，且 $\Gamma_1$ 仍存在。

3) 当 $a_1=a_{11}$ 时，$\Gamma_A$ 与 $\Gamma_B$ 消失而出现过 $O$ 且包含 $A$ 与 $B$ 的内外侧均不稳定的分界线环 $\Gamma_0$，且 $\Gamma_1$ 仍存在。

4) 当 $a_{11}<a_1<a_{12}$ 时，无单独含 $A$ 或 $B$ 的闭轨线或奇闭轨线，但存在同时包含 $A$、$O$、$B$ 三奇点的两个环 $\Gamma_2\subset\Gamma_1$，其中 $\Gamma_2$ 为单重不稳定环。

5) 当 $a_1=a_{12}$ 时，$\Gamma_1=\Gamma_2$ 成为包含三奇点的唯一半稳定环。

6) 当 $a_1 > a_{12}$ 时，(11.24)不再有闭轨线及奇闭轨线。

由此可以看出，方程 (11.24) 的全局相图与分支要比方程(11.9)的复杂一些，虽然 (11.24) 的等价系统 (11.32) 与方程(11.9)所差的只是将 $a_2x^2$ 改为 $a_3x^3$。

用类似于以上的分析方法，在文献[11.9]中还研究了系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - x^3 - (by^3 - ay), \tag{11.33}$$

并证明可以存在单独包含 $A(-1, 0)$ 或 $B(1, 0)$ 的各一个小环，同时又有两个包含 $A$、$O$、$B$ 的大环；也可以存在单独包含 $A$ 或 $B$ 的各两个小环，它们外部还有一个包含 $A$、$O$、$B$ 的大环，详情不在此细述了。此外，研究(11.24)的还有文献[11.29]和[11.36]。

比文献[11.9]更为一般，在[11.13]中对方程

$$\dot{x} = y(b_2y + b_0) - (rx^3 + \delta x), \quad \dot{y} = -x(a_2x^2 + a_0) \tag{11.34}$$

也证明了与(11.33)同样的结果。又在文献[11.14]中对方程

$$\dot{x} = y - (hx^5 - rx^3 + \delta x), \quad \dot{y} = -x(x^2 - 1) \tag{11.35}$$

也得到类似的结果。

此外，在文献[11.15]中对方程

$$\dot{x} = y - \varepsilon y^3, \quad \dot{y} = x + \alpha y - x^3 - x^2y \tag{11.36}$$

(其中 $\varepsilon = 10^{-16}$, $\alpha = 1 - \lambda$, $0 < \lambda < 10^{-95}$)证明存在包含 $A(-1, 0)$ 和 $B(1, 0)$ 的各一个小环，包含 $A$、$O$、$B$ 的一个大环。此外还有各包含一个奇点的两个小环位于大环的外部．此文的不足之处是：若从定性的观点来看，要在理论上证明上述极限环分布确实存在，则其篇幅可以大大缩短。若从实用的观点来看，$\varepsilon$ 与 $\lambda$ 如此之小，可能没有多大实用价值。研究(11.36)的还有文献[11.35]。

关于三次系统除了上面所介绍的这许多有趣的工作以外，王现在[11.9]、[11.17]、[11.18]、[11.19]、[11.20]中，韩茂安在[11.13]、[11.14]、[11.21]中以及 Dumortier and Rousseau 在[11.22]中还曾对形如

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \varepsilon x + bx^2 + \mu x^3 - (a_1 + 2a_2x)y \quad (\varepsilon = \pm 1, \ \mu = \pm 1) \tag{11.37}$$

的方程的极限环、全局结构和分支问题作过详细的分析。又王现

在文献[11.16]中还对

$$\dot{x}=\varphi(y),\quad \dot{y}=sx^3+nx^2-x+(\delta+x)y,$$
$$y\varphi(y)>0\ 当\ y\neq 0,\ n>0, \tag{11.38}$$

证明了其既无只包含一个奇点的小环，亦无包含三个奇点的大环。证明时用到他所得到的下一极限环不存在定理：

**定理 11.3** 设有非线性系统：

$$\dot{x}=\varphi(y),\ \dot{y}=-g(x)-f(x)y=-g_0(x)-g_e(x)-f(x)y, \tag{11.39}$$

其中 $\varphi(y)\in C^1_R$, $y\varphi(y)>0$ 当 $y\neq 0$; $g$、$f\in C^1_{(\gamma_1,\gamma_2)}$ $(-\infty\leqslant\gamma_1<0<\gamma_2\leqslant+\infty)$, $g_0$ 与 $g_e$ 分别是 $g(x)$ 的奇数部分和偶数部分，

$$f(-x)=-f(x)。$$

设 $g_e(x)$ 定号，且存在 $c_0$、$c_1$、$c_2$: $\gamma_1<c_1\leqslant c_0\leqslant c_2<\gamma_2$, $c_1\leqslant 0\leqslant c_2$, 使 $(x-c_0)g(x)<0$ 当 $x\in(c_1,c_2)$, $x\neq c_0$; $xg(x)>0$ 当 $x\notin(c_1,c_2)$, 则(11.39)不存在同时与 $x=c_1$、$x=c_2$ 都相交的闭轨线。

注 11.2　在(11.37)中若 $\varepsilon=\mu=+1$, 则 $O(0,0)$ 为鞍点，且 $x$ 轴上的零点若存在，必位于 $O$ 的同一边，故(11.37)有一非鞍点和两个鞍点。若 $\varepsilon=-1$, $\mu=1$, 则 $O$ 为非鞍点，另两个奇点分别位于 $O$ 的两边，都是鞍点。若 $\varepsilon=\mu=-1$, 则 $O$ 为非鞍点，另两个奇点位于 $O$ 的同一边，一为鞍点，一为非鞍点。若 $\varepsilon=1$, $\mu=-1$, 则 $O$ 为鞍点，另两个奇点分别位于 $O$ 的两边，都是非鞍点。所以包含三个奇点的极限环只出现在 $\mu=-1$ 的时候。

王现的工作的特点在于：1) 对方程(11.37)的有限和无限远奇点邻域的轨线作深入细致的分析。在文献 [11.18] 中发现若 $\varepsilon=\mu=-1$, $b=-2$, (11.37) 当 $a_2$ 固定而 $a_1$ 变动时可以存在一个区间$[a_{12}(a_2),\ a_{12}^*(a_2)]$, 使当 $a_1=a_{12}$ 时，(11.37)有内不稳定过鞍结点的分界线环；$a_1=a_{12}^*$ 时，有外不稳定分界线环，而对任一 $a_1\in(a_{12},\ a_{12}^*)$, 方程都存在分界线环，且从鞍结点出发有进入环内部的轨线，也有跑出环外部的轨线(见文献[11.18]中图 5)，这一情况非常有趣。2) 为了证明包围多个奇点的极限环的存在性，在[11.9]中引进"具指标为 $+1$ 的奇点系"和"具指标为 $+1$ 的奇点

环系"的概念，并推广熟知的 Драгилёв 定理(见[11.1]定理 5.1)到有多个奇点的 Lienard 系统。3) 为了证明极限环的唯一性，推广了[11.12]中的唯一性定理和张芷芬-Черкао 的唯一性定理，王现自己还得到一些其他的唯一性定理(见[11.16])。4) 注意上列这些方法对二次系统定性理论的应用。如在 [11.17] 中用化二次系统为三次系统的方法证明了

$$\dot{x}=y+x^2,\quad \dot{y}=a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy \tag{11.40}$$

的极限环的唯一性。(11.40) 是二次系统按前苏联学者的分类法所得到的两大类中第二类方程的特殊情况(见文献 [11.1]§15)。在文献[11.19]中又用他自己所得到的唯一性定理重证了 W. A. Coppel 关于有退化奇点的二次系统

$$\dot{x}=\delta x-y+lx^2-\delta xy+y^2,\quad \dot{y}=x(1+ax-y)$$

的极限环的唯一性(见§9, Ⅳ段)。

韩茂安的工作的特点是：对较为一般的平面 Lienard 系统(可能有多个奇点)用 Филиппов 方法[11.21]和旋转向量场法[11.13]证明了一切解的正向有界性，然后用于研究方程(11.37)或比它更广的方程：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y(b_2y^2+b_1y+b_0)-(\gamma x^3+lx^2+\delta x),\\ \dot{y}&=-x(a_2x^2+a_1x+a_0),\end{aligned} \tag{11.41}$$

例如在文献[11.21]中得到如下的定理：

**定理 11.4** 若在方程

$$\dot{x}=y-F(x),\quad \dot{y}=-g(x) \tag{11.42}$$

中 $F$ 与 $G=\int_0^x g(z)\,dz$ 满足下列诸条件：

1) 存在 $x_0'<x_1'<0<x_1<x_0$，使 $G(x_0)=G(x_0')\geqslant 0$，且当 $x\notin[x_1', x_1]$ 时，$xg(x)>0$。

2) 令 $z=G(x)$，设它在 $x\geqslant x_1$ 及 $x\leqslant x_1'$ 上的反函数分别为 $x=x_1(z)$ 与 $x=x_2(z)$，并记 $F_i(z)=F(x_i(z))$ $(i=1, 2)$ 又记 $z_0=G(x_0)$。

3) $G(\pm\infty)=\infty$，$g(x)$ 只有有限个奇重零点。

4) 存在$0<a<\sqrt{8}$，使当$z>z_0$时，有

$$F_1(z)\geqslant -a\sqrt{z},\ F_2(z)\leqslant a\sqrt{z},\ F_1(z)\geqslant F_2(z)。$$

5)
$$\int_{x_0'}^{x_0} F(u)g(u)du>0,$$

则(11.42)的一切解有界。

定理 11.4 主要用来研究方程(11.37)当$\varepsilon=\mu=-1$时的分支问题。

在文献[11.13]中先讨论方程：

$$\dot{x}=P(x,\ y,\ \delta),\ \dot{y}=-g(x)。\qquad(11.43)$$

假设：

1) $xg(x)>0$ 当$x\neq 0$, $g(-x)=-g(x)$。

2) (11.43)以$O(0,\ 0)$为鞍点，另有两个指标为$+1$的奇点$A(0,\ y_1>0)$和$B(0,\ y_2<0)$。

3) $g$、$P\in C^1$, $x\dfrac{\partial P}{\partial\delta}\leqslant 0,\ \not\equiv 0$；

$$P(-x,\ -y,\ \delta)=-P(x,\ y,\ \delta)。$$

4) 存在$\delta_0$，使当$\delta>\delta_0$时$A$稳定，$\delta<\delta_0$时$A$不稳定；当$\delta>\delta_0$时$B$稳定，$\delta<\delta_0$时$B$不稳定。

那末根据：

Ⅰ) $\delta=\delta_0$时$A$稳定，且当$\delta<\delta_0$时$\dfrac{\partial P}{\partial x}(0,\ 0,\ \delta)>0$。

或 Ⅱ) $\delta=\delta_0$时$A$不稳定，当$\delta>\delta_0$且(11.43)有包含$O$、$A$、$B$的大环时有$\dfrac{\partial P}{\partial x}(0,\ 0,\ \delta)>0$。

或 Ⅲ) $\delta=\delta_0$时$A$不稳定，当$\delta>\delta_0$且(11.43)有单独包含$A(B)$的小环时有$\dfrac{\partial P}{\partial x}(0,\ 0,\ \delta)<0$。

(11.43)就有如下三类不同的分支现象(见图 11.6、11.7、11.8)图中的 ss 表示半稳定环。

注意：图 11.6、11.7、11.8 中的$\delta_0$、$\delta_1$、$\delta_2$不一定代表同一组数值。

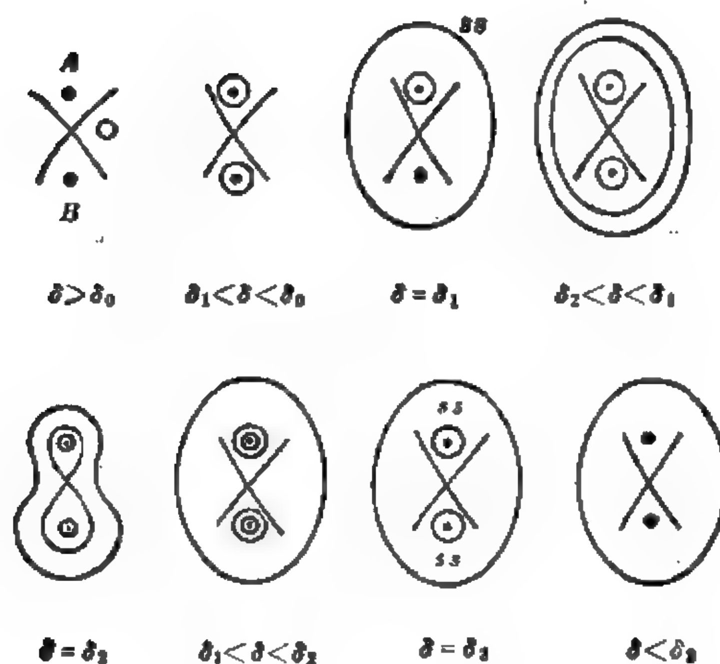

SS
A
B
$\delta>\delta_0$
$\delta_1<\delta<\delta_0$
$\delta=\delta_1$
$\delta_2<\delta<\delta_1$
SS
SS
$\delta=\delta_2$
$\delta_3<\delta<\delta_2$
$\delta=\delta_3$
$\delta<\delta_3$

图 11.6

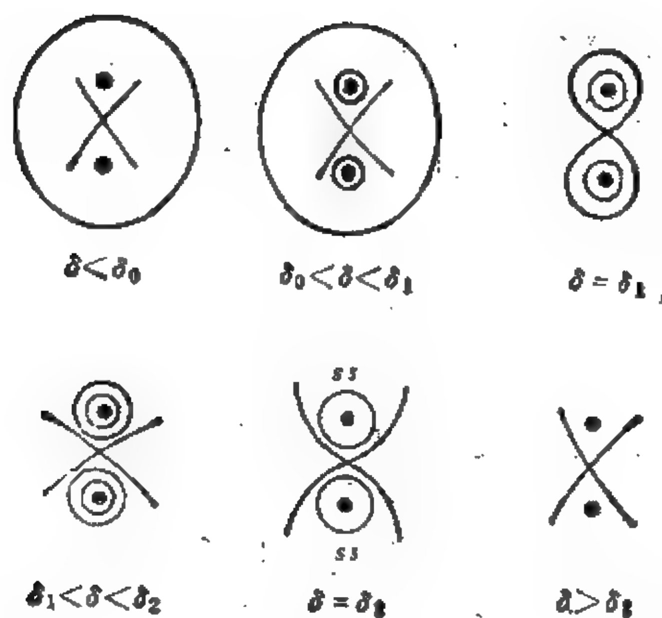

$\delta<\delta_0$
$\delta_0<\delta<\delta_1$
$\delta=\delta_1$
SS
SS
$\delta_1<\delta<\delta_2$
$\delta=\delta_2$
$\delta>\delta_2$

图 11.7

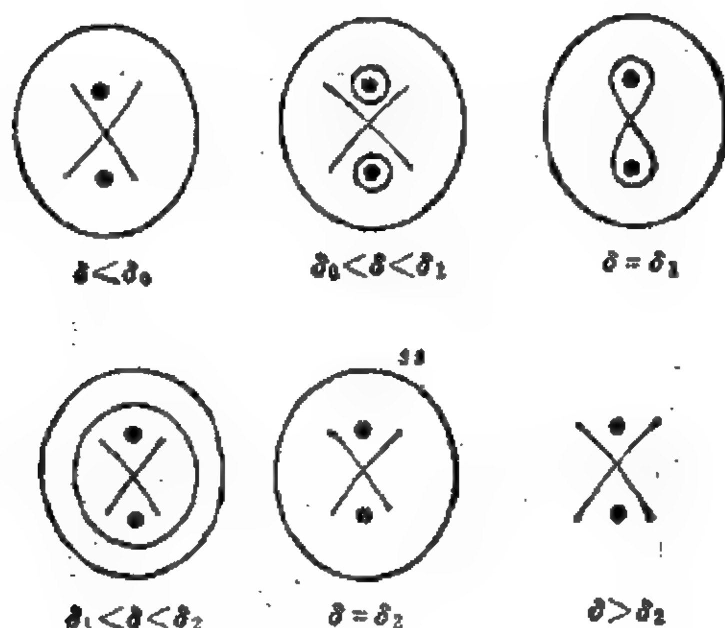



图 11.8

应用上列结果再结合韩茂安在文献 [11.23] 中所得到的关于 Lienard 系统解的有界性定理就可用来研究 (11.41) 的分支问题了。

此外，在文献[11.14]中韩茂安还证明了关于方程：

$$\dot{x}=h(y),\quad \dot{y}=-g(x)-h(y)f(x) \tag{11.44}$$

包含多个奇点的极限环唯一性的下列三个有趣的定理：

**定理 11.5**　设在方程(11.44)中有 $h(y)=|y|^{\alpha}\operatorname{sgn} y,\ \alpha>0$，$f$、$g$ 连续，且满足解对初值的唯一性条件，记

$$G(x)=\int_0^x g(z)\,dz,$$

设：

1) 存在 $x_0'<0<x_0$，使当 $x\notin[x_0',x_0]$ 时有 $xg(x)>0$；

2) $f(x)$ 有正零点 $x_1$，使对一切 $x$ 有

$$f(x)\,(G(x)-G(x_1))\geqslant 0\quad(\not\equiv 0).$$

则(11.44)至多有一个包含全部奇点在其内部的极限环。

若再要求 $f(x)$ 只可两次变号，则有如下定理：

**定理 11.6**　设：

1) 存在 $x_0'<0<x_0$，使当 $x\notin[x_0', x_0]$ 时，有 $xg(x)>0$；

2) 存在 $x_1'<x_0'$ 及 $x_1>x_0$，使当 $x\in(x_1', x_1)$ 时，有 $f(x)\leqslant 0$ $(\not\equiv 0)$；当 $x\notin[x_1', x_1]$ 时，$f(x)\geqslant 0$ $(\not\equiv 0)$；

3) $G(x_1')=G(x_1)\geqslant\sup\{G(x)\mid g(x)=0\}$，

则(11.44)至多有一个极限环。若存在，必包围全部有限远奇点。

定理 11.7 设定理 11.6 的条件成立，又设 $G(\pm\infty)=\infty$，以及

$$\varliminf_{z\to+\infty}(F_1(z)-F_2(z))>0$$

($F_i(z)$的定义见定理 11.4)，则方程(11.44)恰有一个极限环，它包围全部奇点。

在文献[11.14]中用这些定理研究方程 (11.24)，也得到定理 11.2中的部分结果。

Dumortier 和 Rousseau在文献[11.22]中研究的方程(11.37)起源于对余维为 3 的非尖点型幂零奇点的通有三参数开折的研究见文献[11.24]。通有开折的法式为：

$$y\frac{\partial}{\partial x}+[\varepsilon x^3+\mu_2 x+\mu_1+y(\nu+\beta(\lambda)x$$

$$\pm x^2+x^3h(x,\lambda))+y^2Q(x,y,\lambda)]\frac{\partial}{\partial y}, \qquad (11.45)$$

其中 $\varepsilon=\pm1$，$\lambda=(\mu_1,\mu_2,\nu)$为三维参数，$h$、$b$、$Q\in C^\infty$，$\beta(0)=\beta>0$，$Q=O(\|(x,y,\lambda)\|^N)$ 对任一给定的适当大的 $N$。当 $\mu_1=\mu_2=\nu=0$ 时，$O(0,0)$是(11.37)的高阶奇点。[11.22] 根据此高阶奇点的性质的不同将方程作了分类：

1) 鞍点型——此时 $\varepsilon=1$，$\beta>0$，$O$为高阶鞍点。

2) 焦点型——此时 $\varepsilon=-1$，$0<\beta<2\sqrt{2}$，$O$为高阶焦点。

3) 椭圆型——此时 $\varepsilon=-1$，$\beta\geqslant2\sqrt{2}$，$O$有一椭圆域和一双曲域。

在椭圆型与焦点型，(11.45)可经变换，截尾而得方程：

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-x^3-3ax^2-(3a^2-\mu_1)x-\beta(x+a)y. \quad (11.46)$$

它相当于(11.37)中 $\mu=-1$ 的情况。

在鞍点型，相当于(11.46)的是：

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=x^3+3ax^2+(3a^2-\mu_2)x-\beta(x+\sigma)y. \qquad (11.47)$$

它相当于(11.37)中$\mu=1$的情况。

(11.46)与(11.47)中的$\beta$相当于(11.37)中的$2a_2$。这三种情况在文献[11.22]中都画出了分支图。但在焦点型的情况(相当于[11.18]中$-2<b<0,\ 0<a_2<\sqrt{2}$)未证明大环的唯一性。

值得注意的是：在[11.22]中$\beta=2\sqrt{2}$是区别焦点型与椭圆型的分支值，而在[11.18]中$a_2=\sqrt{2}$是区别无穷远奇点$N(0,\pm1,0)$是否有椭圆域的分支值。[11.18]的图2说明了：当$a_2\geqslant\sqrt{2}$时，$N'(0,-1,0)$有椭圆域。[11.9]、[11.17]、[11.18]、[11.19]、[11.20]与[11.22]所得到的分支曲线与全局相图基本相同，不在此详细介绍了。应该提到的是：对于(11.37)包含一个奇点的小环或是包含三个奇点的大环，如果存在，必定是唯一的。

与上列工作类似，结果很完整的是Г.С.Рычков在[11.11]、[11.25]、[11.26]、[11.27]以及Л.Н.Жилевич在[11.28]对方程

$$\left(y-\sum_{i=1}^{3}a_ix^i\right)dy=(a_{10}x+a_{01}y)\,dx \qquad (11.48)$$

的极限环个数的研究，(11.48)等价于

$$\dot{x}=y-\sum_{1}^{3}a_ix^i,\ \dot{y}=a_{10}x+a_{01}y. \qquad (11.49)$$

由此得到：

$$\ddot{x}=\dot{y}-\sum_{1}^{3}ia_ix^{i-1}\cdot\dot{x}=a_{10}x+a_{01}\left(\dot{x}+\sum_{1}^{3}a_ix^i\right)-\sum_{1}^{3}ia_ix^{i-1}\cdot\dot{x}.$$

再化到Lienard平面，即得：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y+(a_{01}-a_1)x-a_2x^2-a_3x^3,\\ \dot{y}&=(a_{10}+a_{01}a_1)x+a_{01}a_2x^2+a_{01}a_3x^3.\end{aligned} \qquad (11.50)$$

Рычков所研究的是(11.50)的另一形式：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y-b(x^3+x^2+\beta x),\\ \dot{y}&=(-1)^i(x^3+x^2-\alpha x)\quad(i=1,\ 2;\ b>0).\end{aligned} \qquad (11.51)$$

此方程与(11.37)不完全一样。例如，它的第二方程中$x^3$与$x^2$必

须同号。但这一点在(11.37)中把 $x$、$y$ 变号也可以达到此目的。其次，(11.51)的第一方程右边有 $x^3$ 项，这在与 (11.37) 等价的 Lienard 方程中是没有的。在文献[11.25]中研究 $a_{01}a_3>0$ 的情况，证明了：若 $i=1$, $\alpha<-\frac{1}{4}$, 则当

$$(\alpha,\ \beta)\notin G\left\{(\alpha,\ \beta):0<\beta<-\alpha-\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}(2+9\alpha)^{2/3},\right.$$
$$\left.-\frac{2}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{-1}{4}\right\}$$

时(11.51)最多只有一个环，它包含唯一的奇点 $O$。文献 [11.26] 中研究 $a_{01}a_3<0$ 的情况，证明了：若在(11.51)中 $i=2$, 则包含唯一指标为 $+1$ 的奇点 $O$ 的极限环最多只有一个。此两篇文章都用到了[11.25]中所得到的新的唯一性定理：

**定理 11.8** 设对定义于 $d_1<x<d_2$, $d_1d_2<0$ 中的方程：

$$(F(x)-y)dy=g(x)dx。\tag{11.52}$$

其中 $F(x)$ 与 $g(x)$ 为解析函数，$xg(x)>0$ 当 $x\neq0$, $F'(0)\neq0$, $g'(0)\neq0$。置

$$F_i(z)=F((-1)^{i+1}x_i(z)),$$
$$0\leqslant z<z_{0i}=\lim_{x\to|d_i|}z_i(x)\quad(i=1,\ 2)。$$

这里 $x_i(z)$ 是

$$z_i(x)=\int_0^{x\geqslant0}|g((-1)^{i+1}x)|dx$$

的反函数。若存在唯一的 $y^*$、$z^*$、$z_{11}$、$z_{12}$ $(0<z_{11}<z^*,\ z_{11}<z_{12})$，使下列条件满足：

1) $(-1)^i(z-z_{1i})F_i'(z)<0$, 当 $z\neq z_{1i}$, $0<z<z_{0i}$,

$$0\leqslant F_1(z^*)=F_2(z^*),\ F_1(0)=F_2(0)=0。$$

2) $2zF_1'''+F_1''(z)>0$ 当 $0<z<z_{01}$。

3) $(y^*-y)\frac{d}{dy}(\overline{F}_1(y)-\overline{F}_2(y))>0$, $y\neq y^*$,

$$y\in(0,\ F_2(z_{12}))，$$

其中 $\overline{F}_i(y)$ 是 $F_i(z)$ 的反函数(当 $i=2$ 时只考虑 $0<\overline{F}_i(y)\leqslant z_{12}$ 的

$\overline{F}_i(y)$的值)。

则(11.52)不能有多于一个的极限环;若存在,必为单重环。

在文献[11.27]中研究$i=1$, $\alpha>-\frac{1}{4}$时的方程(11.51),这时方程可以存在三个奇点,其中两个有指标为+1。[11.27]中给出含三个奇点在其内部的大环不存在的充分条件为:

$$(\alpha,\beta)\in M=\left\{(\alpha,\beta):-1<\alpha\leqslant-\frac{2}{9},\right.$$
$$\left.-\alpha-\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}(2+9\alpha)^{\frac{2}{3}}<\beta<\frac{1}{3}\right\}.$$

在文献[11.28]中证明了包含多个奇点的极限环的存在性,但未解决唯一性问题。

在文献[11.11]中证明了,当$i=1$时若(11.51)有三个奇点,则极限环最多只能有三个。证明时用到如下的唯二性定理:

**定理 11.9** 若在方程(11.52)中$F$、$g$在其定义域内为解析函数,又满足下列条件:

1) 存在$a>0$, $b>0$, $c>0$, $(b<a)$,使

$$F'(c)=F(0)=g(0)=0,$$
$$(x-c)F'(x)>0,\ (x-a)F(x)>0,\ (x-b)g(x)>0,$$

当$x\neq0$, $x\neq a$, $x\neq b$, $x\neq c$且$x>0$。

2) 对$F_1(z)=F(x)-F(b)$,这里$z=G(x)$当$x>b$,

$$G(x)=\int_0^x g(x)dx$$

有

$$2zF_1''(z)+F_1'(z)\geqslant0.$$

3) 函数$-F(-x)$与$-g(-x)$有类似于1)、2)的性质,则方程(11.52)不能有多于两个包围三个奇点的极限环。

此定理的证明要点在于证明:发散量沿着绕原点一周且包围三个奇点的轨线段的积分关于初值是严格单调的。其中的条件2)等价于:

当$x>b$时,有$2G(x)(f'g-gf')+fg^2\geqslant0$, $f(x)=F'(x)$。此条件已见于文献[11.8](本节引理11.9)。类似于定理11.9的

结论也见于文献[11.29]、[11.36]。

在[11.11]中最后还得到一个类似于定理 11.1 和定理 11.2 的分支定理。

**定理 11.10**　设 $L_1(L_2)$ 为(11.51)的包围三个奇点的稳定(不稳定)极限环，$L_3(L_4)$ 是(11.51)的只含右(左)方一个奇点的极限环。$\varepsilon>0$ 足够小，则对每一固定的 $b>0$ 有下列结论成立：

1) 当 $\beta\leqslant 0$，$-\frac{1}{4}\leqslant\alpha\leqslant-\frac{2}{9}$ 时，只存在 $L_1$，而 $L_2$、$L_3$、$L_4$ 都不存在，当 $\beta>\frac{1}{3}$ 时 没有极限环。

2) 当 $\alpha=-\frac{1}{4}+\varepsilon$，$\beta$ 从 $O$ 变到 0.15 时从右边的非鞍点产生 $L_3$，它扩大成为分界线环而消失[1]。然后由分界环产生 $L_2$。$L_2$ 扩大，$L_1$ 缩小，最后重合为半稳定环而消失。在上述过程中 $L_4$ 不出现。

3) 当 $\alpha=-\frac{1}{4}+\varepsilon$ 又 $\beta$ 从 0.15 变到 $\frac{1}{4}-\delta$($\delta>0$ 很小，其值依赖于 $\varepsilon$)(11.51) 没有极限环。当 $\beta$ 继续增加时，从左边的非鞍点产生 $L_4$，它扩大成为分界线环而消失。在此过程中 $L_1$、$L_2$、$L_3$ 不出现。

4) 当 $\alpha=-\frac{2}{9}-\varepsilon$ 而 $\beta$ 从 $O$ 增加到 $\frac{1}{9}$ 时首先出现 $L_3$，然后出现 $L_4$。$L_3$、$L_4$ 可与 $L_1$ 同时存在。$L_3$、$L_4$ 不断扩大，$L_3$ 先成为分界线环消失，于是只剩下 $L_1$ 与 $L_4$。然后由分界环产生 $L_2$，它扩大而 $L_1$ 缩小。但 $L_4$ 扩大先成为分界环而消失，这时只剩下 $L_1$ 与 $L_2$。

5) 当 $\alpha=-\frac{2}{9}-\varepsilon$ 而 $\beta$ 从 $\frac{1}{9}$ 增大到 $\frac{2}{9}$ 时，$L_1$ 与 $L_2$ 相互接近，重合而消失。在这过程中 $L_3$、$L_4$ 不出现。

**注 11.3**　由以上的分析可以看出(11.51) 最多只能有三个极

---

1) 由(11.51) 看出当 $\beta$ 单调变动时 (11.51) 在 $y$ 轴右方并不构成旋转向量场族，因此 $L_3$ 是否单调扩大，不得而知，对后面所说的 $L_1$、$L_2$、$L_4$ 也是如此。

限环。且它不能有只包含一个非鞍点的两个套在一起的小环，与前面讨论过的某些方程不一样。

类似的工作还有文献[11.16]、[11.34]、[11.37]。在[11.16]中用作者自己得到的唯二性定理证明了：若在系统

$$\dot{x}=y-nx^2-\delta x,\quad \dot{y}=-x(\mu+kx+x^2)$$

中$0<n<\sqrt{2}$，$\mu$, $\delta$, $k<0$。则当

$$(k-\sqrt{k^2-4\mu})n<\delta\leqslant\frac{1}{2}(k-\sqrt{k^2-4\mu})n$$

时至多只有一个同时包含三个奇点的单重不稳定环。

在[11.16]中又用类似于定理11.3的(唯一性)定理证明了：

$$\dot{x}=y-(a_2x^2+a_3x^3),$$

$$\dot{y}=-x(x^2-bx+1)\quad (a_2, a_3>0)$$

当$b\leqslant-2$, $2a_3\geqslant(\sqrt{b^2-4}-b)a_2$时至多只有一个包含三个奇点的单重稳定环。

此外，在文献[11.30]、[11.31]中讨论了方程：

$$\dot{x}=y-x(lx^2+mx+n),\quad \dot{y}=-x(1\pm a^2x^2)\qquad(11.53)$$

和

$$\dot{x}=y-(hx^3+kx),\ \dot{y}=-x(x^2+bx+c)\quad(b^2<4c)\qquad(11.54)$$

的极限环的唯一性。文献[11.32]还研究了(11.53)包围三奇点的大环的唯二性。

## 参考文献

[11.1]　叶彦谦等。极限环论。上海科学技术出版社，1984。

[11.2]　Guckenheimer J.Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Appl. Math.Sci, 42, Springer-Verlag(1983).

[11.3]　Wang Xian. On Lienard's soft spring system of degree n, J. Nanjing Univ. 1983, no.1, 13～27.

[11.4]　王现，黄克成。关于Lienard软弹簧系统（I）．南京大学学报，21(1985), no.1, 26～35。

[11.5] 李继彬。内含多个奇点的极限环的存在性及某些三次微分系统的极限环分布(预印本,1982)。

[11.6] Wang Mingshu and Luo Dingjun. Global bifurcation of some cubic planar systems, Nonl, Anal. 8(1984), no.7, 711～722.

[11.7] 索光俭。微分方程组 $\dot{x}=y,\ \dot{y}=x(1-x^2)+(a-x^2)y$ 的极限环的最大数目及相对位置。数学年刊,1991, 12A(4), 430～438.

[11.8] 王现。 $\ddot{x}+(\alpha_1+3\alpha_3x^2)\dot{x}-\beta_1x+\beta_3x^3=0$ 的大范围分析。 应用数学, 1990, no.2, 59～63.

[11.9] 王现.关于 Lienard 型系统之极限环。数学季刊,1990, v.5, 122～130.

[11.10] 叶彦谦。曲面动力系统。科学出版社,1991.

[11.11] Рычков Г С. О максимальном числе предельных циклов уравнения $(y-P_3(x))dy=P_1(x_1y)\ dx$ в случае трех особых точек, Диф. урав. т.21(1985), no.6, 991～997.

[11.12] Coppel W A.Some quadratic systems with at most one limit cycle, Dynamics Reported, v.2(1988).

[11.13] 韩茂安。一类具三个奇点的微分方程的极限环。 数学年刊, 12A(3), 1991, 349～355.

[11.14] Han Maoan. Existence and uniqueness of limit cycles surrounding multiple singular points for a type of equations, Acta Math. Appl. Sinica 14(1991), no.2, 192～196.

[11.15] 李继彬。平面三次系统的一类极限环分布。中国科学, 1984, no.7, 586～596.

[11.16] 王现。关于极限环个数的三个判据。南京大学学报,数学半年刊1993年增刊,1～6.

[11.17] Wang Xian. The global bifurcation of a class of cubic system and the quadratic system $(B)_{a_{43}=0}$, Ann. of. Diff. Eqs. 2(3), 1986, 313～326.

[11.18] Wang Xian. The golbal bifurcation of $\ddot{x}+(\alpha_1+2\alpha_2x)\dot{x}\pm\beta_1x-\beta_2x^2+\beta_3x^3=0$, Ann. of Diff. Eqs. 5(3), 1989, 323～334.

[11.19] Wang Xian. On the uniqueness of limit cycles of system $\dot{x}=\varphi(y)-F(x),\ \dot{y}=-g(x)$, J.Nanjing Univ. v.26(1990), no.3, 363～372.

[11.20] Wang Xian. Some cubic Lienard systems with at most one limit cycle, Ann. of Diff. Eqs. 7(1), 1991, 94～102.

[11.21] 韩茂安。具多个奇点的微分方程的全局性质。数学学报, 33, 1990. 684～693.

[11.22] Dumortier F, Rousseau C. Cubic Lienard equations with linear damping, Nonlinearity, v.3(1990), 1015～1039.

[11.23] 韩茂安。一类非线性方程的有界解。高校应用数学学报。v.5, 1989, no.2.

[11.24] Dumortier F, Roussarie R and Sotomayor J, Generic 3-parameter families of planar vector fields, unfoldings of saddle, focus and elliptic singularities with nilpotent linear parts (to appear in Lect. Notes in Math.)

[11.25] Рычков Г С. О единственности предельного цикла уравнения $(y-P_3(x))dy=P_1(x, y)dx$, Диф. урав. t.16(1980), no.3, 433～437.

[11.26] Рычков Г С.О единственности предельного цикла уравнения $(y-P_3(x))dy=P_1(x, y)dx$ при наличии трех особых точек, Диф. урав, t.19(1983), no.5, 904～905.

[11.27] Рычков Г С. Об отсутствии у уравнения $P_1(x, y)dx=(y-P_3(x))$ $dy$ предельных циклов, охватывающих три особые точки, Диф. урав. t.20(1984), no.11, 1906～1910.

[11.28] Жилевич Л Н. Докл.АН БССР, 1979, t.23, no.6, 495～498.

[11.29] 周毓荣, 韩茂安。包围多个奇点的极限环的唯一性与唯二性。数学学报, (1993), v.36, no.4, 505～515.

[11.30] 王成文。一类三次微分系统的有界性与极限环的存在唯一性(将在系统科学与数学上发表)。

[11.31] 韩茂安, 王成文。两类三次微分系统的全局分析。高校应用数学学报。v.8, (1993), no.1, 36～44.

[11.32] 邱雅。三次 Lienard 方程的极限环。南京大学学报, 数学半年刊 1993 年增刊, 70～77。

[11.33] 索光俭, 沈伯骞。系统 $\dot{x}=y$, $\dot{y}=(1-x^2)x+\mu(\alpha-x^2)y\ (\alpha>2)$ 恰存在一个包含三个奇点的极限环, 数学研究与评论 7(1), 1987, 156～164.

[11.34] 王现。关于 Lienard 系统之极限环的唯二性。南京大学学报, 数学半年刊, (1990), no.2, 136～143.

[11.35] 索光俭、陈秀东、系统 $\dot{x}=y-\varepsilon y^3$, $\dot{y}=x(1-x^2)+(\alpha-x^2)y$ 的不与 $y=\pm1/\sqrt{3\varepsilon}$ 相交的极限环至多有 9 个(预印本, 1992)。

[11.36] 周毓荣、邓晋宜。Dulac 函数在研究极限环个数中的应用。数学年刊, 13A(6), (1992), 692～698.

[11.37] 王现。对"Lienard 方程的无穷远奇点和极限环"一文的补正。数学研究与评论, (1993), v.13, no.2, 309～310

# §12. 多项式系统的相图与全局拓扑结构

关于二次系统的相图与全局拓扑结构的研究工作非常多，已在文献[12.1]和[12.2]中作了详细介绍的有：

1) $(\mathrm{I})_{\delta=0}$ 类方程：

$$\dot{x}=-y+lx^2+mxy+ny^2,\quad \dot{y}=x \tag{12.1}$$

的一部分全局结构图[12.3]。

2) $(\mathrm{II})_{\delta=l=0}$ 类方程：

$$\dot{x}=-y(1+y-mx),\quad \dot{y}=x(1+ax) \tag{12.2}$$

的分支图与一部分全局结构图[12.4]。

3) $(\mathrm{II})_{\delta=m=0}$ 类方程：

$$\dot{x}=-y+lx^2+ny^2,\quad \dot{y}=x-x^2 \tag{12.3}$$

的分支图与全局结构图[12.5]。

4) $(\mathrm{II})_{\delta=n=0}$ 类方程：

$$\dot{x}=-y+lx^2+mxy,\quad \dot{y}=x-x^2 \tag{12.4}$$

的分支图与全局结构图[12.6]。

5) $(\mathrm{III})_{\delta=m=0}$ 类方程：

$$\dot{x}=-y+lx^2+ny^2,\quad \dot{y}=x(1+ax+by) \tag{12.5}$$

的分支图与全局结构图[12.7]、[12.8]。

6) 有三阶细焦点的二次系统：

$$\dot{x}=-y+lx^2+5axy+ny^2,\ \dot{y}=x+ax^2+(3l+5n)xy \tag{12.6}$$

的分支图与全局结构图[12.9] 1)。

---

1) 关于(12.6)的全局结构分析比文献 [12.9] 更早的有 [12.10]，但国内未能及时见到。又[12.9]是在已知(12.6)在 O(0, 0)外无环的基础上进行的，且考虑了全局分支曲线。

7) 有两个细焦点的二次系统的分支图与全局结构分析[12.11]。

8) 有界二次系统的全局结构分析[12.12]、[12.13]。

9) 弦二次系统的全局拓扑结构图[12.14]。

10) 没有无穷远奇点的二次系统的全局结构图[12.15]。

11) 有中心的二次系统的全局结构图[12.16]、[12.17]、[12.18]、[12.19]、[12.20]、[12.48]。

12) 齐次二次系统:

$$\dot{x}=a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2,\ \dot{y}=b_{11}x^2+b_{12}xy+b_{22}y^2 \tag{12.7}$$

的全局拓扑结构图[12.21]、[12.22]、[12.23]、[12.24]。

13) 有星形结点的二次系统:

$$\dot{x}=x+a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2,\ \dot{y}=y+b_{11}x^2+b_{12}xy+b_{22}y^2 \tag{12.8}$$

的全局拓扑结构图[12.25]。

14) 没有极限环的结构稳定二次系统的拓扑分类[12.26]、[12.27]、[12.28]。

有兴趣的读者可以参看文献[12.1]和[12.2]两书中的有关章节,在此不再细说。

15) 对于二次 Kolmogorov 系统

$$\dot{x}=x(ax+by+c),\ \dot{y}=y(a_1x+b_1y+c_1) \tag{12.9}$$

文献[12.29]作了全局定性分析(见[12.2])。

16) 对$(\mathrm{I})_{\delta=0}$类系统:

$$\dot{x}=-y+lx^2+mxy-y^2,\quad \dot{y}=x(1+ax) \tag{12.10}$$

的相图与分支曲线,分支曲面的研究[12.30]。

近十年来,在国内及西班牙、荷兰两国又出现了不少有关多项式系统相图的拓扑分类的文章。其中关于二次系统的有:

17) 有三直线解的二次系统的全局结构[12.46]。

18) B.Coll、A.Gasull、J.Llibre[12.31]研究了只有一个有限远奇点的二次系统的相图,得到 111 种可能存在的不同拓扑结构的相图,但不计极限环的存在与否。其中有一个相图能否被二次系统实现还未解决。对这种系统在文献[12.31]中得到了如下定理:

**定理 12.1**　一个 QS1(沿用 §10 的记号)可能存在极限环者，必可化为下列形式之一：

(1) $\dot{x}=y,\ \dot{y}=-x+by+xy+ny^2,\ n<0$。　　(12.11)

(2) $\dot{x}=y+x^2,\quad \dot{y}=-x+by+(l+b)x^2+mxy,\quad l^2-4m<0,$ $l+b\leqslant 0$。又若 $m=1$，则 $l+b\neq 0$。　　(12.12)

(3) $\dot{x}=y+xy,\ \dot{y}=-x+by+mxy+ny^2,\ m<0,\ (b-m)^2-4n<0$。　　(12.13)

(4) $\dot{x}=y+px^2+xy,\ \dot{y}=-x+by+(-1+bp)x^2+bxy,\quad p>0$。　　(12.14)

(5) $\dot{x}=y+px^2+xy,\quad \dot{y}=-x+by+(l+bp)x^2+(m+b)xy,$ $p>0,\ (1+l)^2-4pm<0$。　　(12.15)

由此进一步分析，文献[12.31]证明了：对定理 12.1 中的情况(1)、(2)、(3)、(4)至多只有一个极限环.又情况(5)在条件 $(m+b-p)^2-4(l+bp)\leqslant 0$ 时也至多只有一个极限环。以上一共有 13 种不同的相图。剩下来未解决的是下面两个问题：

(*P*1)　确定 QS1：

$$\dot{x}=y+px^2+xy,\ \dot{y}=-x+by+(l+bp)x^2+(m+b)xy \tag{12.16}$$

在条件

$p>0,\ (1+l)^2-4pm<0,\ (m+b-p)^2-4(l+bp)>0$ 之下最多能有几个极限环？

(*P*2)确定一个 QS1 能否具有如图 12.1 所示的相图。

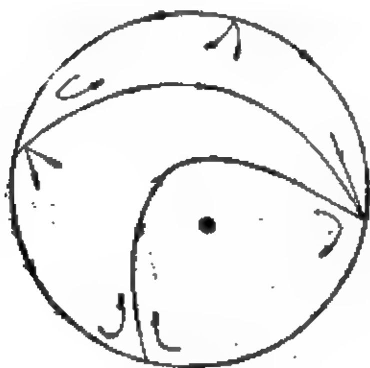


图 12.1

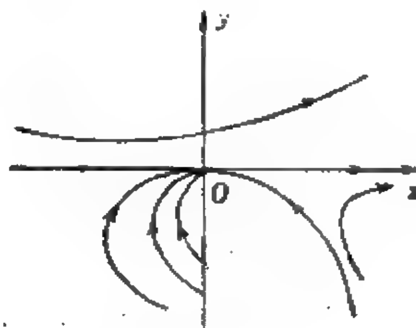



图 12.2

这里在赤道上有两个无穷远鞍结点。

19) P.de Jager 在文献[12.32]中研究了具有两个零特征根或一个零特征根的高阶奇点的二次系统的全局拓扑结构（研究二次系统的高阶奇点性质的还有[12.47]），更具体地说，在前一情况，二次系统有标准形：

$$\dot{x}=y+ax^2+bxy+cy^2,\ \dot{y}=dx^2+exy+fy^2. \qquad (12.17)$$

根据文献[12.33]已知：

i) 若 $a\neq 0,\ d=e=0,\ f\neq 0$，则 $O$ 是一指标为零的四阶鞍结点，如图 12.2。这时又可进一步将方程(12.17)化为：

$$\dot{x}=y+x^2+\lambda y^2,\quad \dot{y}=y^2. \qquad (12.18)$$

由此即可判定在这情况只有三种不同的相图。

ii) 若 $ae>0,\ d=0$，则 $O$ 为一指标 $+1$ 的三阶奇点，有椭圆域及双曲域各一个，如图 12.3。而(12.17)可进一步化为：

$$\dot{x}=y+\lambda_1 x^2+\lambda_2 xy+\lambda_3 y^2,\quad \dot{y}=xy. \qquad (12.19)$$

其中 $\lambda_1>0,\ \lambda_2=0$ 或 $1,\ \lambda_3\in R$。进行分析以后可证 $\lambda_2=0$ 时(12.19)有 12 个不同的相图，$\lambda_2=1$ 时有 18 个不同的相图。

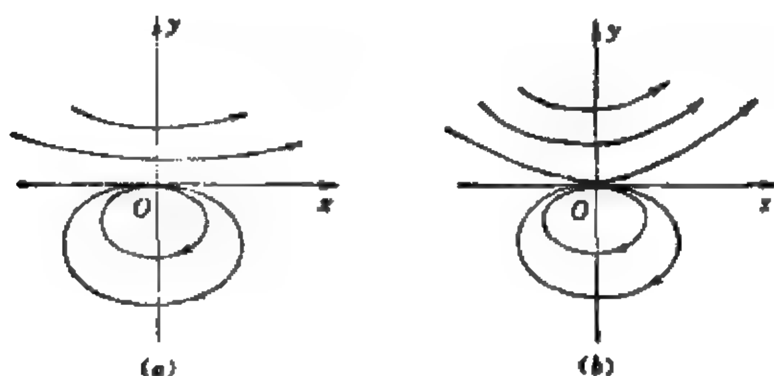



图 12.3

iii) 若 $ae<0,\ d=0$，则 $O$ 为一指标 $-1$ 的三阶鞍点，如图 12.4。而(12.17)可化为(12.19)，但在其中 $\lambda_1<0,\ \lambda_2、\lambda_3$ 如前。这时有 8 个不同的相图。

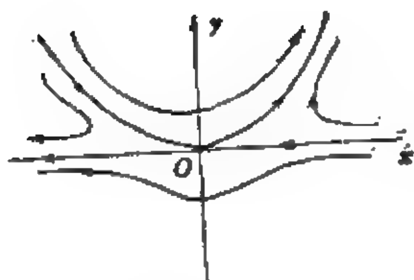


图 12.4

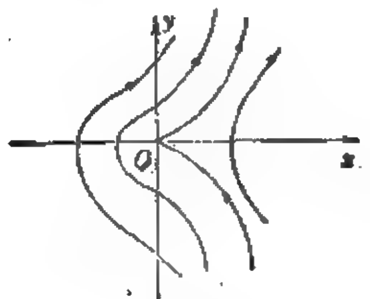


图 12.5

iv）若 $d\neq0$，则 $O$ 为指标零的二阶尖点，如图 12.5．这时可将(12.17)中的 $d$ 化为 1，然后进行研究，这一情况非常复杂，共有 104 种不同的相图。

以上一共有不同的相图 146 个。

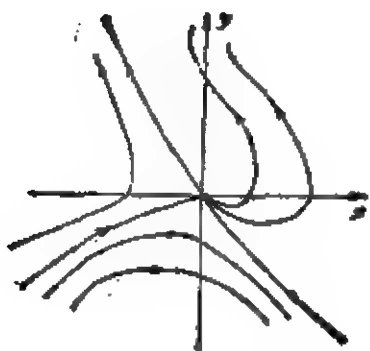
在后一情况二次系统有标准形：

$$\dot{x}=a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2,\quad \dot{y}=y+b_{20}x^2+b_{11}xy+b_{02}y^2. \quad (12.20)$$

由文献[12.33]可知：

v）当 $a_{20}=a_{11}=0$，$a_{02}+b_{20}\neq0$ 时，$O$ 是一个指标为零的四阶鞍结点，如图 12.6．这时又可进一步将方程(12.20)化为：

$$\dot{x}=\lambda_2(y+x^2+\lambda_1xy),\quad \dot{y}=y+x^2+\lambda_1xy-\lambda_2^{-1}y^2\quad (\lambda_2\neq0) \quad (12.21)$$



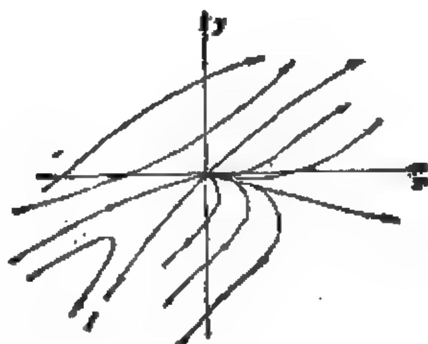



图 12.6

分析以后可得 6 个相图。

vi）若 $a_{20}=0$ 而 $a_{11}b_{20}>0$，则 $O$ 是一指标为 $-1$ 的三阶鞍

点，如图 12.7. 这时可化 (12.20) 中的 $a_{11}$ 与 $b_{20}$ 为 1，然后进行分析可得 33 个不同的相图。

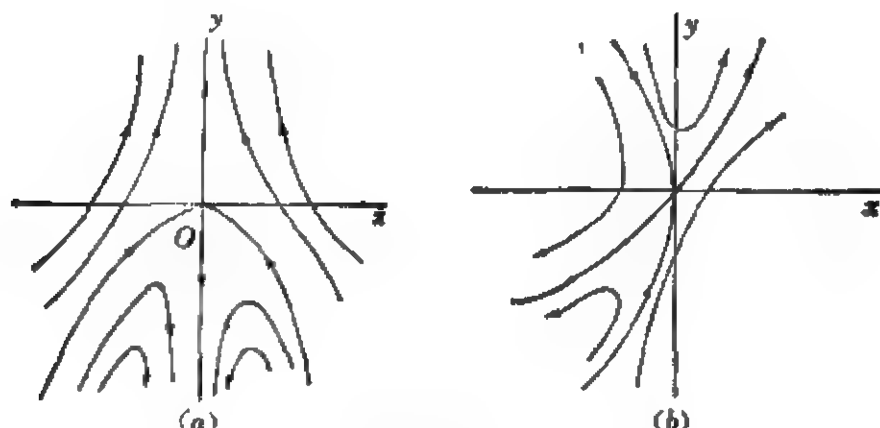



图 12.7

vii) 若 $a_{20}=0$ 而 $a_{11}b_{20}<0$，则 $O$ 是一指标为 1 的三阶结点，如图 12.8. 这时可化(12.20)中的 $a_{11}$ 为 $-1$, $b$ 为 1，然后进行分析可得 42 个不同的相图。

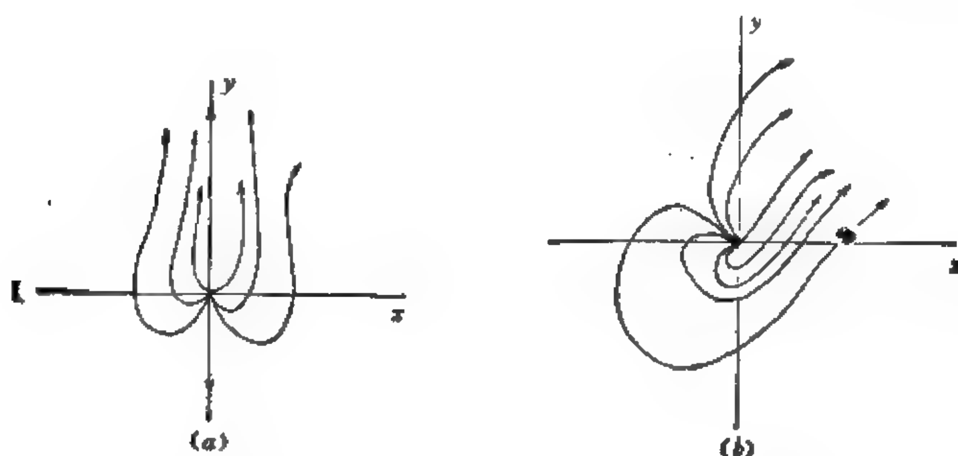



图 12.8

以上一共有不同的相图81个. 值得一提的是：在研究(12.17)的无穷远奇点时文献[12.32]中引进变换

$$x=\rho(1-\rho)^{-1}\cos\theta,\quad y=\rho(1-\rho)^{-1}\sin\theta$$
$$(0\leqslant\rho\leqslant1,\ 0\leqslant\theta<2\pi) \tag{12.22}$$

以及

$$\rho(1-\rho)\frac{d}{dt}=\frac{d}{d\tau}=\cdot, \tag{12.23}$$

这时(12.17)将会变成：

$$\begin{cases}\dot{\rho}=\rho^2(1-\rho)^2B_1(\theta)+\rho^3(1-\rho)C_1(\theta),\\ \dot{\theta}=\rho(1-\rho)B_2(\theta)+\rho^2C_2(\theta).\end{cases} \tag{12.24}$$

其中

$$\begin{aligned}&B_1(\theta)=\sin\theta\cos\theta, \quad B_2(\theta)=-\sin^2\theta,\\ &C_1(\theta)=a\cos^3\theta+(b+d)\sin\theta\cos^2\theta\\ &\qquad\qquad+(c+e)\sin^2\theta\cos\theta+f\sin^3\theta,\\ &C_2(\theta)=d\cos^3\theta+(e-a)\sin\theta\cos^2\theta\\ &\qquad\qquad+(f-b)\sin^2\theta\cos\theta-c\sin^3\theta.\end{aligned} \tag{12.25}$$

易见若 $C_2(\theta)\neq 0$，则 $\rho=1$ 是(12.24)的积分线。

20) A.Zegeling 在文献[12.34]中详细研究了有三个鞍点和一个非鞍点的二次系统的全局相图、分支问题和极限环问题。在不考虑极限环的存在性的前提下得到 15 个不同的相图。

21) 吴荣保、梁肇军在文献[12.35]中研究了有一条积分直线和一个细焦点的二次系统：

$$\dot{x}=-y+lx^2+mxy+ny^2, \quad \dot{y}=x(1+y) \tag{12.26}$$

的全局结构与分支曲面，共给出了 91 个不同的相图。

22) J.W.Reyn 在[12.36]中研究了没有有限远实和复奇点的非退化二次系统。由于他的分类比[12.14]更细致，所以得到 30 个相图。其中有些相图从拓扑的观点看是一样的，但方程经过扰动后可得到不同的相图。这方面的最新成果还有[12.50]和[12.51]。

23) J.C.Artes and J. Llibre 在文献[12.37]中研究了二次 Hamilton 系统的相图，得到 28 种不同的拓扑结构，其中的 11 种是有中心的。为了分析相图，在[12.37]中有下面的定理：

**定理 12.2** 任一个二次 Hamilton 系统必拓扑等价于下列四向量场之一：

$$\begin{aligned}X_1&=(\alpha+bx+cy,\ \beta-ax-by-x^2);\\X_2&=(\alpha+bx+cy+x^2,\ \beta-ax-by-2xy);\\X_3&=(\alpha+bx+cy-2xy,\ \beta-ax-by-3x^2+y^2);\\X_4&=(\alpha+bx+cy+y^2,\ \beta-ax-by-x^2)。\end{aligned}\tag{12.27}$$

若 $X_i$ 有(没有)有限远奇点，则可设 $\alpha^2+\beta^2=0\ (\neq 0)$。可以证明 $X_2$ 必有有限远奇点。

24) 关于结构稳定无环二次系统,按照文献[12.1] 中 §10 的定理 11 的结论,这种系统可以分成五个大类,共 12 个小类。从逻辑可能性着眼,可能有 60 种不同的拓扑结构,即：

$a$ 类：(1) $F$, 1 种；(2) $psF$, 1 种；(3) $p_1p_2s_1s_2F$, 5 种；

$b$ 类：(1) $p_1p_2S$, 1 种；(2) $p_1p_2p_3sS$, 1 种；

$c$ 类：(1) $s_1s_2F_1PF_2$, 1 种；(2) $ps_1s_2s_3F_1PF_2$, 4 种；

$d$ 类：(1) $SPF$, 1 种；(2) $psSPF$, 3 种；(3) $p_1p_2s_1s_2SPF$, 30 种；

$e$ 类：(1) $p_1p_2S_1S_2F$, 3 种；(2) $p_1p_2p_3sS_1S_2F$, 9 种。

其中 $s$、$p$ 分别表示有限远鞍点和非鞍点，$S$、$F$、$P$ 分别表示无穷远鞍点、源点和渊点。在[12.1]中已证明，除 $d$(3) 和 $e$(2) 类以外，其他21 种拓扑结构都是可被(二次系统)实现的。在 $d$(3) 的 30 种中已知 8 种可被实现，在 $e$(2) 的 9 种中已知 3 种可被实现。因此剩下来还有 28 种能否被二次系统实现尚待解决。这问题近年来进展较快。朱德明在[12.38] 中证明在 $d$(3) 类中又有 3 种可实现，有 10 种不能实现，在 $e$(2) 类中又有 1 种可以实现。在证明不能实现的10种拓扑结构时，他多次用到新发现的二次系统的如下性质：

在有限远鞍点处分界线的两条切线上除了此鞍点本身以外，不再含有别的奇点，并且它是无切的，即在鞍点两侧的轨线都从同一方向穿过此切线，除非切线本身与分界线重合而成为轨线时，其上才可能有其他奇点。

R. E. Kooij 与 W. T. van Horssen 在[12.39] 中又证明了：在 $d$(3) 类中还有 4 种可被实现，在 $e$(2) 类中还有 3 种可被实现，其法都是用扰动有一个或两个尖点的二次系统来得到所需的二次

系统。

这样,50种可能的相图中已有43种可被二次系统来实现了。余下只有7种能否被二次系统实现还不知道。这7种按文献[12.1]§10的记法为:

$d(3)$类:

$$s_1(p_1, p_1, p_2, F'),\ s_2(p_1, P', P, F'),\ S(p_1, P);$$
$$s_1(F, F, p_1, p_2),\ s_2(F, P', p_2, P),\ S(P', p_2);$$
$$s_1(p_1, F, p_2, P),\ s_2(p_1, F, p_2, P),\ S(F, F');$$
$$s_1(p_1, p_1, p_2, F'),\ s_2(p_1, P', F', F'),\ S(P', P);$$
$$s_1(F, F, p_1, P), s_2(F, F, p_1, p_2), S(P', P). \tag{12.28}$$

$e(2)$类: $s(p_1, F, p_3, p_3),\ S_1(p_2, p_3),\ S_2(p_2, p_3);$

$$s(F, F, p_1, p_3),\ S_1(p_2, p_3),\ S_2(p_2, p_3).$$

关于这个问题我们以后在§13中还要叙述[1)]。

二次系统到底能有多少种拓扑结构互不相同的相图?在文献[12.40]中说:J.Llibre与J.C.Artes已经得到超过1000种不同的相图,并且希望其总数会超过2000;我们也猜想也许会有这种可能。注意:前面介绍的那些几十种以至一百多种具有某一特定性质的二次系统的相图,都是没有把极限环考虑在内的。如果考虑到极限环的出现与消失,那怕只有一个,相图数目都会增加几倍!请看下面的定理:

**定理 12.3** (I)类方程

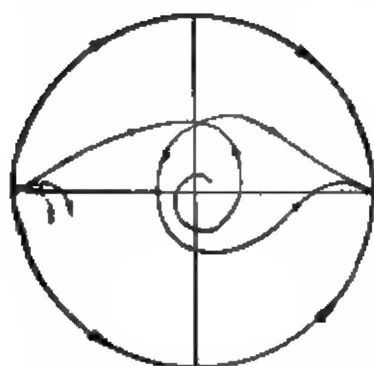
$$\dot{x} = -y + \delta x + lx^2 + mxy + ny^2, \quad \dot{y} = x \tag{12.29}$$

的相图恰有47种不同的拓扑结构。

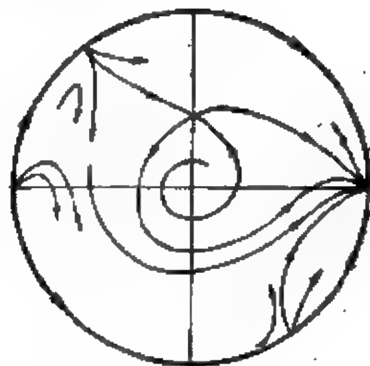
**证** 在文献[12.1]的§12中已画出$(12.29)_{\delta=0}$且$O$非中心时所可能有的不同拓扑结构的相图共7个,如下图12.9.其中已设$m=1$, $l+n>0$。

---

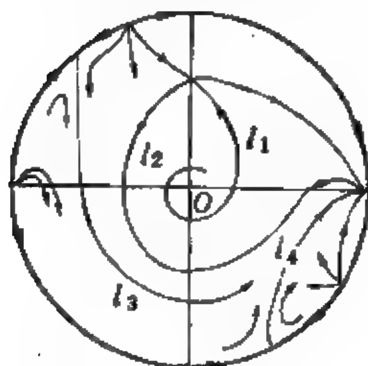
1) 最近J.Llibre告诉作者,他和他的合作者已能证明:这7种情况中的4种不能被二次系统实现。此外,如果考虑二次系统在$R^2$(而不是在$S^2$)中的扰动,则应再多出3种结构稳定无环系统。叶彦谦与他们独立也得到7种中有4种不能实现的结论。但他们的文章尚未定稿。



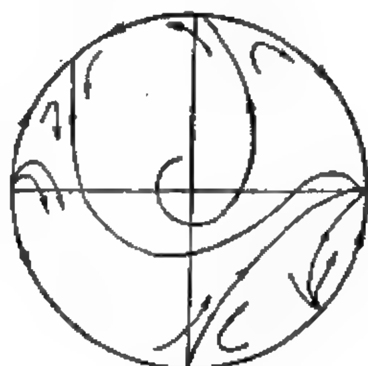
(1) $n>0, l>0, 4nl>1$



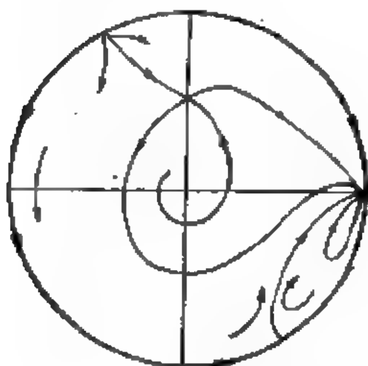
(2) $n>0, l>0, 4nl=1$



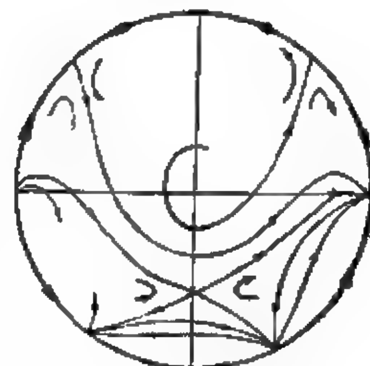

(3) $n>0, l>0, 4nl<1$



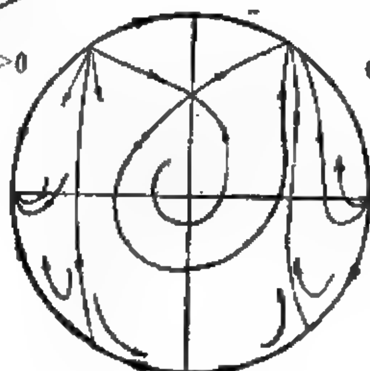
(4) $l>0, n=0$



(5) $l=0, n>0$



(6) $l>0, -l<n<0$



(7) $n>-l>0$

图 12.9

当 $(12.29)_{\delta=0}$ 有中心 $O(0, 0)$ 时或是 $m=0$，或是 $l+n=0$。这时又可画出下列 5 个相图。

i) $m=0$, $l\geqslant 0$, $n>0$。只有一个无穷远奇点，相图如图 12.10（或 $l\leqslant 0$, $n<0$）。

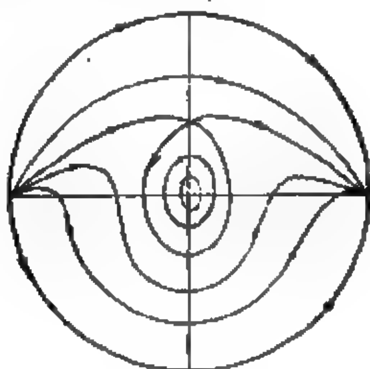


图 12.10

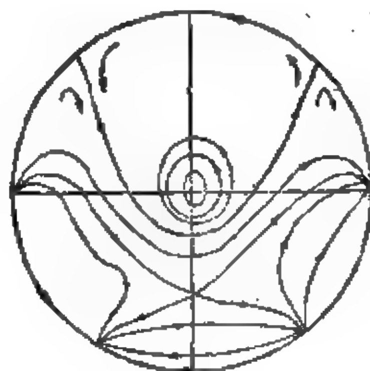


图 12.11

ii) $m=0$, $l>0$, $n<0$，有三个无穷远奇点，相图如图 12.11（$l<0$, $n>0$ 时一样）。

iii) $n=m=0$, $l\neq 0$，有两个无穷远奇点，相图如图 12.12。

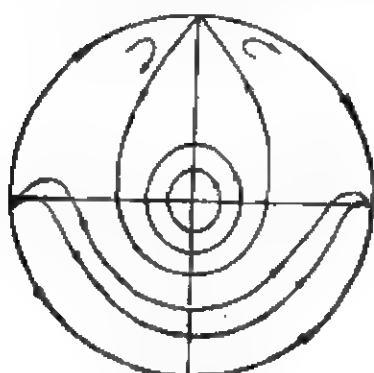


图 12.12

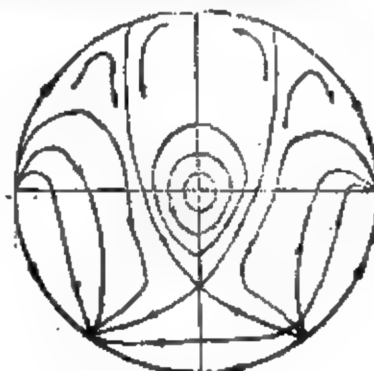


图 12.13

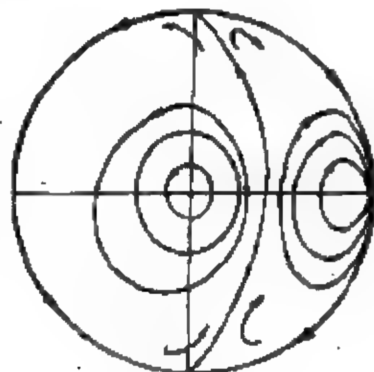


图 12.14

iv) $m\neq0$, $l+n=0$, $h\neq0$。如图 12.13，(不妨设 $m=1$) 它对应于 $l<0$, $n=-l>0$ 的情况。

v) $m\neq0$, $l=n=0$, 不妨设 $m=1$。如图 12.14 所示。

现在研究全 $I$ 类方程(12.29)。注意：

1) (12.29)对 $\delta$ 构成全平面的旋转向量场族，当 $\delta$ 从零增大(减少)时，向量场，特别是一切分界线都沿顺(逆)时针方向转动。

2) $\delta$ 变动不影响无穷远奇点以及鞍点 $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ (如果存在的话)的位置和性质，它只影响 $O(0, 0)$ 的稳定性以及由焦点到结点的变化，这事发生在 $\delta=0$ 以及 $|\delta|=2$ 时。

3) 当 $\delta$ 变动而 $O$ 点改变稳定性时有唯一的极限环从 $O$ 点产生，它单调扩大，最后成为有界的或无界的分界线环而消失。

由于 I 类方程有这样好的性质，所以很容易能从以上的 12 个相图得出一切其他的相图。例如由图 12.9(3) 出发，当 $\delta$ 从零减小时，$O$ 外围出现一个极限环 $\Gamma$，这就增添一个相图。当 $\Gamma$ 扩大成为过鞍点 $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ 的分界线环(这时 $l_1=l_2$)时又得到一个相图。然后 $l_1$ 与 $l_2$ 交换位置，我们得到第三个相图。$\delta$ 继续减小时，$l_1$ 将和 $l_3$ 重合，又得到一个相图，然后 $l_1$ 与 $l_3$ 交换位置，$l_1$ 与 $l_4$ 重合，$l_1$ 与 $l_4$ 交换位置，又得三个相图。反之，当 $\delta$ 从零增大时，只有 $O$ 从不稳定焦点变为不稳定结点，相图的拓扑结构仍如图12.9(3)。这样，由图12.9(3)可以导出 7 个其他不同的相图。

同样，由图12.9(1)可导出另外 2 个拓扑结构不同的相图；由图 12.9(2)可导出另外 7 个相图；由图 12.9(4)可导出另外 5 个相图；由图 12.9(5)可导出另外 5 个相图，由图 12.9(6)可导出另外 5 个相图；由图 12.9(7)可导出另外 2 个相图。

至于 $\delta=0$ 时以 $O$ 为中心的 5 个相图 (图 12.10～12.14) 在 $\delta\neq0$ 时，则只能各导出与前面已得到的相图拓扑结构不同的 0, 0, 1, 0, 1 个相图。

把原来的 12 个和新得到的 35 个相加，即得总数为 47 个相图，定理证毕。∎

上述由已知无极限环的相图产生新的其他相图的方法显然完全适用于(Ⅲ)$_{a=0}$类方程

$$\dot{x} = -y + \delta x + lx^2 + mxy + ny^2, \quad \dot{y} = x(1+y)。 \quad (12.30)$$

因为：1) 当 $\delta=0$ 时，(12.30)成为(12.26)，它的全局结构已在[12.35]中分析清楚了。2) $\delta$变动时不但不影响无穷远奇点的位置和性质，也不影响$\left(0, \frac{1}{n}\right)$的位置，但要影响其性质。3) $\delta$变动时，(12.30)构成被积分直线 $1+y=0$ 隔开的两个半平面中旋转方向不同的旋转向量场族，因此其中的分界线的转动方向是完全确定的。4) (12.30)的极限环的唯一性仍能得到保证。

由于文献[12.26]已有91个不同的相图，可知(12.30)必有数百个相图。

类似的方法估计也可适用于加上 $\delta x$ 项以后的方程 (12.2)、(12.3)、(12.4)、(12.5)，其中(12.2)、(12.3)、(12.4)都各有二三十个相图，而(12.5)的相图则多达上百个。由此可知加上 $\delta x$ 项以后将会得到比原来要多上两三倍的相图。当然，要把这项工作做成，是非常花时间的。

注 12.1 由[12.1] §10 知结构稳定无环的 $d(2)$ 类 $psSPF$ 的相图只有3种，而现在图12.9中除12.9(4)以外却有6个不同的相图。由此可知后者不可能都是$d(2)$类中相图的极限情况。我们猜想图12.9(6)应是一个$e(2)$类$p_1p_2p_3sS_1S_2F$的相图当$p_1\to S_1$，$p_2\to S_2$时的极限位置。例如$p_1$与$p_2$本来在$1+by=0$直线上(这里$0>-b>n$)，动力系统为

$$\dot{x} = -y + lx^2 + mxy + ny^2, \quad \dot{y} = x(1+by) \quad (0>-b>n) \quad (12.31)$$

然后令$b\to 0^+$。但在文献[12.26]中我们却找不到这样的相图。

对于具有高阶奇点的相图，如何寻找以它为极限的一切结构稳定的相图？这问题可称为“全局开折”问题，它比现在西方流行的 Bogdanov-Takens 开折是更难的问题。

最后，关于三次系统的全局拓扑结构的文章要比二次系统的

少得多，已知有：

在文献[12.41]中研究了弦三次系统，共得到38个不同的相图。在[12.42]中研究了以抛物线$y=\alpha x^2+\beta$为特解的三次系统

$$\dot{x}=-y+P_2(x,y)+P_3(x,y),\quad \dot{y}=x \tag{12.32}$$

(其中$P_i$为$i$次齐式)的相图的全局拓扑结构，得到19个相图。

[12.43]研究了当(12.32)以双曲线$x^2-ky^2=1$为特解时的全局拓扑结构，得到32个不同的相图。[12.45]研究了具椭圆特解或双曲线特解的三次系统

$$\dot{x}=P_1(x,y)+P_2(x,y)+P_3(x,y),\ \dot{y}=Q_1(x,y)+Q_2(x,y)$$

的全局结构，得到113个不同的相图。[12.44]研究了齐三次多项式系统的分类与全局相图，得到69种不同的相图，其中$P_3$与$Q_3$无公因式的有18个，有一次公因式的有33个，有二次公因式的有18个。类似的文章还有[12.48]、[12.49]、[12.50]、[12.51]、[12.52]、[12.53]、[12.54]。由于多项式系统大都为不可积，所以相图与全局拓扑结构的研究是重要的。当然，这问题的彻底解决也有待于极限环个数和相对位置问题的解决。

## 参考文献


[12.1] 叶彦谦等。极限环论。上海科学技术出版社，1982。

[12.2] 梁肇军。多项式微分系统全局分析导引，华中师大出版社，1989。

[12.3] 汪儿年。研究生毕业论文(1965，未发表)。

[12.4] 叶彦谦。$\dot{x}=-y(1+y-mx)$，$\dot{y}=x(1+ax)$的相图的全局拓扑结构。南京大学学报，1963，no.2，1～18。

[12.5] 梁肇军。(Ⅱ)$_{\delta=m=1}$类方程的全局拓扑结构与分支曲线，华中师大学报，1984，no.3，19～30。

[12.6] 梁肇军，叶彦谦。(Ⅲ)$_{\delta=n=0}$类方程的全局结构与分支曲线。工程数学学报，v.2(1985)，no.1，32～37。

[12.7] 罗定军。微分方程$\frac{dy}{dx}=\sum_{0\le i+j\le 2}q_{ij}x^iy^j/\sum_{0\le i+j\le 2}p_{ij}x^iy^j$的积分曲线的定性研究(Ⅱ)、Ⅱ类方程。南京大学学报 1963，36～50。

[12.8] 孙开浚。方程$\frac{dy}{dx}=\sum_{0\le i+j\le 2}q_{ij}x^iy^j/\sum_{0\le i+j\le 2}p_{ij}x^iy^j$之定性研究。厦门大学学报，12(1965)，no.1，35～50。

[12.9] 路钢．有三阶细焦点的二次微分系统的全局拓扑结构与分支曲线．华中师大学报,常微分方程专辑,1986, no.2, 71～96.

[12.10] Artes J C.Thesis (Univ. Auton de Barcelona, 1984).

[12.11] Dong Yuzhi、Ma Zhien and Wang Ernian. On bifurcation curves of system $(E_2^3)$ having symmetry centre, saddle points and fine focus. J.Xi'an Jiaotong Univ., 22(1988), no.1, 47～54.

[12.12] Dickson R J and Perko L M. Bounded quadratic systems in the plane, J.Diff. Eqs. 7(1970), 251～273.

[12.13] Yang Xinan.Number of limit cycles of the bounded quadratic system with two finite singular points, Chin. Ann.of Math. 4B (2), 1983, 217～225.

[12.14] Gasull A、Sheng Liren and Llibre J.Chordal quadratic systems, Rocky Mountain J.Math.16(1986), no.4, 751～782.

[12.15] 陈广卿，梁肇军．没有无穷远奇点的平面二次向量场的仿射分类与全局结构．常微分方程与控制论论文集,华中师大出版社,1988, 260～268.

[12.16] Frommer M.Über das Auftreten von Wirbeln und Strudeln in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen, Math.Annalen 109, 1934, 395～424.

[12.17] Lukashevitch N A.Integral curves of a certain differential equation, Diff. Uravn., v.1(1965), no.1, 82～95.

[12.18] Kukles I S、Khasanova M. On the behavior of characteristics of a differential equation in the Poincaré circle, Dokl. A.N.T.S.S.R. v 7(1964), no.12, 3～6.

[12.19] Li Chengzhi.Two problems of planar quadratic systems, Sci. Sinica, v.26(1983), no.5, 471～481.

[12.20] Vulpe N I. Affine invariant conditions for the topological discrimination of qudratic systems with a center, Diff. Uravn.19 (1983), no.3, 371～379.

[12.21] Lyagina L S.The integral curves of the equation $y'=(ax^2+bxy+cy^2)/(dx^2+exy+fy^2)$, Usp.Mat.Nauk, 6(1951), 171～183.

[12.22] Markus L.Quadratic differential equations and nonassociative algebras, Contr.Th.Nonl.Oscil.V, 1960, 185～213.

[12.23] Vulpe N I and Sibirskii K S. Geometric classification of quadratic systems, Diff.Uravn.13(1977), no.5, 803～814.

[12.24] Newton T A.Two dimensional homogeneous quadratic differential systems, SIAM Review.20 (1978), no.1, 120～138.

[12.25] Berlinskii A N.Qualitative study of a differential equation, Diff.Uravn. v.2 (1966), no.3, 353～360.

[12.26] dos Santos G T. Classification of generic quadratic vector

fields with no limit cycles, Lect.Notes.in Math.597(1977), 605～640.

[12.27] Shi Songling.Topological classification of generic quadratic vector fields with no limit cycles, Report at the Third National Conf. on Diff. Eqs. (1980).

[12.28] Cai Suilin.A note to the thesis"Classification of generic quadratic vector fields without limit cycles, "Zhejiang Univ. J., 1979, no. 4, 105～113.

[12.29] Cai Suilin.Qualitative analysis of a quadratic system in the large, J.Zhejiang Univ., 1979, no.4, 114～122.

[12.30] 曹贤通．关于具非粗焦点的Ⅱ类方程的定性研究．郑州大学学报，1981, no.2, 28～36.

[12.31] Coll B,Gasull A,Llibre J.Quadratic systems with a unique finite rest point, Publ.Mat., v.32(1988), 199～259.

[12.32] P.de Jager.Phase portraits of quadratic systems,Higher order singularities and separatrix cycles, Thesis Tech.Univ.Delft, 1989, 139 pp.

[12.33] Andronov A A,Leontovich E A, Gordon J J and Maier A G. Qualitative theory of second-order dynamic systems, Wiley, New York, 1973.

[12.34] Zegeling A.Limit cycles in quadratic systems, Doctoral thesis, 1991, Univ.of Tech, Delft. The Netherlands, 1～160.

[12.35] 吴荣宝，梁肇军．二次系统$(\mathrm{II})_{a=\delta=0}$的全局分析(预印本)．

[12.36] Reyn J W.Phase portraits of non degenerate quadratic systems with zero finite multiplicity, Rep.91～96, 1991, Delft Univ. of Techn.

[12.37] Artes J C and LlibreJ.Quadratic Hamiltonian Vector Fields, (Preprint 1992).

[12.38] 朱德明．结构稳定的无环二次系统的拓扑分类，南京大学学报，v.22 (1986), no.2, 263～273.

[12.39] Kooij R E and Wim T. van Horssen. Structurally stable quadratic systems without limit cycles, Rep.92～58, Delft Univ.of Techn, 1992.

[12.40] Dumortier F,Roussarie R and Rousseau C. Hilbert 16th problem for quadratic vector fields (Preprint, 1991).

[12.41] Carbonell M and Llibre J.Chordal cubic systems, Publ. Mat, v.33(1989), 253～311.

[12.42] 雷英果．一类动力系统$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{p_3(x,y)}$的全局结构．福州大学学报 1985, no.1, 24～39.

[12.43] 吴承江．一类动力系统的大范围定性研究．福州大学学报．1986, no. 1, 23～37.

[12.44] Cima A and Llibre J.Algebraic and topological classification

of the homogeneous cubic vector fields in the plane, J.Math.And.& Appl. v.147 (1990), no.2.

[12.45] Zhang Jianfeng. Limit cycles and global structure for a class of cubic systems with an invariant centred conic, Ann.of Diff. Eqs.5(2), 1989, 211～234.

[12.46] 任永泰，索光俭。有三直线解的二次系统的全局结构，东北师范大学学报，1981，no.4，1～8.

[12.47] Dumortier F and Fiddelaers P. Quadratic models for generic local 3-parameter bifurcations on the plane, Trans.AMS. 326 (1991), 101～126.

[12.48] Schlomiuk D. Algebraic particular integrals, integrability and the problem of the center(Trans.AMS, 1993).

[12.49] Yang Xin-an, Zhang Jianfeng. Classification of cubic Kolmogorov system and its opplications (Preprint, 1992).

[12.50] Reyn J W. Phase portraits on nondegenerate quadratic systems with finite multiplicity one, Res. Rep. 92～42, Delft Univ. Techn. 1992.

[12.51] Reyn J W, Huang X H. Phase portraits of a quadratic system with finite multiplicity three and one critical point at infinity, Res. Rep.93～41, (1993), Delft Univ. Techn.

[12.52] 沈伯骞。具有双曲线解的系统 $E_3^2$，南京大学学报，数学半年刊1993年增刊，117～132.

[12.53] Nikolaer I V and Vulpe N I. Topological classification of quadratic systems with a unique finite second order singularity with two zero eigenvalues, Bul.Acad. Sti.Rep.Moldova, Mat., (1993).1(11), 3～8.

[12.54] Vulpe N I and Nikolaer I V. Quadratic systems with a unique finite third order singularity and their topological classification, Preprint.

# §13. 多项式系统相图的三角剖分和基本三角形及其应用

在§1中我们曾把Poincaré的指标公式推广到区域的边界上可以有奇点以及边界本身是轨线的情况(见文献[13.1])。回忆二次系统的如下性质:

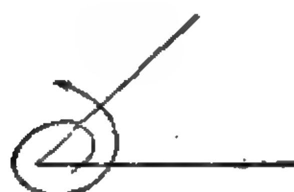
"任一直线与二次系统的轨线的切点(包括奇点在内)最多只有两个,除非此直线本身就是轨线。"我们自然会想到用若干直线段连接二次系统的有限远和无限远奇点把Poincaré半球面上的全局相图进行三角剖分[13.2],并用它来研究二次系统的全局拓扑结构问题,例如,结构稳定无环二次系统的拓扑分类问题(见[13.3] §10)。也可以用类似的方法研究$n(>2)$次多项式系统的其他定性问题。例如,当三次系统有6个指标为$+1$,3个指标为$-1$的有限远初等奇点时,那6个指标为$+1$的奇点能否都是焦点?又在§3中曾提到的,对于这种三次系统3-3+3型奇点分布的不可能性,我们也用本节的方法来加以证明。

为简单计,我们假设二次系统的奇点都是初等的,且不出现单向结点和星形结点。在施行三角剖分以后,每一个三角形的顶点都是奇点(有限远或无限远),而一切三角形的内部和边上则不再有奇点和切点了。我们称这种三角形为*基本三角形*。由§1中的分析可以看出:焦点、结点和鞍点作为某一基本三角域的边界点时,应根据不同的情况而把它看成是外切点($\nu=1, \sigma=0$),内切点($\sigma=1, \nu=0$),二重外切点($\nu=2, \sigma=0$)或普通的非切点($\sigma=\nu=0$)。其具体的图形如下(略去单向结点和星形结点)。其中$(a)$有焦点;$(b)$、$(c)$、$(d)$有鞍点;其余情况有结点。

由于每一基本三角形的三个顶点都是初等奇点，所以就有许多不同的组合，这样就可得到具有不同拓扑结构的许多基本三角形。情况如下：

如以 $F$、$N$、$S$ 分别记焦点、结点与鞍点，则有：

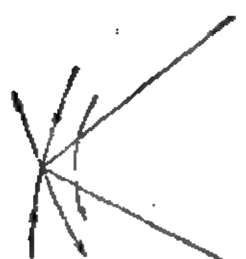
1) $F.F.F$



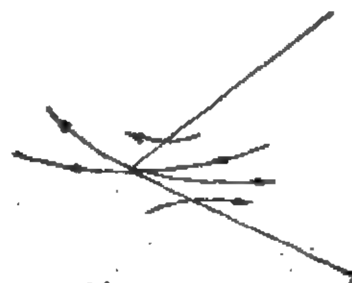
(a) $\nu=1, \sigma=0$



(b) $\sigma=0, \nu=0$



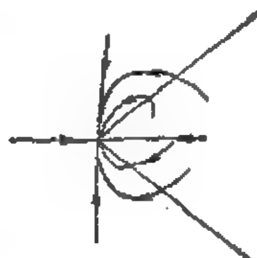
(c) $\nu=1, \sigma=0$



(d) $\sigma=1, \nu=0$



(e) $\sigma=0, \nu=2$



(f) $\sigma=\nu=0$



(g) $\sigma=0, \nu=1$



(h) $\sigma=0, \nu=1$

图 13.1

对二次系统由 Berlinskii 定理知道这种基本三角形不可能存在。对 $n\geqslant 3$ 次系统，基本三角形的三个顶点都是焦点是可能的，但必有一边上存在一个内切点，如图 13.2。若用 §1 的指标公式来算三角形内部的奇点指标(应等于零)，也可知道边上的切点应是内切点而不是外切点。

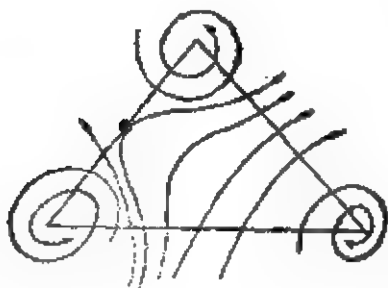


图 13.2

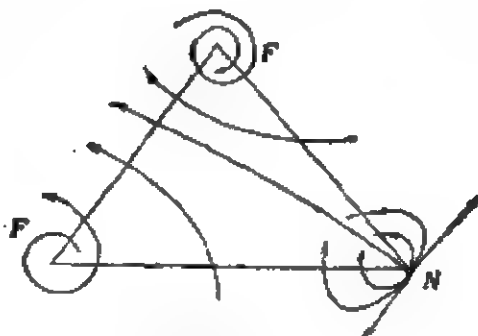



图 13.3

2) $F.F.N$

由于焦点都被看成外切点 ($\nu=1$, $\sigma=0$)，为使按指标公式算出的三角形内部的奇点指标为零，对二次系统 $N$ 只能是图13.1($f$)的情况。故有如图 13.3 所示的一种拓扑结构。但另一方面由 Berlinskii 定理知道，这种基本三角形若要存在，必须 $N$ 是无穷远奇点。

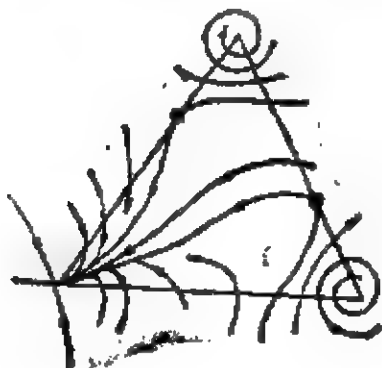


图 13.4

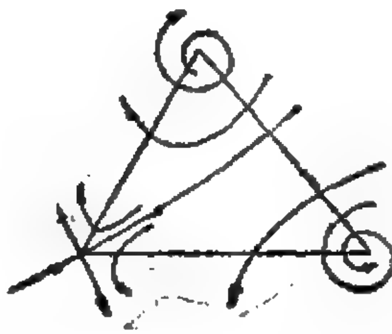


图 13.5

若是三次系统，则除图 13.3 以外，还可能出现如图 13.4 以及其他一些不同的拓扑结构。

3) $F.F.S$

与 2) 同理，对二次系统只有一种拓扑结构．如图 13.5 所示。

注意：对于焦点，我们所重视的只是螺线的定向，而与其稳定性无关。

4) $S.S.S$

可以容易地画出一个基本三角形，使其三边上不再有切点，如图 13.6，但由 Berlinskii 定理，知道它不可能是二次系统的基本三角形，除非有一个鞍点在无穷远处。

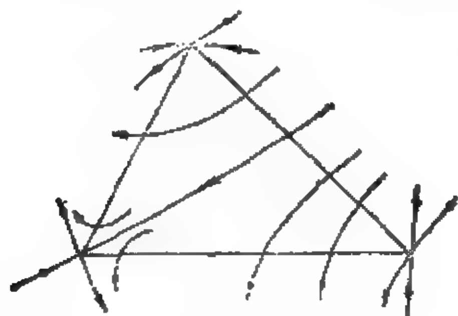


图 13.6

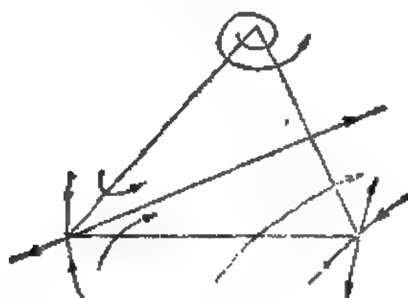
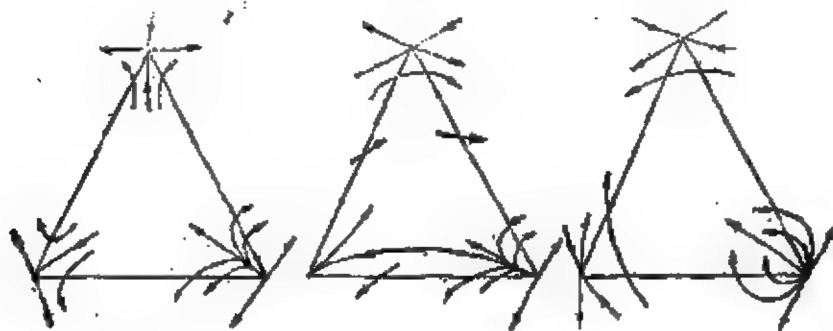


图 13.7



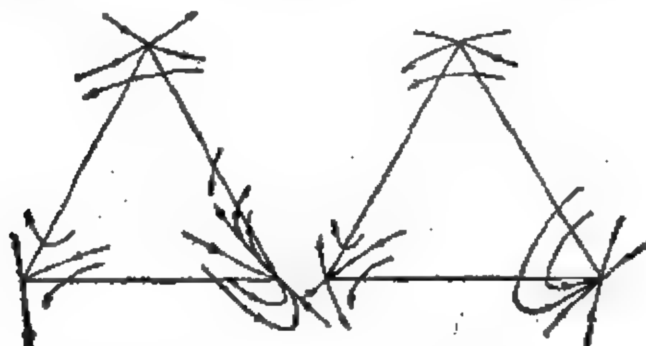




图 13.8

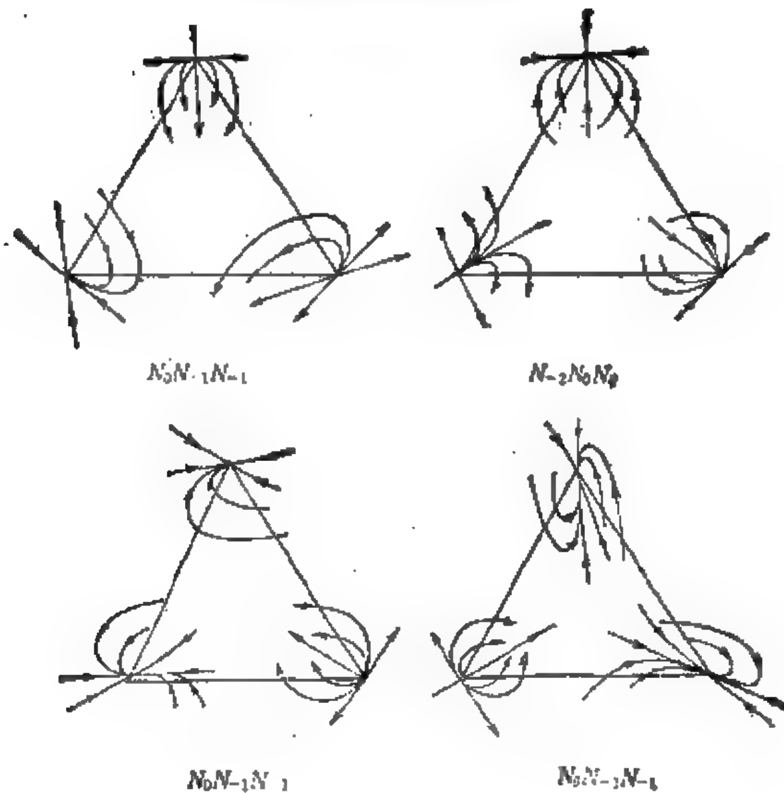



图 13.9

5) $S.S.F$

对二次系统只有一种拓扑结构，如图 13.7[1]。

6) $S.S.N$

对二次系统有五种不同的拓扑结构，如图 13.8。

7) $N.N.N$

有四种拓扑结构(图 13.9)，其中必有一$N$是无穷远奇点。

8) $N.N.F$

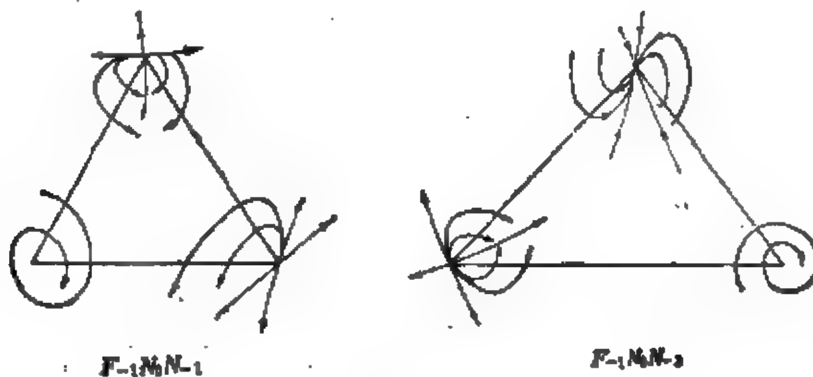


图 13.10

1) 三角形的一边是轨线时为结构不稳定，不考虑。以后仿此。

有两种拓扑结构(图 13.10)，其中必有一$N$是无穷远奇点。

9) $N.N.S$

共有八种，如图 13.11。

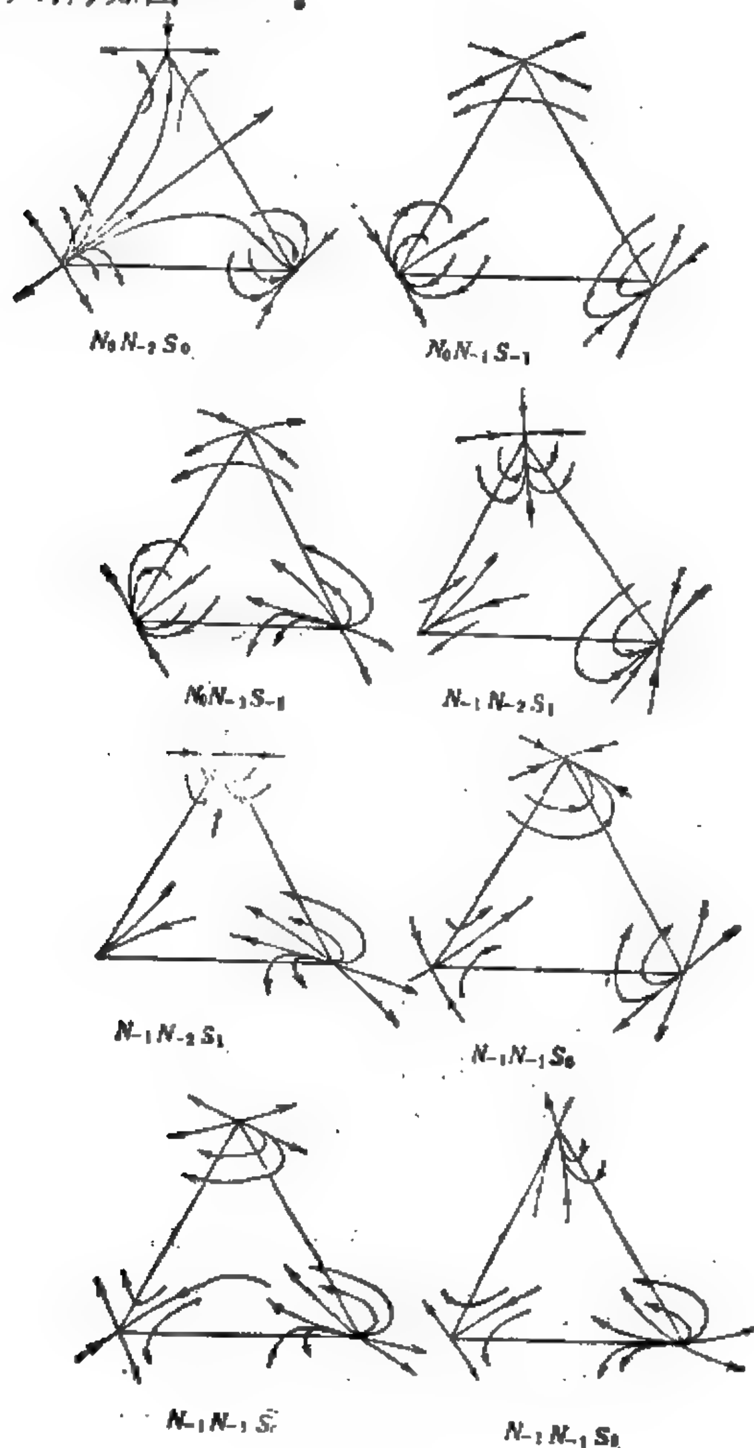


图 13.11

10) $N.F.S$

对二次系统共有四种不同的基本三角形，如图 13.12。

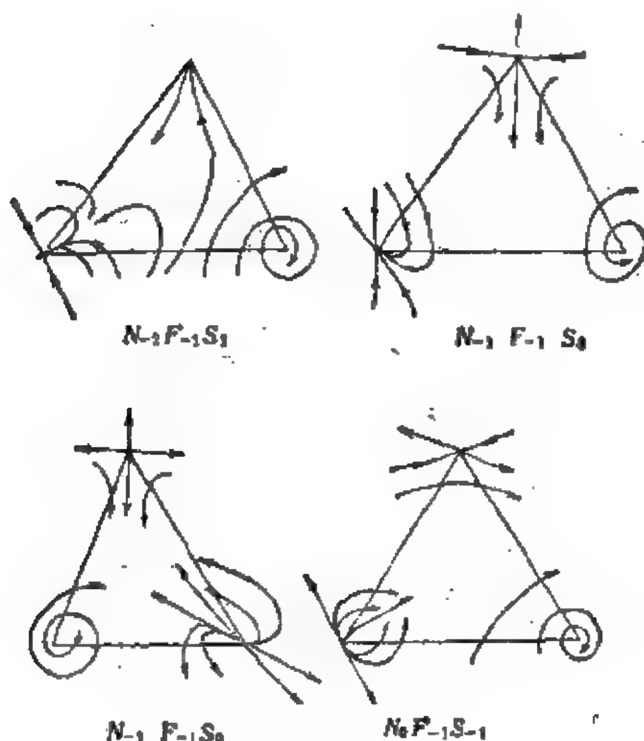



图 13.12

总结以上分析，知对二次系统，有限基本三角形(可以有一个顶点为无限远奇点)共有 27 种不同的拓扑结构。此外，还可以有 10 种一边是赤道弧的无限基本三角形，如图 13.13[1]。

然而这些基本三角形并不是可以任意组合的。一个基本三角形的拓扑结构必然会影响到它邻近的三角形的结构，因为它们有一个或两个共同的顶点。有时，由两组具有不同拓扑结构的各三个基本三角形组成两个大的三角形时，它们却可以有相同的拓扑结构。

事实上，如果考虑以三个指标为 $+1(-1)$ 的非鞍点(鞍点)为顶点且内含一个鞍点(非鞍点)的三角形，则对二次系统来说，不含赤道为边的这种三角形只有 9 种(图 13.14)[2]。

如果考虑以两个鞍点和两个非鞍点构成的凸四角形，则对二次系统来说，不含赤道为边的这种四角形只有10种(图13.15)。

---

1) 后来发现还遗漏了几种，请读者补上(作者注)。

2) 后来发现还遗漏了一种(三结一鞍)，请读者补上。

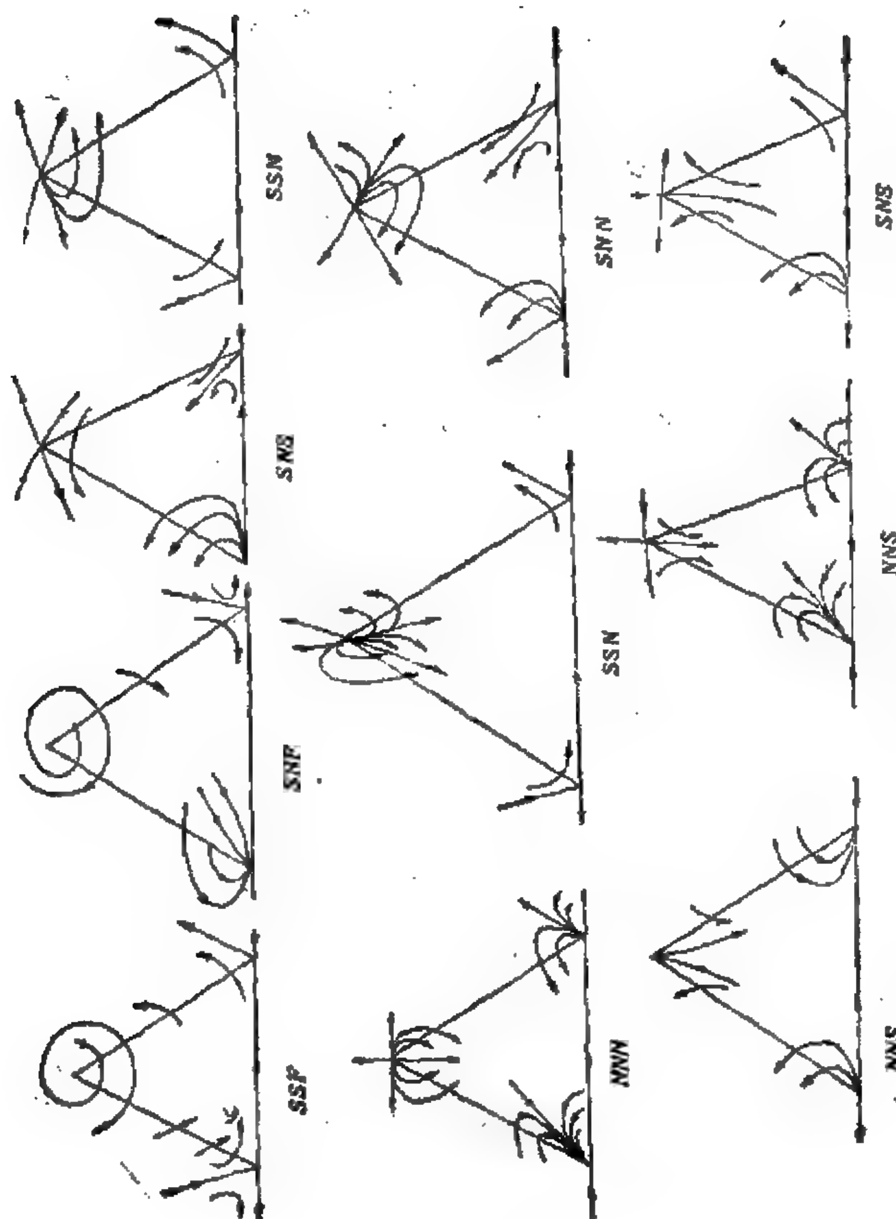



图 13.13

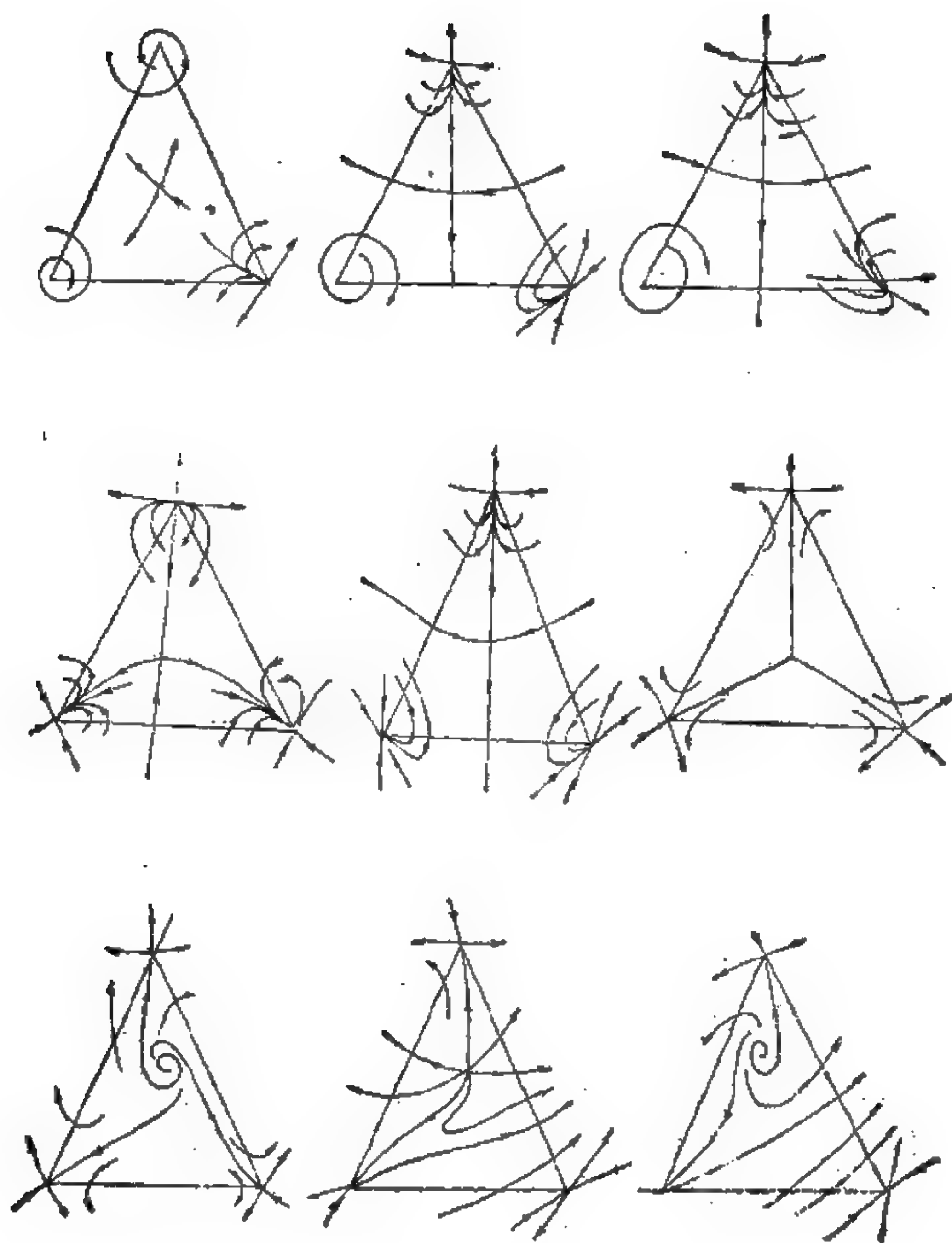


图 13.14

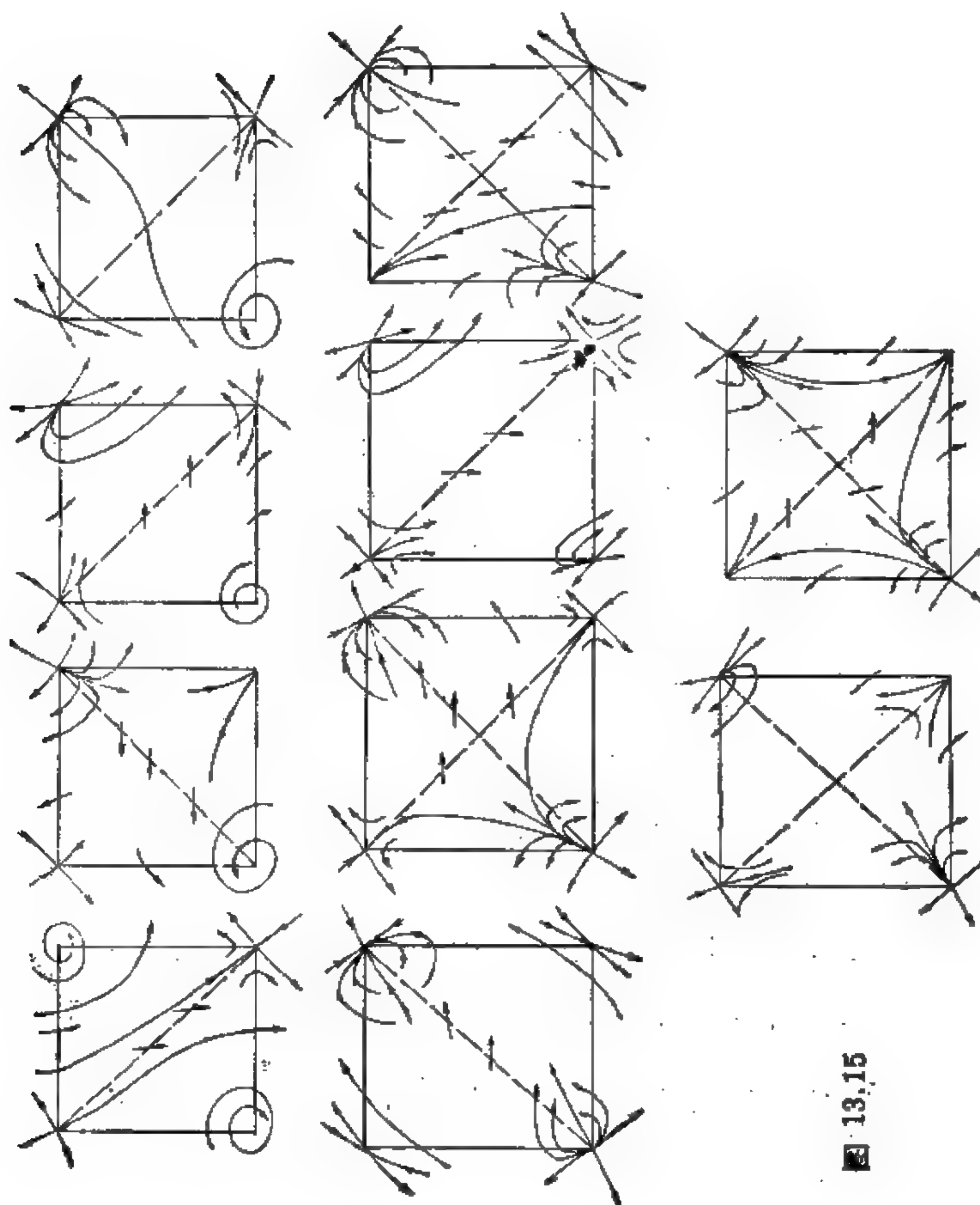


图 13.15

注意：下列两图(图 13.16) 对二次系统不可能出现，因为对角线上将出现切点。

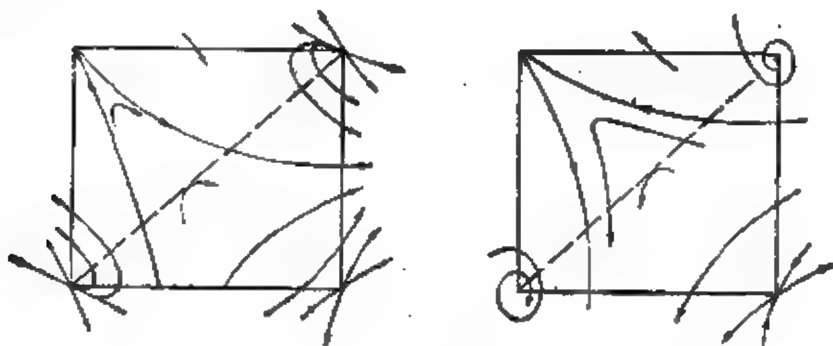


图 13.16

我们猜想：对于结构稳定无环二次系统，知道图 13.14 的一个大三角形或图 13.15 中的一个四角形内的拓扑结构，再知道图 13.13 中的一个以赤道弧为一边的无限大三角形内的拓扑结构，则此二次系统的全局结构就可完全确定了。

下面对有两个焦点，一个结点和一个鞍点的二次系统作一全局结构分析，由此读者可以看出指标公式和基本三角形对于确定全局图形有时比分析方法更为奏效。

考虑以 $O(0,\ 0)$、$B_1(1,\ 0)$、$B_2(\alpha,\ \beta)$、$B_3(0,\ 1)$ 为奇点的二次系统：

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= p_1x(x-1)+p_2y(y-1)+\left[\frac{1-\alpha}{\beta}p_1+\frac{1-\beta}{\alpha}p_2\right]xy \\
&= p_1xV+p_2yU, \\
\dot{y} &= q_1x(x-1)+q_2y(y-1)+\left[\frac{1-\alpha}{\beta}q_1+\frac{1-\beta}{\alpha}q_2\right]xy \\
&= q_1xV+q_2yU. 
\end{aligned}
\tag{13.1}
$$

其中

$$
\begin{gathered}
\alpha>0,\ \beta>0,\ 1-\alpha-\beta>0,\ U=y-1+\frac{1-\beta}{\alpha}x, \\
V=x-1+\frac{1-\alpha}{\beta}y.
\end{gathered}
\tag{13.2}
$$

则易见 $B_2(\alpha,\ \beta)$ 应位于 $\triangle OB_1B_3$ 内部。这里 $U=0$ 与 $V=0$

分别是直线 $\overline{B_2B_3}$ 与 $\overline{B_1B_2}$ 的方程。再记

$$p_3=\frac{1-\alpha}{\beta}p_1+\frac{1-\beta}{\alpha}p_2,\quad q_3=\frac{1-\alpha}{\beta}q_1+\frac{1-\beta}{\alpha}q_2,\tag{13.3}$$

$$\mu_1=q_2p_3-p_2q_3,\quad \mu_2=p_1q_3-q_1p_3,\quad \mu_3=p_1q_2-q_1p_2.\tag{13.4}$$

则由此可算出：

$$\begin{aligned}\frac{\mu_1}{\mu_3}&=\frac{q_2p_3-p_2q_3}{p_1q_2-q_1p_2}=\frac{1-\alpha}{\beta}>1,\\ \frac{\mu_2}{\mu_3}&=\frac{q_3p_1-p_3q_1}{q_2p_1-p_2q_1}=\frac{1-\beta}{\alpha}>1.\end{aligned}\tag{13.5}$$

从而

$$\alpha=\frac{\mu_3(\mu_3-\mu_1)}{\mu_3^2-\mu_1\mu_2},\quad \beta=\frac{\mu_3(\mu_3-\mu_2)}{\mu_3^2-\mu_1\mu_2}.\tag{13.6}$$

由 (13.1) 式看出：若 $p_2=0$，则 $x=0$ 是过 $O$ 与 $B_3$ 的积分直线。我们不考虑这种很特殊的二次系统。当 $p_2\neq 0$ 时，不妨设

$$p_2<0.\tag{13.7}$$

它确定了 $y$ 轴上除 $O$ 与 $B_3$ 以外各点的轨线穿过的方向。

容易算出 $O$ 点的特征方程为：

$$\lambda^2+(p_1+q_2)\lambda+p_1q_2-q_1p_2=0.\tag{13.8}$$

今设

$$\mu_3=p_1q_2-q_1p_2>0.\tag{13.9}$$

则 $O$ 有指标 $+1$ 由(13.5)及(13.9)看出：

$$\mu_1>\mu_3>0\ 或\ \mu_1-\mu_3>0,\ \mu_2>\mu_3>0\ 或\ \mu_2-\mu_3>0\tag{13.10}$$

以及(由(13.6))

$$\mu_3^2-\mu_1\mu_2<0.\tag{13.11}$$

现在再设 $O$ 为焦点，则由(13.8)知道应有：

$$(p_1-q_2)^2+4q_1p_2<0.\tag{13.12}$$

于是由(13.7)可推出

$$q_1>0.\tag{13.13}$$

再计算 $B_3$ 的特征方程，得：

$$\lambda^2+(p_1-p_3-q_2)\lambda+q_2(p_3-p_1)-p_2(q_3-q_1)=0.\tag{13.14}$$

由(13.10)知有：

$$q_2(p_3-p_1)-p_2(q_3-q_1)=\mu_1-\mu_3>0,$$

即 $B_3$ 的指标亦为 $+1$。同样，$B_1$ 的特征方程为

$$\lambda^2-(p_1+q_3-q_2)\lambda+p_1(q_3-q_2)-q_1(p_3-p_2)=0。\quad(13.15)$$

由(13.10)也可推出

$$p_1(q_3-q_2)-q_1(p_3-p_2)=\mu_2-\mu_3>0。$$

即 $B_1$ 的指标亦为 $+1$。于是第四个奇点 $B_2$ 必有指标 $-1$。否则，若四个有限远奇点都有指标 $+1$，但三个无穷远奇点不可能都是指标 $-1$，则奇点的指标总和将大于 1，这不可能。以上所得到的结果也就给 Berlinskii 定理的一半以另一个证明。

现在再设 $B_3$ 为焦点，则由(13.14)知有：

$$(p_1-p_3+q_2)^2+4p_2(q_3-q_1)<0。\quad(13.16)$$

从而

$$q_3-q_1>0,\ 即\ q_3>q_1>0。\quad(13.17)$$

注意：由以上这些假定我们只知道 $B_2$ 是鞍点，$O$ 与 $B_3$ 是焦点，但它们的稳定性都未确定。即存在四种可能性，视 $p_1+q_2$ 与 $p_1-p_3-q_2$ 的符号而定。至于 $B_1$，已知它必定是结点（因为二次系统不可能有三个焦点），但现在还可证明更进一步的结果。

**定理 13.1** $B_1$ 必为不稳定结点，从它出发有无数条轨线先进入，然后又离开 $\triangle OB_1B_3$。

**证** 由(13.3)式有：

$$\begin{aligned}p_1-p_3+q_2&=p_1-\frac{1-\alpha}{\beta}p_1-\frac{1-\beta}{\alpha}p_2+q_2\\&=q_2+\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}p_1-\frac{1-\beta}{\alpha}p_2,\\q_3-q_1&=\frac{1-\alpha}{\beta}q_1+\frac{1-\beta}{\alpha}q_2-q_1\\&=\frac{1-\alpha-\beta}{\beta}q_1+\frac{1-\beta}{\alpha}q_2。\end{aligned}$$

代入(13.16)式得：

$$(p_1-p_3+q_2)^2+4p_2(q_3-q_1)=\left(q_2+\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}p_1+\frac{1-\beta}{\alpha}p_2\right)^2$$

$$+4\frac{1-\alpha-\beta}{\beta}p_2\left(q_1+\frac{1-\beta}{\alpha}p_1\right)<0.$$

于是必有

$$q_1+\frac{1-\beta}{\alpha}p_1>0. \tag{13.18}$$

注意：$\frac{1-\beta}{\alpha}>1$, $q_1>0$, 可知不论 $p_1$ 是正还是负，都有：

$$q_1+p_1>0, \quad \text{从而 } q_3+p_1>0. \tag{13.19}$$

现在不难证明 $p_1+q_3-q_2>0$。因若 $q_2<0$, 则由 (13.19) 立刻得到 $p_1+q_3-q_2>0$, 若 $q_2>0$, 则

$$\begin{aligned}p_1+q_3-q_2&=p_1+\frac{1-\alpha}{\beta}q_1+\frac{1-\beta}{\alpha}q_2-q_2\\&=p_1+\frac{1-\alpha}{\beta}q_1+\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha}q_2\\&>p_1+\frac{1-\alpha}{\beta}q_1>p_1+q_1>0.\end{aligned}$$

即 $B_1$ 是不稳定结点。再注意出 $O$ 与 $B_3$ 邻近螺线的旋转方向，可知轨线从 $B_1$ 出发跑进三角形内之后应再从 $\overline{OB_1}$ 与 $B_1B_3$ 两边跑出，这只有当 $B_1$ 处的两个特征方向如图 13.17 所示，才是可能的。事实上，由文献[13.1]中的指标公式，注意到 $\triangle OB_1B_3$ 内部有一鞍点 $B_2$, 可以立刻看出 $B_1$ 应被看成三角形边界上的二重外切点，即它对于三角形应如图 13.1(e) 所示才行。

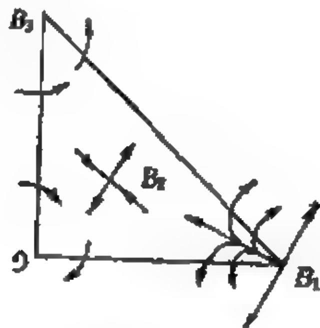



图 13.17

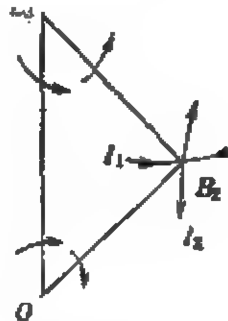



图 13.18

**推论 13.1**　在 $p_2<0$, 条件 (13.2) 以及 $O$ 为焦点的假定下，若 $B_1$ 为稳定结点，则 $B_3$ 亦必为结点。

**注 13.1**　当 $O$ 与 $B_3$ 为焦点时，若改条件(13.7)为 $p_2>0$, 则

如定理 13.1 一样,可证 $B_1$ 必为稳定结点。

注 13.2 在与定理 13.1 相同的假设条件下，由指标公式可知过鞍点 $B_2$ 的四条分界线中有一条在 $\triangle OB_2B_3$ 内部，而另三条则在外部(图 13.18)。因为只有这样按指标公式算出的 $\triangle OB_2B_3$ 内部的奇点指标之和才为零。

至于 $B_2$ 处的分界线有一条还是两条在 $\triangle OB_1B_2$ 内部，则暂时还不能确定，见图 13.19 与图 13.20。估计两种可能性都存在。不论如何，它们所确定的 $\triangle OB_1B_3$ 内部轨线的拓扑结构是相同的(图 13.21)，因为过 $B_2$ 的四条分界线的来龙去脉都已完全确定了。

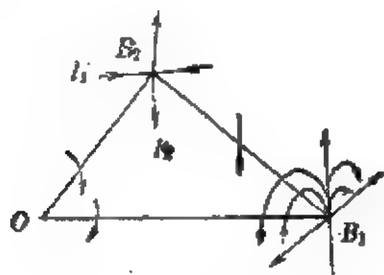



图 13.19

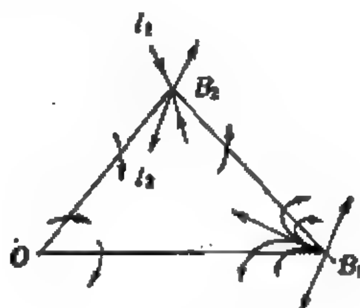



图 13.20

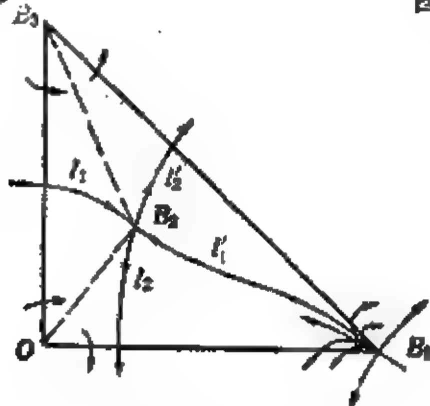



图 13.21

下面再看无穷远奇点和 $\triangle OB_1B_3$ 外部轨线的拓扑结构。把(13.1)化到齐次坐标,得:

$$\begin{cases} z\dot{x} - x\dot{z} = -p_1xz + p_1x^2 - p_2yz + p_2y^2 + p_3xy, \\ z\dot{y} - y\dot{z} = -q_1xz + q_1x^2 - q_2yz + q_2y^2 + q_3xy. \end{cases} \quad (13.20)$$

令 $x=1$, $\dfrac{dt}{d\tau}=z$, 得到:

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{d\tau}=z(p_1z-p_1+p_2yz-p_2y^2-p_3y)=R(y,z),\\ \dfrac{dy}{d\tau}=q_1+(q_3-p_1)y+(q_2-p_3)y^2-p_2y^3\\ \qquad +z(-q_1+p_1y-q_2y+p_2y^2)=S(y,z)。\end{cases}\tag{13.21}$$

故无穷远奇点 $A_i(1, y_i, 0)$ 的 $y$ 坐标满足方程：

$$f(y)=p_2y^3+(p_3-q_2)y^2+(p_1-q_3)y-q_1=0。\tag{13.22}$$

由 $p_2<0$, $q_1>0$ 可知 $f(y)=0$ 或只有一负根，或有一负根和两个正根。(13.22)有三个实根的充要条件是：

$$4p_2(p_1-q_3)^3-(p_1-q_3)^2(p_3-q_2)^2-4q_1(p_3-q_2)^3+27q_1^2p_2^2$$
$$-18q_1p_2(q_3-p_1)(p_3-q_2)<0。\tag{13.23}$$

可以举例说明：在前述诸条件下，方程(13.22)既可能只有一个负根，也可能有三个实根，此处从略，见文献[13.2]。

今设(13.1)有三个无穷远奇点 $A_i(1, y_i, 0)$ $(i=1, 2, 3)$，且

$$y_1>y_2>0>y_3。$$

记

$$g(y)=p_2y^2+p_3y+p_1。\tag{13.24}$$

由(13.21)易证在 $A_i(1, y_i, 0)$ 的两特征根为：

$$\begin{cases}\lambda_1^{(i)}=-p_1-p_3y_i-p_2y_i^2=-g(y_i)\\ \lambda_2^{(i)}=(q_3-p_1)+2(q_2-p_3)y_i-3p_2y_i^2=-f'(y_i)\end{cases}$$
$$(i=1, 2, 3)。\tag{13.25}$$

已知 $f(0)=-q_1<0$。有如下定理：

**定理 13.2** $f(-1)>0$。

**证** 由(13.16)与(13.17)有 $(p_1-p_3+q_2)^2<-4p_2(q_3-q_1)$，从而

$$|p_1-p_3+q_2|<2\sqrt{p_2(q_1-q_3)},\tag{13.26}$$

今若 $p_1-p_3+q_2\leqslant 0$, 则 $p_3-p_1-q_2\geqslant 0$, 从而

$$f(-1)=p_3-p_1-p_2+q_3-q_1-q_2$$
$$=-p_2+(q_3-q_1)+(p_3-p_1-q_2)>0。$$

若 $p_1-p_3+q_2>0$, 则(13.26)可改写为：

$$0<p_1-p_3+q_2<2\sqrt{p_2(q_1-q_3)},$$

而

$$\begin{aligned}f(-1)&=-p_2+(q_3-q_1)-(p_1-p_3+q_2)\\&>-p_2+q_3-q_1-2\sqrt{p_2(q_1-q_3)}\\&=(\sqrt{-p_2}-\sqrt{q_3-q_1})^2\geq0.\end{aligned}$$

定理证毕。∎

由此可知 $-1<y_3<0$，即 $A_3(1, y_3, 0)$ 位于赤道上介于直线 $x+y=1$ 与 $x$ 轴之间第四象限中的弧段上。而当 $A_1$、$A_2$ 存在时，它们应位于第一象限中的赤道弧上。又由奇点指标之和为 $+1$ 的事实知，在 $A_1$、$A_2$、$A_3$ 中应有两个是鞍点，一个是结点。这样就可画出图 13.22[1]。其中已用虚线段连接相邻的奇点，并已把 Poincaré 半球面分成 12 个基本三角形。此外，由 $\triangle B_1MN$ 两边 $\overline{B_1M}$ 与 $\overline{B_1N}$ 上轨线的方向立刻可以看出 $A_3$ 应是鞍点，且应位于 $M$ 与 $N$ 之间，与定理 13.2 的结论符合。又在图 13.22 中我们已假设 $A_1$ 是鞍点，$A_2$ 是结点，但另一种可能性也是存在的。

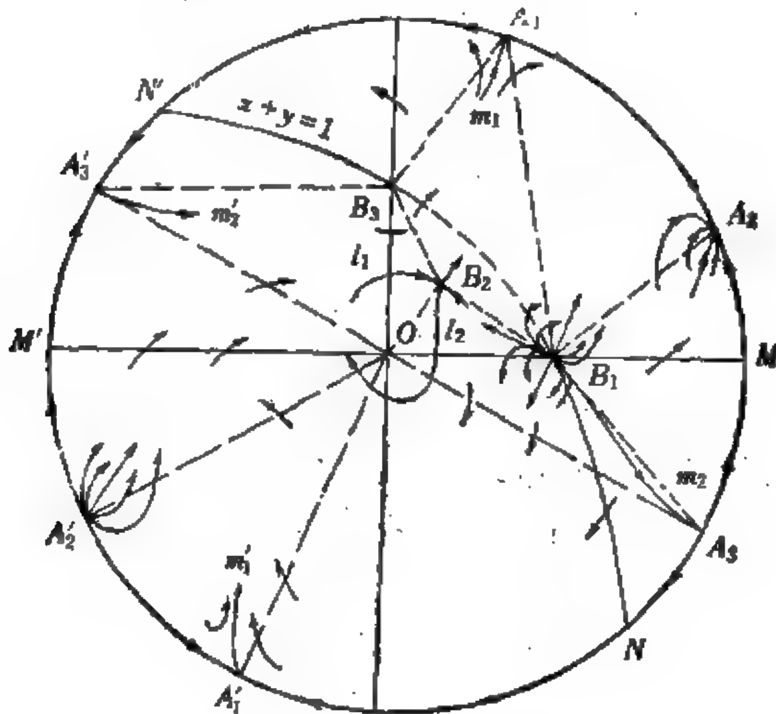



图 13.22

1) 分界线 $m_1$、$m_2$ 的来路和 $m_1'$、$m_2'$ 的去向可以由相应的基本三角形用指标公式确定。

**注 13.3** 由 $f(-1)>0$ 得 $q_3-q_2-p_1>p_2+q_1-p_3$。今若 $q_1+p_2-p_3\geqslant 0$，则 $(q_3-q_2-p_1)^2>(q_1+p_2-p_3)^2$，从而

$$
\begin{aligned}
&(p_1+q_3-q_2)^2-4p_1(q_3-q_2)+4q_1(p_3-p_2)\\
&=(q_3-p_1-q_2)^2+4q_1(p_3-p_2)\\
&>(q_1+p_2-p_3)^2+4q_1(p_3-p_2)\\
&=(q_1+p_3-p_2)^2\geqslant 0,
\end{aligned}
\tag{13.27}
$$

若 $q_1+p_2-p_3<0$，则 $p_3-p_2>q_1>0$，上述结果仍成立。(13.27)式说明了 $B_1$ 为正常结点，有两个不同的特征方向。

为了确定(13.1)的全局结构，还必须知道 $O$ 和 $B_3$ 的稳定性。它们分别由 $p_1+q_2$ 与 $p_1-p_3-q_2$ 的符号来确定，故共有四种可能(只考虑粗焦点)：

I) $O$ 稳定：$p_1+q_2>0$；　$B_3$ 稳定：$p_1-p_3-q_2>0$；

II) $O$ 稳定：$p_1+q_2>0$；　$B_3$ 不稳定：$p_1-p_3-q_2<0$；

III) $O$ 不稳定：$p_1+q_2<0$；　$B_3$ 稳定：$p_1-p_3-q_2>0$；

IV) $O$ 不稳定：$p_1+q_2<0$；　$B_3$ 不稳定：$p_1-p_3-q_2<0$。

根据这些可能性，再假设(13.1)不存在极限环。并注意 $m_1$ 仍可能有不同的来路，$m_1'$ 与 $m_2'$ 仍可能有不同的去向，即可看出在图 13.22 中可能出现 13 种不同的全局拓扑结构图，但在这里我们对焦点和结点加以区分。按照文献[13.3]§10的记法，这13种情况是：

1) $B_2(O,\ A_2,\ A_2',\ B_1)$，$A_1(O,\ A_2')$，$A_3(B_3,\ B_1)$；

2) $B_2(O,\ B_3,\ A_2',\ B_1)$，$A_1(O,\ B_1)$，$A_3(B_3,\ B_1)$；　(13.28)

3) $B_2(O,\ B_3,\ B_1,\ B_1)$，$A_1(B_3,\ B_1)$，$A_3(B_3,\ B_1)$；

4) $B_2(O,A_2,\ B_1,\ B_1)$，$A_1(B_3,\ B_1)$，$A_3(B_3,\ B_1)$；

5) $B_2(O,A_2,\ B_1,\ B_1)$，$A_1(A_2,\ A_2')$，$A_3(B_3,\ B_1)$；

6) $B_2(O,\ A_2,\ B_1,\ B_1)$，$A_1(A_2,\ B_3)$，$A_3(A_2,\ B_1)$；

7) $B_2(O,\ A_2,\ A_2',\ B_1)$，$A_1(O,\ B_3)$，$A_3(A_2,\ B_1)$；

8) $B_2(A_2,\ A_2,\ O,\ B_1)$，$A_1(A_2,\ A_2')$，$A_3(B_3,\ B_1)$；

9) $B_2(A_2,\ A_2,\ O,\ B_1)$，$A_1(B_3,\ B_1)$，$A_3(B_3,\ B_1)$；

10) $B_2(A_2,\ B_3,\ O,\ B_1)$，$A_1(B_3,\ O)$，$A_3(B_3,\ B_1)$；

11) $B_2(B_3,\ B_3,\ O,\ B_1)$，$A_1(B_3,\ B_1)$，$A_3(B_3,\ B_1)$；

12) $B_2(A_2, A_2, O, B_1)$, $A_1(A_2, B_3)$, $A_3(A_2, B_1)$;

13) $B_2(O, A_2, B_1, B_3)$, $A_1(O, B_3)$, $A_3(O, B_1)$。

另一方面，对于方程(13.1)，$A_2^*(1, y_1, 0)$为结点，$A_1^*(1, y_2, 0)$为鞍点$(y_1>y_2>0)$也是可能的(但待举出具体的数字例子)。这时如果再假定不存在极限环，那末只有三种不同的拓扑结构如下：

14) $B_2(O, B_3, B_1, B_1)$, $A_1^*(B_3, B_1)$, $A_3^*(B_3, B_1)$;

15) $B_2(B_3, B_3, O, B_1)$, $A_1^*(B_3, B_1)$, $A_3^*(B_3, B_1)$;　(13.29)

16) $B_2(B_3, A_2'^*, O, B_1)$, $A_1^*(B_3, O)$, $A_3^*(B_3, B_1)$。

注意：在(13.28)中$A_i=A_i'(i=1, 2, 3)$，又如果不区别焦点与结点，则$O$, $B_1$, $B_3$三者可以互换，又$A_1$与$A_3$也可互换。于是情况1)与7)；2)、10)与13)；3)与11)分别有相同的拓扑结构。又在(13.29)中$A_i^*=A_i'^*(i=1, 2, 3)$，$A_1^*$与(13.28)中的$A_1$亦可互换，因此情况15)、14)都和11)等价，情况16)则与情况10)等价。

这样，按照[13.3]§10的分类，即不区分焦点与结点，以及无穷远奇点在赤道上的相对位置，(13.28)与(13.29)中一共只有9种不同的拓扑结构，这和[13.3]§10中肯定$e(2)$类$p_1p_2p_3sS_1S_2F$型奇点分布最多只有9种不同的拓扑结构图的结论是一致的。

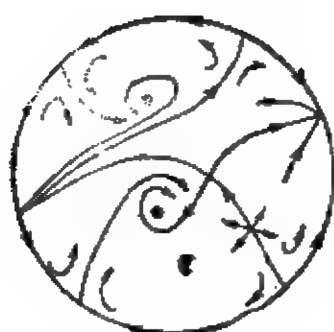
因此，只要能证明：1), 2), 3), 4), 5), 6), 8), 9), 12)都可被方程(13.1)实现，那末我们就完全解决了具有$p_1p_2p_3sS_1S_2F$型奇点分布的结构稳定无环二次系统的拓扑分类问题。

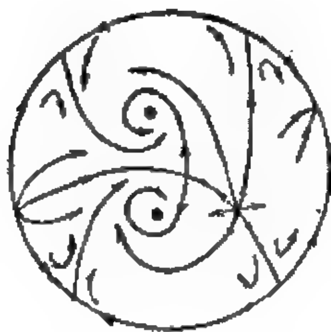
注意：在1), 2), 3), 4), 5)等五个图中(见图13.23) $O$与$B_3$都是稳定的，在8)、9)中$O$为不稳定的，$B_3$为稳定的，在6)中$O$为稳定的，$B_3$为不稳定的，在12)中$O$与$B_3$都是不稳定的。猜想不难找出四个不同系数的方程(13.1)，使$O$与$B_3$具有上述四种不同稳定性的组合($B_1$常为不稳定)。然后施行适当的向量场旋转，使由(例如)1)可得到2), 3), 4), 5)，由8)可得到9)[1]。

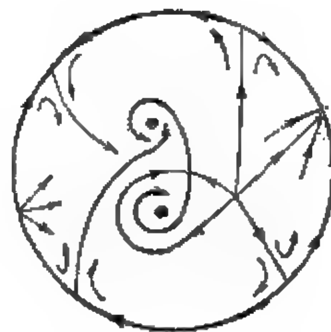
对于文献[13.3] §10的$d(3)$类也可以用本节的方法去做，这里从略。

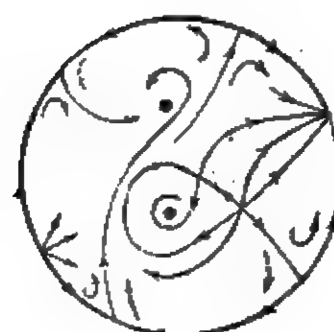
现在转到三次系统，在§3中我们已证明：当三次系统有6个

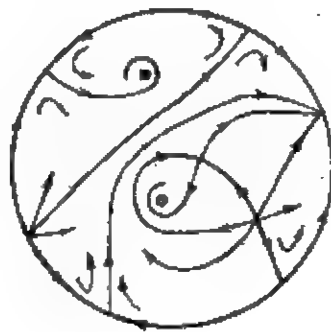
1) §12中(12.28)式中尚未解决的两个$e(2)$类即图13.23中的图4)与9)。

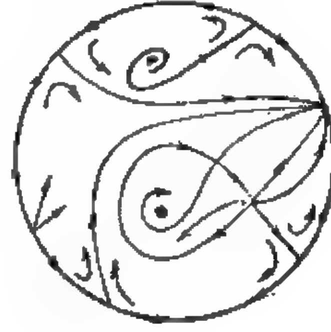

(1)

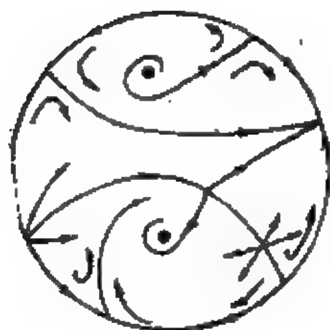

(2)


(3)


(4)


(5)

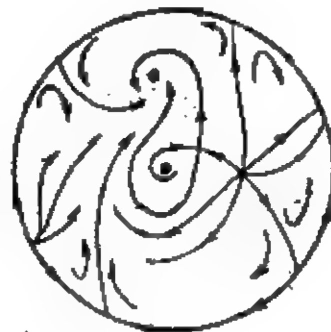

(6)

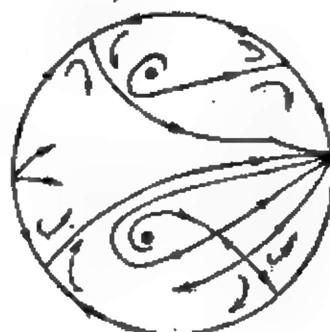

(7)

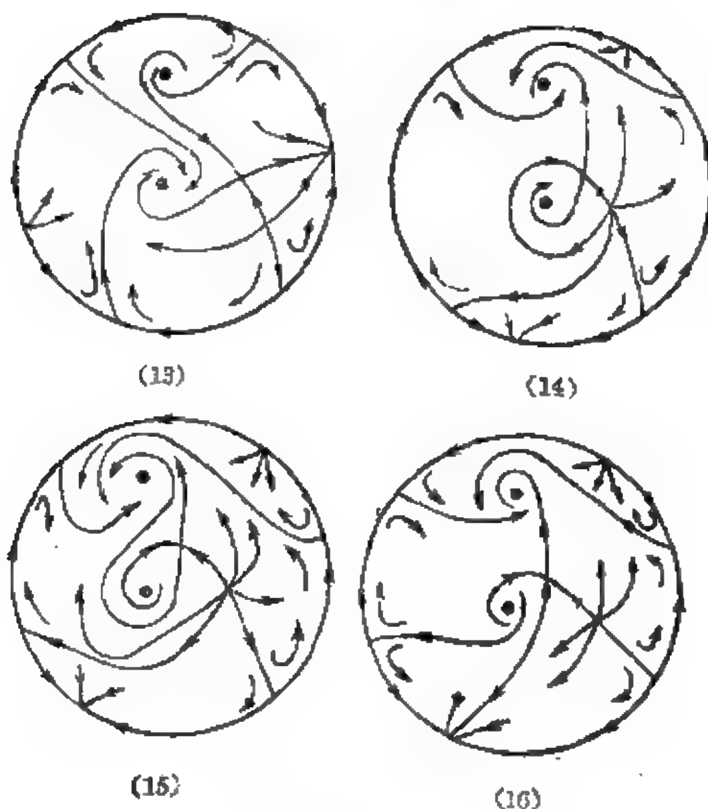

(8)


(9)


(10)


(11)


(12)



(13) (14)

(15) (16)

图 13.23

指标为 $+1$，三个指标为 $-1$ 的奇点时 $5-3+1$ 型和 $6-3$、$4-3+2$ 型的奇点构型都是可以存在的。剩下一个问题是：$3-3+3$ 型是否可能？我们要用基本三角形和指标公式来证明它是不可能的。为此首先要证明：当三次系统有 6 个指标为 $+1$，三个指标为 $-1$ 的奇点时，这三个鞍点不可能位于同一直线上。

假设不然，不妨设这个三次系统在 $y=0$ 上有三个鞍点 $O(0,0)$、$A(-1,0)$ 与 $B(1,0)$。于是这系统可以写成：

$$\begin{cases}\dot{x}=ax(1-x^2)+y(c_1+c_2x+c_3x^2)+y^2(\alpha x+\beta y+\gamma),\\ \dot{y}=bx(1-x^2)+y(d_1+d_2x+d_3x^2)+y^2(\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1).\end{cases}\tag{13.30}$$

其中 $|a|+|b|\neq0$。先看 $b=0$、$a\neq0$ 的情况。这时可设 $a=1$。由 $O$、$A$、$B$ 是鞍点的条件，容易得出不等式：

$$d_1<0,\quad d_3>-d_1>0。\tag{13.31}$$

于是方程

$$f(x)=d_1+d_2x+d_3x^2=0$$

有两个异号实根：$x_1<0<x_2$。由于$O$、$A$、$B$都在$y=0$上，而$Q_3(x, y)=0$的另一支$Q^*$为

$$d_1+d_2x+d_3x^2+y(\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1)=0,$$

与$y=0$相交于$C(x_1, 0)$与$D(x_2, 0)$，故必$-1<x_1$，$x_2<1$。否则，$O$与$A$，$O$与$B$不可能有相同的指标。

$Q^*$是双曲线，故有两种可能情况：

1) $C$与$D$在$Q^*$的同一支上，如图13.24所示。为使在9个奇点中有尽可能多的指标为$+1$的奇点，我们可以取$P=0$的三支像图13.24中所画的那样，但这样得到的另外6个奇点$R_1, R_2, \cdots, R_6$中仍有一个$R_5$是指标为$-1$的[1]。这说明：若三次系统$(13.30)_{b=0}$有三个指标为$-1$的奇点位于同一直线上，则它必定存在第四个指标为$-1$的奇点。

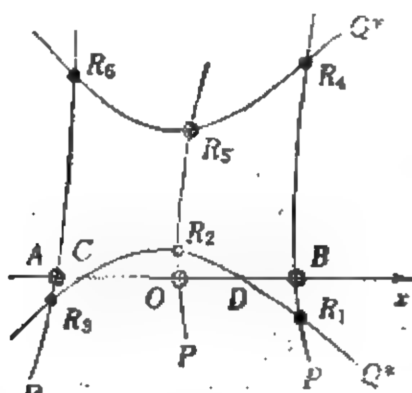



图 13.24

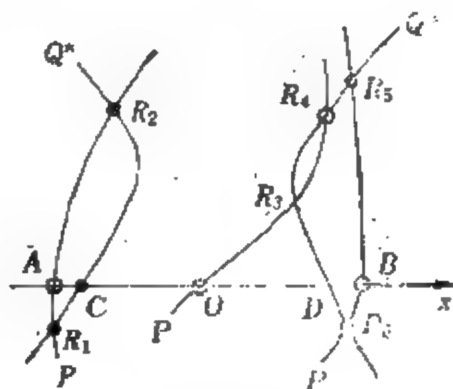



图 13.25

2) $C$与$D$在$Q^*$的不同分支上，如图13.25所示。这时在另外6个奇点$R_1, R_2, \cdots, R_6$中仍有一个$R_4$是指标为$-1$的（若$R_4$在$R_5$的右上方$Q^*$上，则$R_5$有指标为$-1$）。

显见$a=0$而$b\neq0$时的证明是一样的。

今设$ab\neq0$，不妨设$a=b=1$，则可借变换

$$x=y+z,\quad y=y$$

把方程(13.30)变为：

1) 在图13.24与13.25中，指标为$+1$的奇点用实心黑点表示，指标为$-1$的奇点用空心小圆表示。

$$\begin{aligned}\dot{z} &= y[(c_1-d_1)+(c_2-d_2)(y+z)+(c_3-d_3)(y+z)^2] \\ &\quad +y^2[\varepsilon+\eta y+\xi(y+z)],\\ \dot{y} &= (y+z)[1-(y+z)^2]+y[d_1+d_2(y+z)+d_3(y+z)^2] \\ &\quad +y^2[\alpha_1(y+z)+\beta_1 y+\gamma_1],\end{aligned} \tag{13.32}$$

这时$O$、$A$、$B$的坐标仍为$O(0, 0)$，$A(-1, 0)$，$B(1, 0)$。且由它们都是鞍点的事实，可以导出不等式：

$$c_3-d_3<d_1-c_1<0. \tag{13.33}$$

现在(13.32)的第一方程右方的轨迹是$y=0$和

$$\begin{aligned}&(c_1-d_1)+(c_2-d_2)(y+z)+(c_3-d_3)(y+z)^2 \\ &\quad +y[\varepsilon+\eta y+\xi(y+z)]=0.\end{aligned} \tag{13.34}$$

由(13.33)知(13.34)与$y=0$的两交点$C^*(z_1, 0)$、$D^*(z_2, 0)$的横坐标仍满足不等式：

$$-1<z_1<0<z_2<1.$$

故以后的证明便和$b=0$时一样。

从而得到以下定理：

**定理 13.3** 当一个三次系统有6个指标为$+1$的奇点和3个指标为$-1$的奇点时，这3个指标为$-1$的奇点不可能在同一直线上。

这一定理在文献[13.4]中还有其他的证法。

根据定理13.3，不妨设三次系统的三个指标为$-1$的奇点是$O(0, 0)$、$A_1(1, 0)$和$A_2(0, 1)$，则它的方程可以写成：

$$\begin{cases}\dot{x}=a_1x(1-x)+a_2x^2(1-x)+a_3y(1-y)+a_4y^2(1-y) \\ \qquad +a_5xy(1+\alpha_1x+\beta_1y),\\ \dot{y}=b_1x(1-x)+b_2x^2(1-x)+b_3y(1-y)+b_4y^2(1-y) \\ \qquad +b_5xy(1+\alpha_2x+\beta_2y).\end{cases} \tag{13.35}$$

由于已设$O$、$A_1$、$A_2$是鞍点，故可导出不等式：

$$\begin{aligned}&0<a_3b_1-a_1b_3<a_2b_3-b_2a_3+b_5(a_1+a_2)(1+\alpha_2) \\ &\qquad -a_5(b_1+b_2)(1+\alpha_1),\\ &0<a_3b_1-a_1b_3<a_1b_4-a_4b_1-b_5(a_3+a_4)(1+\beta_2) \\ &\qquad +a_5(b_3+b_4)(1+\beta_1).\end{aligned} \tag{13.36}$$

(13.36)式又可改写为下列更便于应用的形式：

$$[a_3+a_5(1+\alpha_1)](b_1+b_2)<[b_3+b_5(1+\alpha_2)](a_1+a_2),$$
$$[b_1+b_5(1+\beta_2)](a_3+a_4)<[a_1+a_5(1+\beta_1)](b_3+b_4). \tag{13.37}$$

为了使 $\triangle OA_1A_2$ 内部有三个指标为 $+1$ 的奇点，在其边界上应有：

I) 四个内切点(包括奇点)[1]，其中又可分为三种情况：

1) 三个内切顶点，一个内切边点；

2) 两个内切顶点，两个内切边点，一个常顶点；

3) 一个内切顶点，两个常顶点，三个内切边点；

II) 五个内切点，一个外切点．其中又可分为两种情况：

4) 三个内切顶点，两个内切边点，一个外切边点；

5) 两个内切顶点，一个外切顶点，三个内切边点．

现在我们要用"(13.35)的 $P(x, y)$ 或 $Q(x, y)$ 在任一直线上最多只能有三个零点或切点(奇点既是零点也是切点)"这一事实来研究上述五种情况的可能性．

1) 如图 13.26，不妨设 $O$ 点的两分界线中 $l_1$ 是进入 $O$ 的，$l_2$ 是离开 $O$ 的．若 $\overline{OA_2}$ 边上有内切边点 $C$，则 $\overline{OC}$ 段上轨线都从三

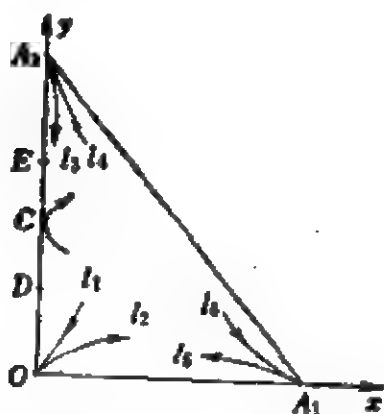


图 13.26

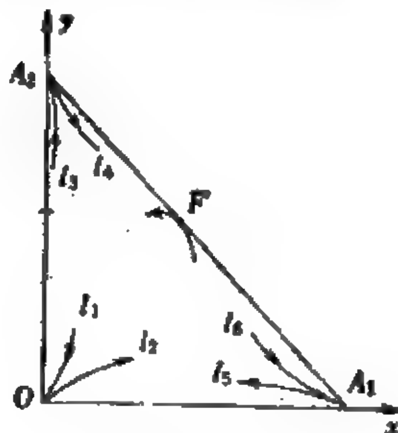


图 13.27

---

1) 对图 13.1 中以奇点为顶点的角状域，我们约定称(d)为有内切顶点，称(a)、(c)、(g)、(h)为有外切顶点，称(b)与(f)为有常顶点，称(e)为有二重外切顶点．对于三角域边上的切点则称为内切或外切边点．由于(13.35)是三次系统，所以三角形的每一边上最多只能有一个切点．

角形内穿出。注意：$\dot{y}$ 沿着 $\overline{OC}$ 的变化可知其上应有一点 $D$，使在此点 $\dot{y}=0$。其次，由于在 $\overline{CA_2}$ 段上轨线都进入三角形，故 $l_3$ 应离开 $A_2$，$l_4$ 应进入 $A_2$。注意：$\dot{y}$ 沿 $\overline{OA_2}$ 的变化，可知其上又应有一点 $E$，使在此点 $\dot{y}=0$。这样，$Q(x, y)$ 在 $y$ 轴上至少将有四个零点，这不可能。

现在假设 $\overline{OA_2}$ 边上没有内切边点，则 $l_3$ 应进入 $A_2$，如图 13.27 所示。这时 $\dot{y}$ 在 $\overline{OA_2}$ 边上必至少有一个零点，这是容许的。与前一样，可证在 $\overline{OA_1}$ 上不能有内切边点，故分界线 $l_5$ 应离开 $A_1$，$l_6$ 应进入 $A_1$，这时 $\dot{x}$ 在 $\overline{OA_1}$ 边上应有一个零点。因此内切边点只能在 $\overline{A_1A_2}$ 上，设为 $F$。与前同样的分析可知，在 $\overline{A_2F}$ 及 $\overline{A_1F}$ 上应各有一个使 $\frac{dy}{dx}=1$ 或 0 的点。这样，或是直线 $x+y=1$ 与(13.35)的轨线将有五个切点，或是 $x+y=1$ 上将有四个使 $\dot{y}=0$ 的点(包括 $A_1$、$A_2$)，这不可能。

与 1) 中同样的理由知道 4) 与 5) 必不可能。因为这时必定有某一内切边点是位于两个内切顶点之间的。2) 与 3) 的不可能性的证明也是类似的，此处从略。总结可得以下定理：

**定理 13.4** 三次系统的 $3-3+3$ 式的奇点构型是不可能的。

# 参 考 文 献


[13.1] Ye Yanqian. Relative position of the critical points of a certain cubic system and a generalization of the Bendixson index formula, Ann.of Diff. Eqs.6(2), 1990, 241～262.

[13.2] Ye Yanqian and Ye Weiyin. Triangulation and fundamental triangles of the phase-portraits of a quadratic differential system, Ann. of Diff Eqs.7(3), 1991.

[13.3] 叶彦谦等. 极限环论. 上海科学技术出版社, 1984.

[13.4] Cima A, Gasull A and Mañosas F. Some applications of the Euler-Jacobi formula to differential equations (Preprint, 1992).

# §14. 二次系统的分支理论

关于二次系统的分支理论有两种：一种是大范围分支理论；另一种是局部分支理论。大范围分支理论研究：1) 当二次系统不存在极限环时的分支现象，主要是不同分界线的重合与交换位置，积分直线的有无，以及有限与无限远奇点的产生与消失等问题；2) 从已知没有极限环的二次系统出发，添加新的项，研究前面所说的问题以及极限环与分界环的产生与消失等问题。局部分支理论则假设出发的方程有高阶奇点或一族闭轨，然后给它添加一个或多个的小扰动项，研究奇点的分解和极限环与分界线环的个数以及随系数而变化的情况。这两种分支理论所用的方法完全不一样，有各自的优点，也有各自的缺点。

二次系统的大范围分支理论最早见于文献 [14.1]、[14.2]、[14.3]。在[14.1]中详细研究了已知不存在极限环的(I)类方程：

$$\dot{x}=-y(1+y-mx),\ \dot{y}=x(1+ax) \tag{14.1}$$

的一切可能的全局轨线图，并在参数$(a, m)$平面上画出使 (14.1) 有中心、积分直线、高阶奇点和鞍点连线等的多条分支曲线，其主要内容已在[14.4]中作过详细介绍。[14.2]对[14.1]中某些分支曲线的性质作了进一步的研究。[14.3]证明了[14.1]中某两分支曲线的唯一性，虽然发表于 1981 年，但实际上是 1965 年以前完成的。在[14.3]中还研究了

$$\dot{x}=-y+mx+mxy-y^2,\ \dot{y}=x(1+ax) \tag{14.2}$$

的分支曲线图。(14.2) 可由 (14.1) 经线性变换而得到。后来研究 (14.1) 与 (14.2) 的分支曲线的唯一性的文章还有 [14.5]、[14.6]。这些在[14.7]中已有较详细的介绍。

类似于[14.1]，在[14.8]与[14.9]中研究了

$$\dot{x} = -y + lx^2 + ny^2, \quad \dot{y} = x(1 + ax + by) \qquad (14.3)$$

的全局结构与分支图。在[14.10]中研究了 $(\text{Ⅱ})_{\delta=m=0}$ 类方程的同一问题，在[14.11]中研究了$(\text{Ⅱ})_{\delta=n=0}$类方程，在[14.12]中研究了有两个细焦点的(Ⅱ)类方程，在[14.13]、[14.14]中研究了具有三阶细焦点的二次系统。以上这些都已在[14.7]中有所介绍了。

当人们研究可能有极限环的二次系统的大范围分支问题时，一个困难而未解决的问题是：当一个参数变化时，即使这时方程构成旋转向量场族，我们也不知道半稳定环会不会突然产生。另一个难题是：两分界线何时交换位置，亦即：何时存在鞍点联线的问题。此外，关于二次系统迄今尚未得到判定极限环唯二性、唯三性等的判别准则。有鉴于此，1986 年以后国内罗定军、陈植荫等首创了定性数值方法 [14.15]。它有严格的理论基础，对确定二次系统的分支曲线或曲面，以及焦点外围极限环的个数很有用，[14.16]、[14.17]、[14.18]、[14.51] 分别用此法研究了$(\text{Ⅱ})_{l=0}$、$(\text{Ⅱ})_{n=0}$ 和$(\text{Ⅱ})_{m=0}$ 类方程的分支问题，得到了有趣的结果。

例如，对$(\text{Ⅱ})_{l=0}$ (设 $n=-1,\ m=2,\ a<0$)：

$$\dot{x} = -y + \delta x + 2xy - y^2, \quad \dot{y} = x(1 + ax) \qquad (14.4)$$

在[14.16]中得到如图 14.1 所示的$(a,\ \delta)$ 平面上的分支曲线图。此系统有焦点 $O(0,\ 0)$ 与 $R'\left(-\frac{1}{a},\ y_1\right)$，鞍点 $M$ (0, 1) 与 $N'\left(-\frac{1}{a},\ y_2\right)$。图 14.1 中 HOC$(N')$ 表示经过 $N'$ 存在分界环分支，由[14.4]知道当 $|a|<2$ 而 $\delta>0$ 时，此分界环是包向 $R'$ 的；同样，HOC$(M)$ 是指过 $M$ 存在分界环的分支，它包向 $O$。但对 $|a|$ 较大而 $\delta>0$ 则相反，即 HOC$(N')$ 包向 $O$ 而 HOC$(M)$ 则包向 $R'$，两点 Hec$(O)$ 与 Hec$(R')$ 分别表示包围 $O$ 或 $R'$ 存在经过两鞍点 $M$ 与 $N'$ 的分界环。$SL(O)$ 与 $SL(R')$ 分别表示包围 $O$ 或 $R'$ 存在半稳定环的分支。图 14.1中第二象限内由坐标轴与HOC$(M)$、HOC$(N')$ 所围的右下角区域表示极限环有 (1, 1) 分布，HOC$(N')$ 与 SL$(O)$ 所围的(极狭窄)的区域表示 $O$ 外存在两个环。同样，HOC$(M)$ 与 SL$(R')$所围的狭窄区域表示 $R'$ 外存在两个环。

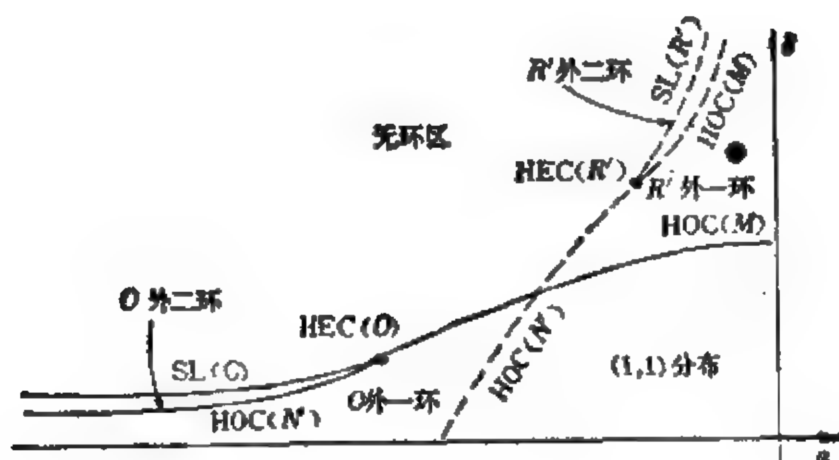



图 14.1

此外，在文献[14.19]中还研究了二次系统：

$$\dot{x} = -y+\delta x+mxy+lx^2-y^2,\quad \dot{y}=x(1+ax), \tag{14.5}$$

画出了分支曲面，并证明当 $m\geqslant -a>0$ 时极限环的(2, 2)与(1, 3)分布都不可能。在文献[14.40]中研究了(I)类方程以及有三个鞍点和一个非鞍点的二次系统的各种分支问题，但都是大范围的。

关于二次系统大范围分支的另一有趣的工作是文献[14.20]，其中研究了方程：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=(\lambda-\delta-1)x+y-x^2+(1+\delta)xy-y^2,\\ \dot{y}&=2x+\frac{2}{3}x^2-xy,\end{aligned} \tag{14.6}$$

经过定性分析和数值计算，[14.20]得到参数(λ, δ)平面中的部分分支曲线图，如图 14.2 所示，其中 δ 轴为 Hopf 分支 ($H$)，($BH$) 为过点 $A(-0.0651,\ -1.0651)$及 $B(0,\ -0.4)$的曲线，表示出现分界环的分支。($SN$) 曲线表示鞍结点分支。对(λ, δ) 平面上位于抛物线($SN$)下方的点方程(14.6) 除原有的鞍点 $O(0,\ 0)$ 和焦点 $N(0,\ 1)$以外，又在直线$y-\frac{2}{3}x-2=0$上出现两个新的奇点. 对于它们[14.20]未作研究。图 14.2 中连接 $\overline{O}$ 与 $A$的曲线 ($2C$) 表示在$N$外围出现半稳定环的分支。两分支曲线($BH$)、($2C$) 与 δ 轴将(λ, δ) 平面分成五个区域，在Ⅰ与Ⅱ中$N$外围无环；在Ⅲ与Ⅴ

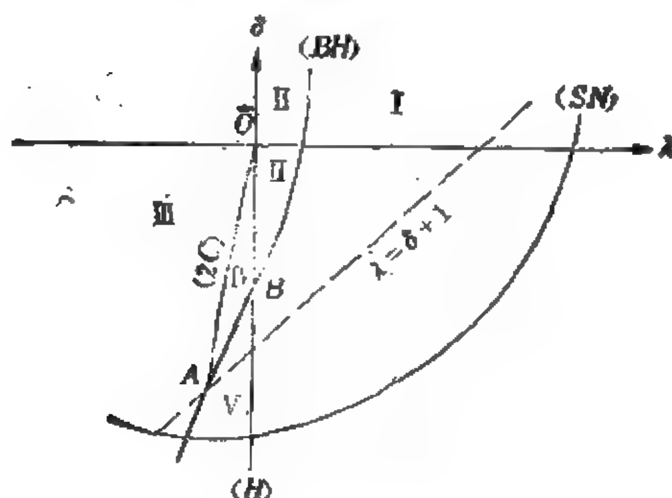



图 14.2

中$N$外围有一个极限环，在Ⅳ（弯曲三角形）中$N$外围有两个极限环，$\delta$轴上的$\overline{O}B$段对应的方程(14.6)在$N$外围也有一个极限环，$\delta$轴上的其他部分所对应的方程(14.6)无环。

注意：$\operatorname{div}(P, Q)=\lambda-\delta-1-3x+(1+\delta)y$，可知对图14.2中$\lambda=\delta+1$上的每一点对应的方程(14.6)必以$O(0, 0)$为细鞍点。当$(\lambda, \delta)$平面上的点$P$从$\overline{O}$沿曲线(2C)跑到$A$时，将有(14.6)的一个半稳定环从$N(0, 1)$逐渐扩大，最后到达$O(0, 0)$成为过$O$的分界环而消失。同样，若$P$从$\overline{O}$沿着位于区域Ⅳ内部的曲线跑到$A$时，则将有(14.6)的两个极限环[1]从$N$逐渐扩大，最后重合成为过$O(0, 0)$的分界线环。这说明：对于$(\lambda, \delta)$平面上的$A$点，对应的$(x, y)$平面上的$O(0, 0)$应是(14.6)的细鞍点，从而$A$必位于直线$\lambda=\delta+1$上。数值计算表明$A$的坐标是$A(-0.0351, -1.0651)$，而$B$的坐标是$B(0, -0.4)$。与$B$对应，(14.6)有分界线环$\Gamma$，它可以看做是当$\lambda=0$而$\delta$从0减小到$-0.4$时，由$N(0, 1)$改变稳定性而产生的稳定环扩大，最后到达$O$点而形成的。在$B$有$\operatorname{div}(P, Q)=0+0.4-1=-0.6<0$，故$\Gamma$是内稳定的。类似[14.20]还有[14.66]，其中极限环唯一性可解决。

方程(14.6)太特殊，在(14.6)中除了两项以外，其他各项的系数都是固定的。有没有一种研究任何二次系统的大范围分支的一

1) 极限环的唯二性并未从理论上得到证明。

般方法?我们发现是有的。最一般的可能有极限环的二次系统。

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\ \dot{y}=x(1+ax+by) \quad (14.7)$$

有六个任意系数。我们还可以通过线性变换把其中任一不为零的二次项的系数化为1或$-1$,因此,实际上只有五个独立系数。可以证明:当$\delta=m=0$时,(14.7)或是有中心、可积,或是全平面不存在极限环。因此,我们可以用其余三个独立系数将$(14.7)_{\delta=m=0}$分类,这一工作在[14.8]与[14.9]中已经做过了。然后对于每一类再在$(\delta, m)$参数平面上来画分支曲线。其方法是先让$\delta=0$,在$m$轴上找出使奇点改变稳定性,出现分界线环、积分直线和半稳定环等的分支点;然后让$\delta$变动,即可由上述这些分支点延伸出一些分支曲线来。近年来我们已对几类不同的二次系统做了如上所说的工作。首先,在文献[14.21]中得到$(14.7)_{n=-1}$在条件:

$$a<0,\ b+2l>0,\ l+1<0,\ a^2-b^2(b+l)>0 \quad (14.8)$$

之下的分支曲线图。其次,在文献[14.22]中又研究了方程

$$\begin{cases}\dot{x}=(\alpha x-y)(1+\gamma y)-ax^2+axy+(b+c\alpha)y^2\\ \dot{y}=(x+\alpha y)(1+\gamma y)-x^2-a\alpha xy+(c-b\alpha)y^2\end{cases} \quad (14.9)$$

在条件

$$b^2-4c(a-1)<0,\ a<1 \quad (14.10)$$

之下的分支图。这时(14.9)对$\alpha$与$\gamma$都构成旋转向量场,且有限远只有一个鞍点和非鞍点。[14.55]研究了(14.10)中$a>1$成立或是$b^2-4c(a-1)=0$的情况。又在[14.23]中我们研究了(I)类方程:

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy-y^2,\quad \dot{y}=x(1+ax)。 \quad (14.11)$$

对于$a<-1$而$l$属于有限个不同区间时,得到(14.11)在$(\delta, m)$平面上的许多分支图(本节后面将作详细介绍)。在文献[14.24]中研究了有界二次系统:

$$\begin{aligned}&\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy,\\ &\dot{y}=x(1+ax+by), \quad (14.12)\\ &(b-l)^2+4ma<0,\ mb<0,\end{aligned}$$

得到分支图和一些有趣的性质。这一工作将在§16中作详细介绍。

我们的方法的缺点是，1) 对 $O(0, 0)$ 以外的非鞍点外围极限环的变动情况不容易搞清楚。2) $m$ 变动时(14.7)并不构成旋转向量场，一般我们只能根据 $W_1$ 随 $m$ 而单调变化猜想 $O$ 外围的极限环也是扩大或缩小的。3) 是否有半稳定环突然产生的问题仍不能解决。由于在分析 $m$ 轴上点的变动和 $O$ 点稳定性的改变时，发现有时非得假定有半稳定环突然产生不可[1)]，所以在所有上述这些工作中我们有理由假定在分析问题的过程中：

"不必要出现的半稳定环，决不出现"。

类比于"直线平行移动时它与一般三次曲线的切点的突然出现最多只有一次"，我们相信上述假定必然成立。可惜至今还不能证明。注意：在国外的一些论文中，如文献[14.20]也不自觉地用了这个命题，只是没有说明而已[2)]。

关于二次系统的局部分支理论，最早的工作是文献 [14.25]、[14.26]、[14.27]，其中研究了简谐振子的二次扰动以及系统

$$\dot{x} = y(y-1), \quad \dot{y} = x + \beta xy. \tag{14.13}$$

其次是文献[14.28]，其中对于方程：

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -1 + \mu_1 y + x^2 + \mu_2 xy \tag{14.14}$$

研究了当 $\nu = \mu_1/\mu_2$ 增大时从焦点$(-1, 0)$产生的极限环的扩大和消失以及有关的普适开折 (Universal unfolding) 问题。现今西方学者都称此工作为常微分支理论的开创性工作。但应指出(14.14) 的极限环的唯一性实际上可从 (I) 类方程极限环的唯一性推出来，而保证极限环存在的准确区间 $\nu \in \left(-1, -\frac{5}{7}\right)$，早在 C. Obi的文章[14.50]中就已得到了。研究(14.14)的还有[14.62]。类似的工作还有[14.63]、[14.64]、[14.65]。

在[14.29]中研究了可积二次系统$(P'_x + Q'_y = 0)$：

---

1) 见后面的图 14.6 和它的说明。

2) 比此命题更强一些的是下一命题："当二次系统中任一系数向一个方向单调变动时，最多只能有一次突然跳出半稳定极限环。"利用此命题易证：对二次系统来说，极限环的(4, x)、(2, 2)、(2, 3)、(3, 3) 分布都是不可能的。我们相信两个命题都是对的，但在 § 20 中只用了前面所说的这个较弱的命题。

$$\dot{x}=-y+ax^2+bxy+cy^2,\ \dot{y}=x+a_1x^2+b_1xy+c_1y^2 \quad (14.15)$$

的扰动系统：

$$\dot{x}=P(x,\ y)+p(x,\ y),\ \dot{y}=Q(x,\ y)+q(x,\ y), \quad (14.16)$$

其中 $p(x,\ y)$、$q(x,\ y)$ 是次数不高于一个固定自然数 $N$ 的多项式。文献[14.29]证明了，当 $N=2$，且(14.15)中的二次项的系数不全为零时，(14.15)的闭轨线族中能产生(14.16)的不少于两个极限环的闭轨线是处处稠密的。

文献[14.30]研究了方程

$$\frac{dw}{dz}=\frac{3(1-z^2)}{2w} \quad (14.17)$$

在一类方程

$$\frac{dw}{dz}=\frac{P_2}{Q_1} \quad (14.18)$$

中扰动时所产生极限环的重次。

文献[14.31]研究了：

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{1}{4c}-cy^2+\mu x(mx+ny-\lambda)\\ \dot{y}=ax^2-\dfrac{1}{4a}+\mu y(mx+ny-\lambda)\end{cases} \quad (a>c>0,\ 0<\mu\ll 1)$$

$$(14.19)$$

的极限环分布，得到了 (0, 1)、(0, 2) 与 (1, 1) 分布[1]。

文献[14.32]研究了：

$$\dot{x}=xy+\varepsilon(l_1x^2+m_1xy+n_1y^2+p_1x+q_1y),$$

$$\dot{y}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+\varepsilon(l_2x^2+m_2xy+n_2y^2+p_2x+q_2y)$$

$$(0<\varepsilon\ll 1). \quad (14.20)$$

得到极限环的(0, 1)及(1, 1)分布。

文献[14.33]研究了：

$$\dot{x}=xy+\varepsilon(l_1x^2+m_1xy+ny_1^2+p_1x+q_1y),$$

$$\dot{y}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2+2y^2+\varepsilon(l_2x^2+m_2xy+n_2y^2+p_2x+q_2y). \quad (14.21)$$

---

1) 严格地说，应是至少为(0, 1)、(0, 2)与(1, 1)分布，下同。

得到极限环的(0, 1)、(0, 2)及(1, 1)分布。

文献[14.34]研究了：

$$\dot{x}=xy+\varepsilon(l_1x^2+m_1xy+n_1y^2+p_1x+q_1y),$$
$$\dot{y}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2-y^2+\varepsilon(l_2x^2+m_2xy+n_2y^2+p_2x+q_2y).\tag{14.22}$$

也得到极限环的(0, 1)、(0, 2)及(1, 1)分布。

文献[14.35]研究了：

$$\dot{x}=3\lambda y^2-2y,\ \dot{y}=-x-x^2-\mu_1y+\mu_2y^2\quad\left(\lambda\in\left[0,\ \frac{2}{3}\sqrt{2}\right]\right).\tag{14.23}$$

当 $0\leqslant|\mu_1|$、$|\mu_2|\ll1$。若以 $\gamma(h)$ 表示当 $\mu_1=\mu_2=0$ 时(14.23)的积分曲线族

$$H_\lambda(x,\ y)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\lambda y^3-y^2=h\tag{14.24}$$

中对应于常数 $h$ 的闭轨，以

$$Q(h,\ \lambda)=\oint_{\gamma(\lambda)}y^2dx\bigg/\oint_{\gamma(\lambda)}ydx\tag{14.25}$$

记两 Abel 积分的商，则在 $(h,\ Q)$ 平面上 $Q(h,\ \lambda)$ 有如下所示的图形(图 14.3)。从而按熟知的关于把 Hamilton 系统振动以产生极限环的方法(详见 § 15)可知当 $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ 位于 $Q(0,\ \lambda)$ 与 $m_\lambda$ 之间时，(14.23)有两个极限环。证明时用到 Picard-Fuchs 方程。

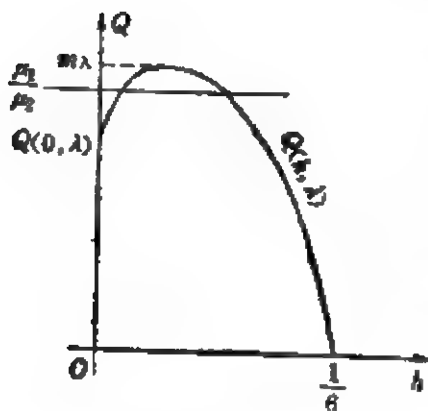


图 14.3

文献 [14.36] 研究了由二次系统的等时中心经二次扰动而产生极限环的问题，得到的结论是：一般的等时中心可以产生最多两个极限环，而线性中心在高阶分支之下则可产生三个极限环。

文献[14.37]研究了 Hamilton 系统

$$\dot{x}=2xy,\ \dot{y}=-1+g^2-4gx+3x^2+y^2\quad(g\in R)\tag{14.26}$$

受扰动而产生极限环的问题。

文献[14.38]研究了：

$$\dot{x}=x(1-x-ay),\ \dot{y}=y(-1+ax+by)\quad(1<a<\infty)\quad(14.27)$$

经二次扰动而产生极限环的问题。为了证明两个 Abel 积分之商的单调性，作者用到了"有一积分直线的二次系统最多只有一个极限环"的事实，从而得知由一阶分支最多只能产生一个极限环。

文献[14.39]研究了：

$$\dot{x}=-y+ny^2,\quad \dot{y}=x-xy\qquad(14.28)$$

经二次扰动而产生极限环的问题，也用到"某些特殊的二次系统的极限环的唯一性"来证明 Abel 积分之商的单调性，并证明了：为了考虑(14.28)的二次扰动方程的一阶分支问题，只须考虑有三个扰动项的方程：

$$\dot{x}=-y+ny^2+\varepsilon(a_{10}x+a_{11}xy),\ \dot{y}=x-xy+\varepsilon b_{20}x^2\quad(14.29)$$

就够了。文献[14.39]仍只能得到(1, 0)、(2, 0)与 (1, 1) 分布的极限环。

在文献[14.41]中用分析后继函数的零点的新办法(始于[14.42])研究了：

$$\dot{x}=x(\beta+ax+by),\ \dot{y}=y(-\alpha+cx+dy)\qquad(14.30)$$

经二次扰动产生极限环的问题，证明了：当(14.30)的中心区域为有界时最多可以出现三个极限环．当中心区域为无界时最多只能出现两个极限环。

文献[14.43]研究了：

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+x^2+\mu(l_1x^2+m_1xy+n_1y^2+p_1x+q_1y),\\ \dot{y}=x+xy+\mu(l_2x^2+m_2xy+n_2y^2+p_2x+q_2y),\end{cases}\qquad(14.31)$$

证明从$(14.31)_{\mu=0}$的中心区域的边界(抛物线)当$\mu\neq0$时，可以分支出两个极限环或一个二重环，所用方法比过去人们研究同类问题的方法有所改进。本节后面要加以详细介绍[1]。

文献[14.44]用同法研究：

1) 方程(14.31)已在文献[14.54]中研究过。文献[14.7]第四章§2有介绍，但文献[14.43]所用的方法与文献[14.54]有所不同。

$$\dot{x} = xy + \mu(l_1x^2 + m_1xy + n_1y^2 + p_1x + q_1y),$$
$$\dot{y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 + 2y^2 + \mu(l_2x^2 + m_2xy + n_2y^2 + p_2x + q_2y).$$

(14.31)

证明从$(14.21)_{\mu=0}$的两个中心区域的边界(双曲线,上有两个无限远奇点)至多可以分支出两个极限环，它们作(2, 0)或(1, 1)分布。

文献[14.45]用同法研究了：

$$\begin{cases} \dot{x} = -2(x^2 + 2y^2 - 1) + \mu(l_1x^2 + m_1xy + n_1y^2 + p_1x + q_1y), \\ \dot{y} = 2xy + \mu(l_2x^2 + m_2xy + n_2y^2 + p_2x + q_2y). \end{cases}$$

(14.32)

证明从$(14.32)_{\mu=0}$的中心区域的边界 $(x^2 + y^2 = 1$ 与 $y = 0$ 所构成的弓形)可以分支出两个极限环或一个二重环。

文献[14.46]研究了通有 $k$ 参数开折当 $k \leqslant 3$ 时的二次系统模型,证明了某些情况不可能有二次的通有开折。

除了这些以外,还有文献[14.47]、[14.48]、[14.49]、[14.52]、[14.58]、[14.59]、[14.60]、[14.61]等,不再一一介绍了。

局部分支理论的缺点是:1) 所得的结论仅当那些变动参数的绝对值很小时是成立的。2) 所用的是适用于自治系统的一般方法,很少考虑到多项式系统,特别是二次系统的特点。因此，例如前面介绍过的[14.35]关于方程(14.23)对 $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ 的某些数值可以存在两个极限环的结论，实际上只要几句话就可以证明的。为此只须注意：当 $\mu_1 = \mu_2 = 0$ 时(14.23)的过鞍点 $O(0, 0)$ 的分界线包向中心点 $N(-1, 0)$。(14.23)的发散量为 $-\mu_1 + 2\mu_2 y$。当 $\mu_1 = 0$而$\mu_2 \neq 0$ 时，$\operatorname{div}(P, Q) = 0$ 即 $y = 0$，它通过$O$与$N$，故$O$与$N$是$(14.23)_{\mu_1=0}$的两个细奇点。由二次系统的性质知道$(14.23)_{\mu_1=0}$当 $\mu_2 \neq 0$ 时不存在包围$N$的闭和奇闭轨线。这时按照$N$的稳定性可以决定过$O$而包向$N$的两分界线的相对位置，它们不可能重合。现在若 $\mu_1 \neq 0$ 而取适当的符号，则可使$N$改变稳定性而产生一极限环 $\Gamma_1$。当 $|\mu_1|$ 增大时 (14.23) 在 $3\lambda y - 2 = 0$ 的每一边构

成半平面旋转向量场。由于 $\mathrm{div}(P, Q)$ 在 $O$ 与 $N$ 的值同为 $-\mu_1$。故由 $N$ 产生的环 $\Gamma_1$ 扩大时不能到达 $O$。相反，一定是过 $O$ 的两分界线相互接近，先重合，而后交换位置，产生另一极限环 $\Gamma_2$。$\Gamma_2$ 缩小，$\Gamma_1$ 扩大，最后重合而消失。这样，对每一 $\mu_2\neq0$ 必有 $\mu_1$ 的一个区间存在，使对应的方程(14.23)在 $N$ 外围有两个极限环。以上的推理不必要求 $|\mu_1|$ 与 $|\mu_2|$ 非常小[1]。

关于研究分支问题时要考虑到二次系统的特性这一点，我们看到文献[14.38]与[14.39]已有所察觉。

下面介绍[14.23]中关于方程(14.11)的大范围分支理论。以后常设 $a<-1$。已知当 $m=\delta=0$ 而 $l\neq0$ 时 (14.11)没有闭轨。今设 $\delta=0$ 而让 $m$ 变动，则得方程

$$\dot{x}=-y+lx^2+mxy-y^2,\quad \dot{y}=x(1+ax)。\qquad (14.33)$$

(14.33)在 $O(0, 0)$ 的第一个焦点量是

$$W_1=m(l-1)-2al,\quad W_1=-2al \text{ 当 } m=0。\qquad (14.34)$$

根据 $l$ 的大小，现在可以分成五种情况：

情况 I　$l>1$

则当 $m=0$ 时 $W_1>0$，此时 $O$ 为不稳定焦点。当

$$m=m^*=\frac{2al}{l-1}<0 \qquad (14.35)$$

时，$W_1=0$，这时 $O$ 的稳定性由 $W_2$ 的符号决定。

情况 II　$l=1$

则对一切 $m$ 都有 $W_1=-2a>0$。

情况 III　$0<l<1$

如前当 $m=0$ 时，$W_1>0$，但现在 $m^*>0$。

情况 IV　$l=0$

这时 $W_1=W_2=W_3=0$ 当 $m=m^*=0$，$O$ 为一中心。

情况 V　$l<0$

则 $W_1<0$ 当 $m=0$，又 $m^*<0$。

下面先分析(14.11)的奇点。当

1) 对方程(14.23)的全局分支在文献[14.18]中有详细的讨论。

$$\Delta=(a+m)^2+4(l-a\delta)>0 \tag{14.36}$$

时，(14.11)有四个奇点：

$$O(0,\ 0)、M(0,\ -1)、R\left(-\frac{1}{a},\ y_1\right)、\ N\left(-\frac{1}{a},\ y_2\right). \tag{14.37}$$

其中

$$\begin{aligned} y_1&=\frac{-a-m+\sqrt{(a+m)^2+4(l-a\delta)}}{2a},\\ y_2&=\frac{-a-m-\sqrt{(a+m)^2+4(l-a\delta)}}{2a}, \end{aligned} \tag{14.38}$$

是二次方程

$$F(y)=a^2y^2+a(a+m)y+a\delta-l=0 \tag{14.39}$$

的实根。当 $\Delta=(a+m)^2+4(l-a\delta)=0$ 时，$R=N$ 为鞍结点。当 $\Delta=(a+m)^2+4(l-a\delta)<0$ 时，(14.11) 只有两个实奇点 $O$ 与 $M$。

$y_1$ 与 $y_2$ 的符号依赖于 $l-a\delta$ 与 $a+m$ 的符号。我们有：

$$\begin{aligned}
&1)\ y_1<0<y_2,\ 当\ a\delta-l<0;\\
&2)\ y_1<y_2<0,\ 当\ a\delta-l>0,\ a+m<0;\\
&3)\ y_2>y_1>0,\ 当\ a\delta-l>0,\ a+m>0;\\
&4)\ y_1=0,\ y_2>0,\ 当\ a\delta-l=0,\ a+m>0;\\
&5)\ y_1<0,\ y_2=0,\ 当\ a\delta-l=0,\ a+m<0;\\
&6)\ y_1=y_2=0,\ 当\ a\delta-l=a+m=0;\\
&7)\ y_1=y_2>0,\ 当\ (a+m)^2+4(l-a\delta)=0,\ a+m>0;\\
&8)\ y_1=y_2<0,\ 当\ (a+m)^2+4(l-a\delta)=0,\ a+m<0.
\end{aligned} \tag{14.40}$$

因此当 $N\neq R$ 时，$N$ (鞍点) 总在 $R$ (非鞍点) 的上方。

下面就上述五种情况逐一来进行研究：

情况 I　$l>1,\ m^*<0$

当 $m=0$ 时，$O$ 为不稳定焦点。首先研究 $y_i$ 与(14.33)的

$$\operatorname{div}(P,\ Q)\Big|_{R或N}=-\frac{2l}{a}+my_i \tag{14.41}$$

随 $m$ 而变化的情况。将 $F(y_i)=0$ 对 $m$ 求导，得到：

$$[2a^2y_i+a(a+m)]\frac{\partial y_i}{\partial m}+ay_i=0,$$

从而

$$\frac{\partial y_i}{\partial m}=-\frac{ay_i}{2a^2y_i+a(a+m)}=\frac{-ay_i}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y_i}}. \qquad (14.42)$$

因为当 $\delta=0$、$l>0$ 时，有 $y_1<0<y_2$，又易见在一切情况下都有：

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y_1}<0,\quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y_2}>0, \qquad (14.43)$$

故有：

$$\frac{\partial y_i}{\partial m}>0 \quad (i=1,\ 2). \qquad (14.44)$$

即当 $m$ 增加(减小)时，$R$ 与 $N$ 都向上移(下移)。其次，

$$\left.\frac{\partial \mathrm{div}}{\partial m}\right|_{R或N}=m\frac{\partial y_i}{\partial m}+y_i=\frac{y_i(2y_i+1)a^2}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y_i}}. \qquad (14.45)$$

因此有：

$$\left.\frac{\partial \mathrm{div}}{\partial m}\right|_N>0. \qquad (14.46)$$

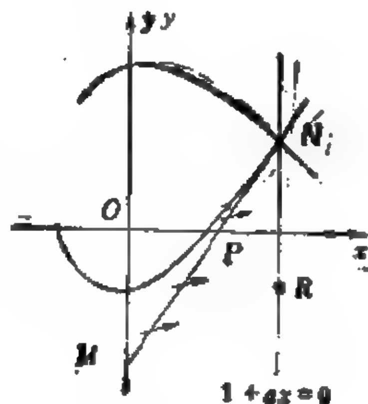



图 14.4

而 $\left.\frac{\partial \mathrm{div}}{\partial m}\right|_R$ 的符号则仍可正可负。

因为当 $m\to-\infty$ 时，有

$$my_2\to\frac{l}{a},\quad 从而\ \mathrm{div}\Big|_N\to-\frac{l}{a}>0.$$

故由(14.46)看出(14.33)的

$$\mathrm{div}\Big|_N>0 \quad (对一切\ m). \qquad (14.47)$$

现在研究线段 $\overline{MN}$ 上轨线的穿过方向。$\overline{MN}$ 的方程是：

$$y+1=-a(1+y_2)x. \qquad (14.48)$$

它与 $x$ 轴交于 $P(x_P,\ 0)$，$x_P=-\dfrac{1}{a(1+y_2)}$。另一方面，轨线在 $P$ 点的斜率为 $(1+ax_P)/(lx_P+\delta)$。因此，当 $0\leqslant|\delta|\ll1$ 或 $\delta>0$ 而 $l>1$ 时，有

$$0<(1+ax_p)/(lx_p+\delta)=ay_2/[-l+a\delta(1+y_2)]$$
$$<-a(1+y_2)。\qquad(14.49)$$

故轨线都从左向右穿过$\overline{MN}$，如图 14.4 所示。这样，包向$O$的两条分界线必定来自(或跑向)$N$。

当$|\delta|$不是很小时，使$\overline{MN}$或$\overline{MR}$成为 (14.11) 的积分直线的条件是：

$$a\delta^3-(l+2ma)\delta^2+[am^2+m(l-1)+(3-l)a]\delta$$
$$+(l-1)^2-a^2+am(l-1)=0^{1)}。\qquad(14.50)$$

此方程是：

$$k^2-(\delta-m)k-1=0 \text{ 与 } k^3-mk^2-lk+a=0$$

的结式，表示$M(0,-1)$的特征方向是无穷远奇点方程的根。由(14.50)及(14.49)可看出：当$\delta=0$而$l>1$，$a<0$，且

$$m=\frac{a^2-(l-1)^2}{a(l-1)}\qquad(14.51)$$

时，$\overline{MR}$必为(14.11)的积分直线，它有斜率$\frac{a}{l-1}<0$。

再研究$\delta=0$时$\mathrm{div}(P,Q)\Big|_{(14.33)}=2lx+my=0$通过$R$或$N$的条件。$\mathrm{div}=0$交$1+ax=0$于$y=\frac{2l}{ma}$，如果交点是一个奇点，则$y=\frac{2l}{ma}$应满足$F(y)=0$，故得：

$$m^2+2am+4l=0。\qquad(14.52)$$

它的两根是：

$$\bar{m}_i=-a\mp\sqrt{a^2-4l}\quad(i=1,2)\qquad(14.53)$$

故若$a^2<4l$，则$\mathrm{div}=0$决不经过$1+ax=0$上的奇点$R$与$N$。若$a^2\geqslant 4l>0$，则$\bar{m}_i\geqslant 0$。但现在$m^*<0$，故$\bar{m}_i\neq m^*$ $(i=1,2)$。事

---

1) (14.50)式也可由§6中的(6.11)式中令$n=-1$，$b=0$而得到。

实上，由 $m^*=\overline{m}_i$ 可导出 $a^2(2l-1)+(l-1)^2=0$，它当 $l\geqslant\frac{1}{2}$ 时不可能成立。

仿此可研究 $\delta\neq0$ 时，$\operatorname{div}(P,\ Q)\Big|_{(14.11)}=\delta+2lx+my=0$ 通过 $N$ 或 $R$ 的条件，而得到方程：

$$a^2\delta^2-a(ma+4l)\delta+l(4l+2am+m^2)=0, \tag{14.54}$$

当 $\delta=0$ 时，(14.54) 退化为 (14.52)。

当 $a^2>4l$ 时，(14.54) 可分解因子成为：

$$\left[m+a+\sqrt{a^2-4l}-\frac{\delta}{2l}\left(a^2+a\sqrt{a^2-4l}\right)\right]$$

$$\times\left[m+a-\sqrt{a^2-4l}-\frac{\delta}{2l}\left(a^2-a\sqrt{a^2-4l}\right)\right]=0. \tag{14.55}$$

所以它的轨迹是 $(\delta,\ m)$ 平面上的两条直线。当 $a^2<4l$ 时，(14.54) 是一虚椭圆：

$$(a\delta-2l)^2-a(a\delta-2l)m+lm^2=0. \tag{14.56}$$

故无轨迹。当 $a^2=4l$ 时，(14.54) 的轨迹是二垂直线 $\delta=\frac{m+a}{2}$。

现在以 $l_1$、$l_2$ 记 (14.55) 中的两直线：

$$\begin{aligned} l_1:&\quad m+a+\sqrt{a^2-4l}-\frac{\delta}{2l}\left(a^2+a\sqrt{a^2-4l}\right)=0,\\ l_2:&\quad m+a-\sqrt{a^2-4l}-\frac{\delta}{2l}\left(a^2-a\sqrt{a^2-4l}\right)=0. \end{aligned} \tag{14.57}$$

它们的交点 $Q\left(\frac{2l}{a},\ 0\right)$ 位于 $\delta$ 轴上。$l_1$、$l_2$ 分别和 $m$ 轴交于 $(0,\ \overline{m}_i)$ $(i=1,\ 2)$，又和抛物线 $\Delta=0$ 切于 $G$ 和 $H$ 两点。这两直线上哪些部分对应于 $\operatorname{div}\Big|_R=0$？哪些部分对应于 $\operatorname{div}\Big|_N=0$？可由图 14.5 看出来。证明（见附录 14.1）最近由江其保[14.55]得到。

最后注意：当 $W_1=0$ 或即 $m=m^*$ 时，有

$$\begin{aligned} W_2&=m^*a(5a-m^*)\left[-(l-1)^2-a^2(2l-1)\right],\\ W_3&=m^*a^2(2a^2-l+2)\left[-(l-1)^2-a^2(2l-1)\right]. \end{aligned} \tag{14.58}$$

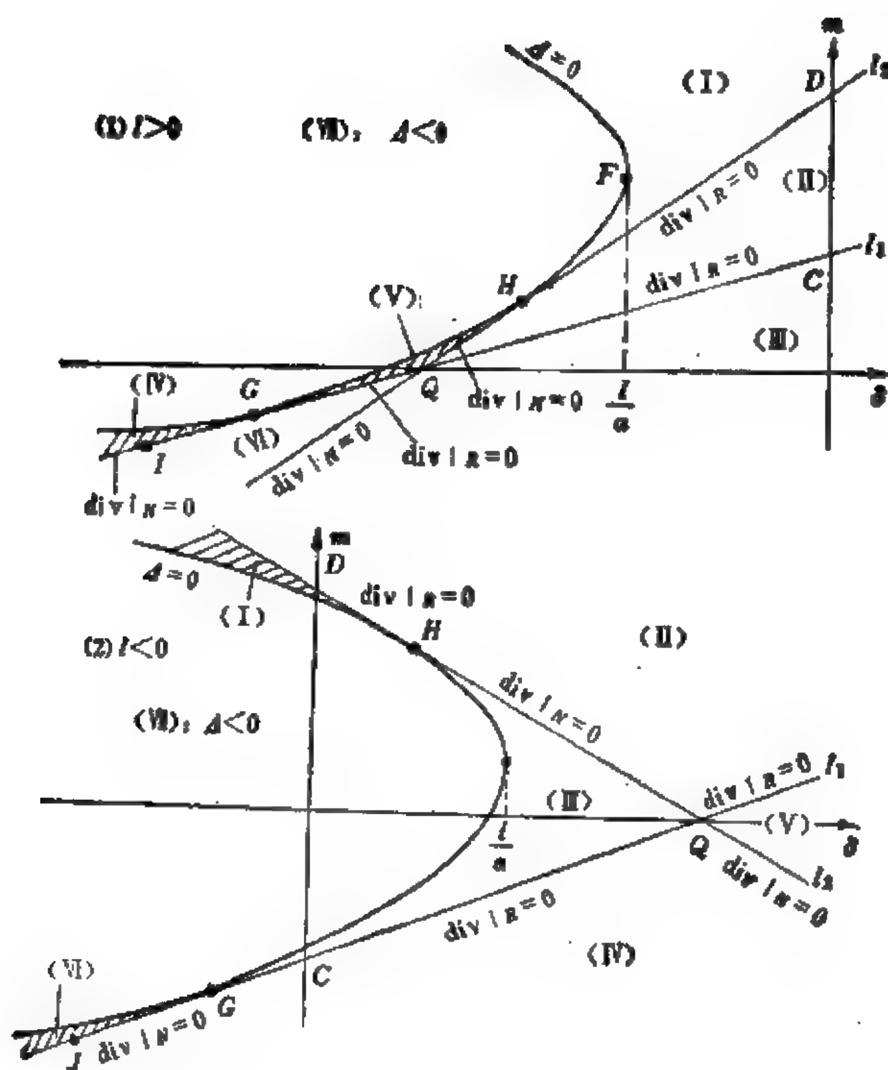



图 14.5

其中

$$5a-m^*=\frac{a(3l-5)}{l-1}. \qquad (14.59)$$

下面开始画分支图。由(14.59)知应分成两种情况：

1) $1<l<5/3$

先找$m$轴上的分支点：因为$m^*<0$，$5a-m^*>0$，故$W_2(m^*)<0$，又已知当$m>m^*$时，有$W_1>0$，$O$为不稳定的。所以当$m$从零减小到达$m^*$的时候，应有一稳定环$\Gamma_1$缩小于$O$而使$O$从不稳

定变为稳定。但已知当 $\delta=0$、$m\geqslant 0$ 时，$O$ 外无环。又 $\Gamma_1$ 不可能由分界环产生，因为前面已证明 $\operatorname{div}(P,\ Q)\Big|_N>0$ （对一切 $m$）。故 $\Gamma_1$ 的来由必定是这样的：对某一 $m_1'$，$0>m_1'>m^*$。当 $m$ 减小到达 $m_1'$ 时，$O$ 外突然出现一个半稳定环 $\Gamma^*$，它分裂成为 $\Gamma_2\supset\Gamma_1$。这样，对 $\delta=0$ 而 $m\in(m^*,\ m_1')$ 时 $\Gamma_1$ 总是存在的。由于 $W_1$ 的值随 $m$ 而单调变动，所以我们有理由相信当 $m$ 从 $m_1'$ 减小时，$\Gamma_1$ 缩小而 $\Gamma_2$ 扩大（可能不是单调缩小和扩大，因为(14.33)当 $m$ 变动时并不构成旋转向量场）。假设 $\Gamma_2$ 当 $m=m_2'$ 时扩大成为分界线环 $\Gamma$ 而通过 $N$，然后消失。由于 $a$ 与 $l$ 的值没有完全确定，所以 $m^*$ 与 $m_2'$ 的大小也不能确定。下面假设 $m_2'<m^*$，于是在 $m$ 轴上有下列一些分支点(见图 14.6)：

| $m<m_2'$ | $m_2'$ | | $m^*$ | | $m_1'$ | $0\quad m>0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 无环，$O$ 稳定 | $\Gamma_2=\overline{\Gamma}$ 分界环 | $W_1<0$ $\Gamma_3$ 不稳定 | $W_1=0$ $W_2<0$ $\Gamma_1=0$ | $\Gamma_1\subset\Gamma_2$ 稳定　不稳定 $W_1>0$ | $\Gamma^*$ 出现 半稳定环 | $O$ 不稳定，无环 $W_1>0$ |

图 14.6

现在取图 14.6 中的 $m$ 轴作为 $(\delta,\ m)$ 平面中的纵轴，并画出横轴（$\delta$ 轴）。当 $m$ 轴上不同区间中的点随着 $\delta$ 的增加（减小）而向右（左）平移时，由旋转向量场理论知道或是有新的极限环 $\Gamma_3$ 从 $O$ 产生（这时 $\Gamma_1$ 应缩小而 $\Gamma_2$ 扩大），或是 $\Gamma_1$ 继续扩大而 $\Gamma_2$ 缩小。在 $\Gamma_1$ 的缩小过程中它最后应与 $\Gamma_3$ 重合而消失；在 $\Gamma_1$ 扩大的过程中，它最后应与 $\Gamma_2$ 重合而消失。这样，在 $(\delta,\ m)$ 平面我们得到如图 14.7 所示的分支曲线图。

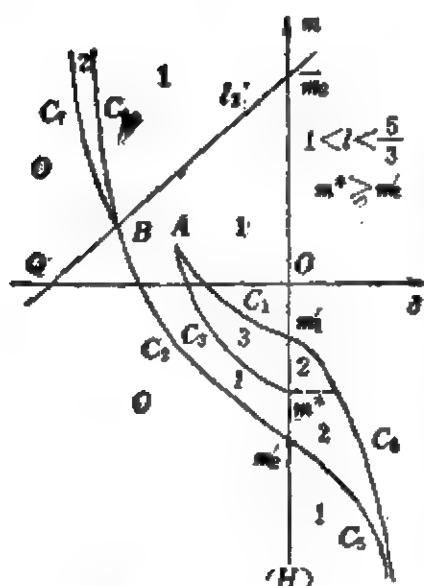



图 14.7

其中 $m$ 轴表示 Hopf 分支。$C_1$ 表示半稳定环分支。当动点 $P$ 从 $m$

轴上的 $m_1'$ 上方邻近出发而向左移动时，先由 $O$ 产生一个不稳定环 $\Gamma_3$。当 $P$ 到达 $C_1$ 时，$\Gamma_3$ 外围突然出现半稳定环，它分裂为 $\Gamma_2\supset\Gamma_1(\supset\Gamma_3)$，然后 $\Gamma_1$ 缩小，$\Gamma_2$ 与 $\Gamma_3$ 扩大，当 $P$ 到达另一表示半稳定环分支的曲线 $C_3$ 时，$\Gamma_1$ 与 $\Gamma_3$ 重合成为半稳定环而消失。$C_1$ 与 $C_3$ 的交点 $A$ 表示出现三重环的分支点，$A$ 点不一定在 $l_2$ 上[1]。

当 $P$ 继续向左移而到达曲线 $C_2$ 时，$\Gamma_2$ 扩大成为分界线环，然后消失。当然，也有可能 $C_1$ 与 $C_3$ 都与 $C_2$ 相遇，这时就有 $A=B$，$B$ 必在 $l_2$ 上。

若 $P$ 从 $m$ 轴上的 $(m^*, m_1')$ 段上向左移，则 $\Gamma_3$ 产生，但 $\Gamma_1$ 与 $\Gamma_2$ 早已存在了。故 $O$ 外有三个环。若 $P$ 点向右移，则 $\Gamma_1$ 扩大，$\Gamma_2$ 缩小，不出现 $\Gamma_3$。当 $P$ 到达 $C_6$ 时 $\Gamma_1$ 与 $\Gamma_2$ 重合成为半稳定环而消失。

若 $P$ 从 $m$ 轴上的 $(m_2', m^*)$ 段向左移，则 $\Gamma_2$ 扩大，若 $P$ 向右移，则从 $O$ 点产生稳定环 $\Gamma_1'$，它扩大，而 $\Gamma_2$ 缩小，最后在 $P$ 到达 $C_6$ 时二者重合。对 $\delta>0$ 来说，$\Gamma_1$ 与 $\Gamma_1'$ 是一样的。所以我们过 $(0, m^*)$ 向右画虚线，表示在它的上下方极限环的个数是一样的。

当 $P$ 从 $m$ 轴上 $(0, m_2')$ 下方任意远处出发向右移时，由于 $O$ 要改变稳定性，故总要出现一个稳定环 $\Gamma_1'$。又因 $\mathrm{div}\Big|_N>0$，故仍应由分界线重合先产生一分界线环(这时 $P$ 在 $C_5$ 上) 然后破裂而产生不稳定环 $\Gamma_2'$。当 $P$ 右移到达 $C_6$ 时 $\Gamma_1'$ 与 $\Gamma_2'$ 重合而消失。故 $C_5$ 与 $C_6$ 永不相遇。但已知当 $|\delta|\geqslant2$ 时，(14.11)在 $O$ 外不再存在极限环与分界线环($O$ 已成为结点)，所以 $C_5$ 与 $C_6$ 应有铅直渐近线 $\delta=\delta_1\leqslant2$。同样，$C_4$ 与 $C_7$ 也应有铅直渐近线 $\delta=\delta_2\geqslant-2$。这里 $C_4$ 是 $C_2$ 的继续。因为在 $l_2$ 上方 $\mathrm{div}\Big|_N<0$，故 $P$ 自 $l_2$ 向左移时，分界线应先重合，产生稳定环 $\Gamma_4$，当 $P$ 到达 $C_7$ 时，$\Gamma_3$ 与 $\Gamma_4$ 重合而消失。

1) 这一点由罗定军指出，我们原来画的是 $C_1$、$C_2$、$C_3$ 都交于 $l_2$ 上的 $B$ 点，$B$ 这时表示细分界环的出现。二次系统可存在三重极限环，也见文献[14.57]。

2) $l\geqslant\frac{5}{3}$

这时 $5a-m^*<0$, $W_2(m^*)>0$ (或 $5a-m^*=W_2(m^*)=0$, $W_3>0$ 当 $l=5/3$)。由于当 $m<m^*$ 时, $W_1<0$, 可知当 $m$ 从 $m^*$ 减小时，从 $O$ 点产生一个不稳定环 $\Gamma_2$。$\Gamma_2$ 在 $m$ 减小到达 $m_2'$ 时成为分界线环 $\overline{\Gamma}$ 而消失。这样，代替图 14.6 我们有图 14.8。

| $m<m_2'$ | $m_2'$ | | $1m^*$ | 0 $m>0$ |
|---|---|---|---|---|
| 无环 | $\overline{\Gamma}$ 出现<br>分界环<br>内不稳定 | $W_1<0$,<br>$\Gamma_2$ 不稳定<br>$O$ 稳定 | $W_1=0$,<br>$W_2>0$<br>$O$ 不稳定 | $O$ 不稳定, 无环<br>$W_1>0$ |

图 14.8

图 14.9

图 14.10

相应于图 14.8 的 $(\delta, m)$ 平面上的分支图见图 14.9。由此可以看出，当 $l$ 从小于 $\frac{5}{3}$ 增大而趋于 $\frac{5}{3}$ 时，图 14.7 中的 $m$ 轴左边由 $C_1$ 与 $C_3$ 以及 $\overline{m^*m_1'}$ 所围成的弯曲三角域将逐渐缩小而成为 $m$ 轴上的一点 $(0, m^*)$。

图 14.7 只表示 $1<l<\frac{5}{3}$ 时的一种可能性，即 $m_2'<m^*$。能否出现 $m_2'>m^*$？如果可能，则由连续性，还将出现 $m_2'=m^*$ 的情况。

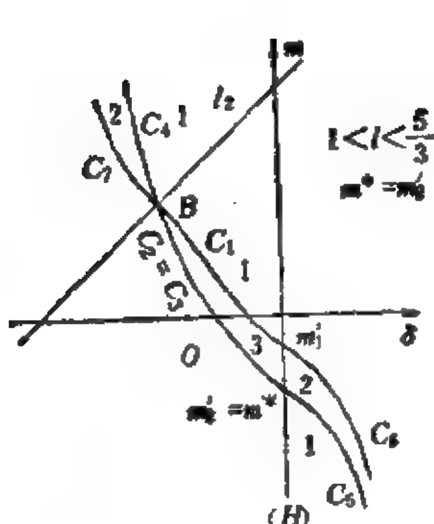



图 14.11

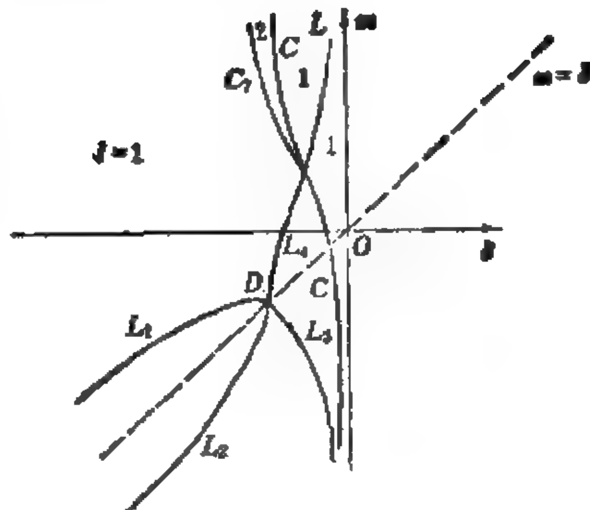



图 14.12

相应地,我们将有另两个分支图(图 14.10 与图 14.11)。这时 $C_1$ 与 $C_3$ 的公共点 $A$ 必须就是 $B$ 点。于是 $B$ 点所代表的分界线环在适当的扰动后将会产生三个环[1]。又与图 14.11 中 $C_2=C_3$ 上的点对应的(14.11)将同时存在一个分界线环 $\overline{\Gamma}$ 和一个半稳定环 $\Gamma^*$。当动点 $P$ 由此曲线出发向右移时,$\overline{\Gamma}$ 破裂而产生一不稳定环 $\Gamma_2$,$\Gamma^*$ 则分解为 $\Gamma_1\supset\Gamma_3$(都在 $\Gamma_2$ 内部),而当 $P$ 由此曲线向左移时,$\overline{\Gamma}$ 与 $\Gamma^*$ 同时消失而 $O$ 外无环。图 14.10 与图 14.11 能否存在,尚待计算机帮助用数字例子来检验[2]。

另一个难以解决的问题是:当 $\delta$ 从零减少时(这时(14.49)中的不等式有可能要倒向),包向 $O$ 的两条分界线能否变为来自(跑向)$M$?更重要的问题是,要研究曲线 $C_1$、$C_2$、$C_3$ 能否与曲线(14.50)亦即曲线

1) 同样的结论也在[14.57]中得到了。

2) 最近西班牙 Barcelona 自治大学 J. C. Artes 教授在他自己发明的专为二次系统画全局图的 SDQ 软件的操作下算出:

i) 当 $a=-2$, $l=1.6$ 时有 $m^*\doteq-10.667$, $m_2^l\doteq-12$;

ii) 当 $a=-1.01$, $l=1.2$ 时有 $m^*\doteq-12.12$, $m_2^l\doteq-9.84$。

由此可见 $m_2^l<m^*$ 与 $m_2^l>m^*$ 两种可能性都是存在的。作者对他的帮助深表感谢。

$$(\delta-a)^2=[\delta(m-\delta)+l-1]\cdot[a(m-\delta)+l-1] \quad (14.60)$$

相遇?但是当 $a$ 与 $l$ 的数值未确定时，(14.60)在$(\delta, m)$平面上的图形不好画[1]。另一方面，$C_1$、$C_2$、$C_3$ 的准确形状也不知道。我们将在情况 I 中再讨论这个问题。

**情况 I** $l=1$

现在 $W_1=-2a>0$(对一切 $m$)，即当 $\delta=0$ 时，$O$ 常为不稳定焦点。可以证明(14.33)当 $l=1$ 时在 $O$ 外围无环(见[14.4]§14的习题)。又注意：在情况 I 中若 $l\to1$，则 $m_1'$、$m''$、$m_2'$ 都趋于 $-\infty$，因此图 14.7 和图 14.10 中的 $C_1$、$C_5$、$C_3$、$C_6$ 都将消失，而 $C_2$ 与 $C_4$ 则成为有两条铅直渐近线的分支曲线 $C$。(14.60)现在成为：

$$L: \quad m=\delta\pm\frac{\delta-a}{\sqrt{a\delta}} \quad (a<0), \quad (14.61)$$

如图 14.12 所示。$L$ 有二重点 $D(a, a)$ 在直线 $m=\delta$ 上。在 $D$ 点上方 $L$ 只有一支 $L_4$(容易验证与 $L_4$ 上的点对应的方程(14.11)以 $\overline{MN}$ 为积分直线)，在 $D$ 点下方 $L$ 有三支 $L_1$、$L_2$、$L_3$。因此知道：在由 $m$ 轴与 $C$、$L_4$ 所围的两端无限的弯曲三角域中的点所对应的方程(14.11)有一个包围 $O$ 点的不稳定环，而对应于在 $C$ 与 $C_7$ 所围的无限角域中的点，方程(14.11)则有两个包围 $O$ 点的环，这时包向 $O$ 点的分界线来自(跑向)$M$，而 $\operatorname{div}\Big|_M=\delta-m<0$[2]。$C$ 表示出现过 $M$ 的分界线环。

把(14.60)改写为：

$$\delta a(m-\delta)^2+(l-1)(a+\delta)(m-\delta)+(l-1)^2-(\delta-a)^2=0,$$

则可就 $m-\delta$ 解出而得到

$$m-\delta=\frac{-(l-1)(a+\delta)\pm(a-\delta)\sqrt{(l-1)^2+4a\delta}}{2a\delta}. \quad (14.62)$$

---

1) 对 $a$、$l$ 的值受到某些限制时，(14.60)的图形可在附录 2 中找到。

2) 在 $\overline{MN}$ 成为积分直线之前，过 $M$ 与 $N$ 的另两分界线应在 $y$ 轴左方先交换位置。

**情况 Ⅱ₁** $1>l\geqslant\frac{1}{2}$

这时 $2l-1\geqslant0$，$m^*=\frac{2al}{l-1}>0$，$-(l-1)^2-a^2(2l-1)<0$，$W_2(m^*)<0$。故当 $m$ 从零增加到 $m^*$ 时，有一稳定环 $\Gamma_1$ 缩到 $O$。$\Gamma_1$ 应是由一半稳定环 $\Gamma^*$ 分裂而得。$\Gamma^*$ 出现于 $m=m_1'>0$，但 $m_1'<m^*$，在 $\Gamma_1$ 之外还有不稳定环 $\Gamma_2$。当 $m$ 从 $m_1'$ 增大时 $\Gamma_2$ 扩大，直到 $m=m_2'$ 时它成为过 $N$ 的分界环而消失。如前，$m_2'$ 与 $m^*$ 可能有三种不同的大小系关。设 $m_2'>m^*$，则有如图 14.13 所示的 $m$ 轴上的分支图。

| $m<0$　0 | $m_1'$ | | $m^*$ | | $m_2'$ | $m>m_2'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O$ 不稳定<br>$W_1>0$ | $\Gamma^*$ 出现<br>半稳定 | $\Gamma_2\supset\Gamma_1$<br>不稳　稳 | $\Gamma_1=O$<br>$W_1=0$<br>$W_2<0$ | $\Gamma_2\supset O$<br>$W_1<0$<br>$O$ 稳定 | $\Gamma=\overline{\Gamma}_2$<br>内不稳定<br>分界环 | $W_1<0$<br>$O$ 外无环 |

图 14.13

又当 $l\geqslant\frac{1}{2}$ 时不难看出 $\overline{m}_2=-a+\sqrt{a^2-4l}<-2a\leqslant\frac{2al}{l-1}=m^*$。此外由附录 2 的图 14.22 可看出在 $(\delta,\ m)$ 平面中第一象限内的分支曲线必定要和曲线(14.62)相交。由于与 $(\delta,\ m)$ 平面上曲线(14.62)右边第一象限中的点对应的方程 (14.11)，其包向 $O$ 的分界线应来自(跑向) $M$。在 $M$ 点有 $\operatorname{div}\Big|_M=\delta-m<0$，故当点 $P$ 从 $m$ 轴上 $(0,\ m\gg m_2')$ 向右移时，由 $O$ 产生的稳定环 $\Gamma_1'$ 将直接扩大成为过 $M$ 的分界线环而消失。这样，我们就有分支图 14.14，其中虚线表示曲线 (14.62)，$A$ 点表示三重极限环，但也有可能 $A=B$。

**情况 Ⅱ₂** $0<l<\frac{1}{2}$

现在 $W_2$ 或 $W_3$ 的表达式中最后一个因式

$$\Phi(l)=-(l-1)^2-a^2(2l-1)=-l^2+2(1-a^2)l+a^2-1.$$

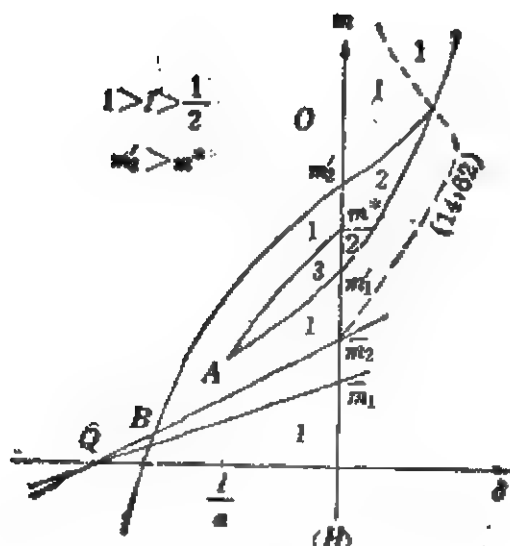



图 14.14

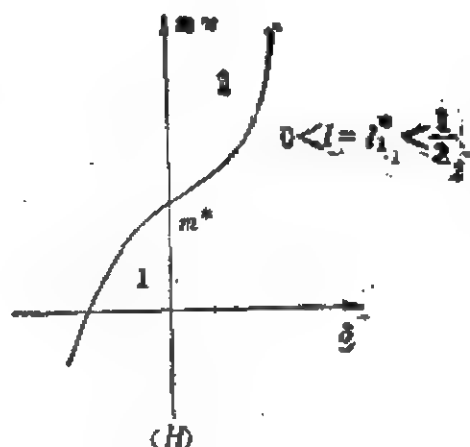



图 14.15

$\Phi(l)=0$ 有两个异号实根：$l_2^*<0<l_1^*<\frac{1}{2}$。

1) 当 $l=l_1^*$ 时，$W_2(m^*)=W_3(m^*)=0$，(14.33)当 $m=m^*$ 时以 $O$ 为中心。我们猜想：当 $m\neq m^*$ 时(14.33)没有极限环[1]。由于当 $m>m^*(<m^*)$ 时 $O$ 为稳定(不稳定)的，故(14.11)有如图 14.15 所示的很简单的分支图。

2) 易见当 $\frac{1}{2}>l>l_1^*$ 时，分支图与图 14.14 一样，因为这时仍有 $W_2(m^*)<0$。图 14.15 可看成是图 14.14 当 $l\downarrow l_1^*$，从而 $m_1'\to m^*$，$m_2'\to m^*$ 时的极限情况。不难证明这时有 $\overline{m}_2\to m^*$。而当 $l<l_1^*$ 时有 $\overline{m}_2>m^*$。图 14.14 中的三环区则缩小到一点 $(0, m^*)$。

3) 若 $0<l<l_1^*$，则 $W_2(m^*)>0$。由于 $W_1>0$ 当 $m<m^*$，$W_1<0$ 当 $m>m^*$，故当 $m$ 从 $m^*$ 增加时从 $O$ 产生一个不稳定环 $\Gamma_2$。在$(\delta, m)$平面上有分支图如图 14.16。

情况 IV　$l=0$

1) 对 $m>0$ 这一猜想最近已被江其保所证明(见[14.56])。

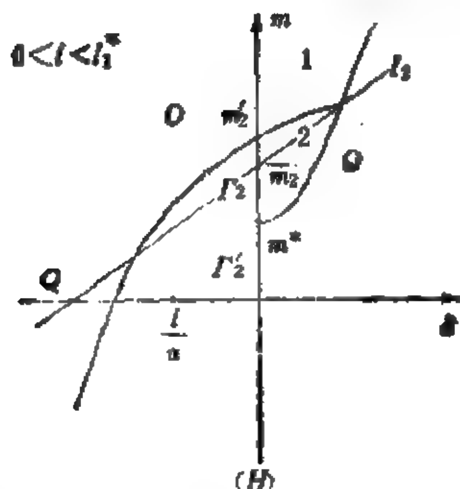



图 14.16

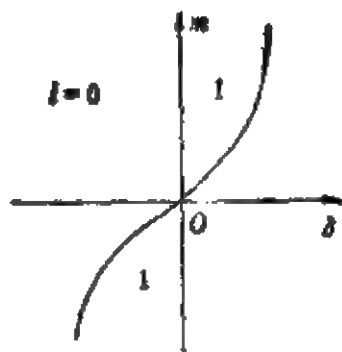



图 14.17

这时 $W_1=-m$, $m^*=0$。当 $m>0$ 时 $O$ 为稳定；当 $m<0$ 时 $O$ 为不稳定。$m=m^*=0$ 时(14.33)有中心；当 $m\neq 0$ 时(14.33)没有极限环(见文献 [14.4] 中 § 13)。现在 $l_1$ 成为 $\delta=m$, $l_2$ 成为 $\delta=0$。我们有图 14.17。图 14.17 可视为当 $l\downarrow 0$ 时图14.16 的极限；同理，图 14.15 是 $l\uparrow l_1^*$ 时图 14.16 的极限。

情况 V. $l_2^*\leqslant l<0$

1) $l_2^*<l<0$

现在 $m^*<0$。又当 $m<m^*$ 时 $W_1>0$, 当 $m>m^*$ 时 $W_1<0$, 但 $W_2(m^*)<0$。故当 $m$ 从小于 $m^*$ 增大到 $m^*$ 时有一稳定环 $\Gamma_1$ 收缩于 $O$；而当 $m>m^*$ 时(14.33)无环。注意：当 $\delta=0$, $l<0$ 时，图 14.4 中的 $N$ 将跑到 $x$ 轴的下方，而 $P$ 将跑到 $1+ax=0$ 的右方。这时 $\overline{MN}$ 上轨线的穿过方向有可能反过来(例如，当 $-l\gg 1$, $-\delta\gg 1$)，即包向 $O$ 的分界线有可能来自（跑向）$M$。但因 $\mathrm{div}\Big|_M=-m>0$ 当 $m<0$, 又前面的(14.46)、(14.47) 式现在也不一定成立了(因为 $l<0$, $y_2<0$ 之故)，所以现在包向 $O$ 的分界线的来龙去脉一时无法确立。

以下假设包向 $O$ 的分界线来自（跑向）$M$, 那末 $\Gamma_1$ 应是由半稳定环 $\Gamma^*$ 分裂而产生的，$\Gamma^*$ 出现在 $m=m_1'(<m^*)$ 之时。另一环 $\Gamma_2$ 当 $m$ 从 $m_1'$ 增大时扩大，最后在 $m=m_2'$ 成为过 $M$ 的分界线环而

消失。若设 $m_2'>m^*$，则有如图 14.18 所示的分支图，其中有三重环分支点 $A$。

2) $l=l_2^*$

这时 $\Phi(l)=0$，$m^*=-a-\sqrt{a^2-4l}<0$，$W_2(m^*)=W_3(m^*)=0$，(14-33) 在 $m=m^*$ 时以 $O$ 为中心。我们猜想当 $m\neq m^*$ 时，(14.33) 没有极限环。由于当 $m>m^*(<m^*)$ 时 $O$ 为稳定（不稳定），故有图 14.19。

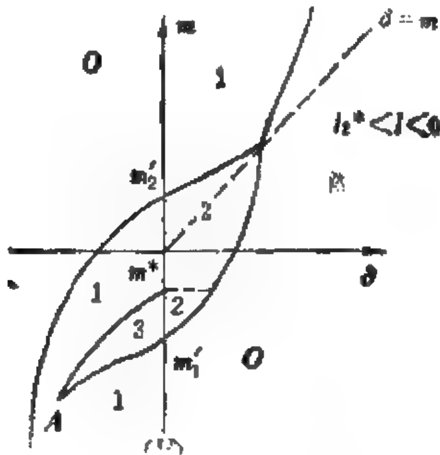


图 14.18

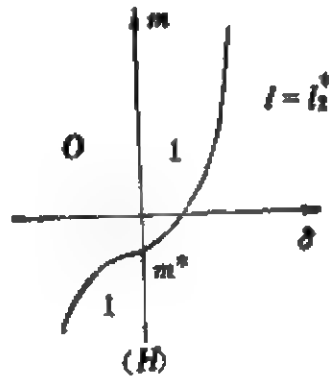


图 14.19

**情况 V₂** $l<l_2^*$

现在 $m^*<0$。当 $m<m^*$ 时 $W_1>0$，当 $m>m^*$ 时 $W_1<0$，但 $W_2(m^*)>0$。故当 $m$ 从 $m^*$ 增大时，从 $O$ 点产生一个不稳定环 $\Gamma_2$。因为已知 $m=\delta=0$ 时 (14.11) 无环，故 $\Gamma_2$ 扩大而成为过 $M$ 的分界线环时 $m=m_1'<0$，且 $\mathrm{div}\Big|_M=-m_1'>0$。故有图 14.20。

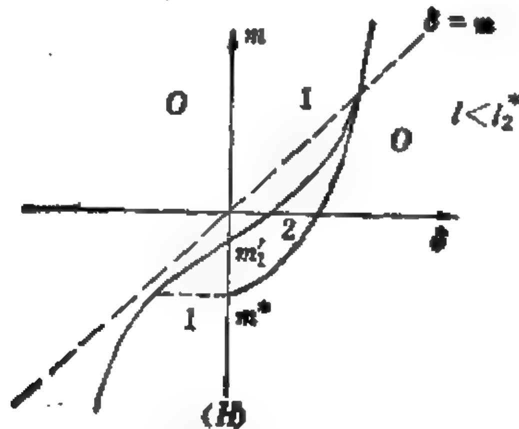


图 14.20

如果把上述这些分支图按 $l$ 的大小排列在一起，就可以想象出(14.11)在($\delta$, $m$, $l$)参数空间中的分支图。

下面再证明(Ⅱ)类方程的一个大范围分支定理：

**定理 14.1** (Ⅱ)类方程(14.11)有两条积分直线 $\overline{MR}$ 与 $\overline{MN}$，当且仅当它可写成：

$$\dot{x} = -y + \delta x + (\delta^2 - m\delta + 1)x^2 + mxy - y^2,$$
$$\dot{y} = x(1 + \delta x) \qquad (\delta \neq 0) \qquad (14.63)$$

的形式，这时(14.63)显然没有极限环。

**证** 易见(14.11)在 $M(0, -1)$的两分界线的斜率满足方程：

$$k^2 + (\delta - m)k - 1 = 0.$$

因此有

$$k_{1,2} = \frac{m - \delta \pm \sqrt{(m-\delta)^2 + 4}}{2}, \qquad (14.64)$$

另一方面由(14.38)知 $\overline{MN}$ 与 $\overline{MR}$ 的斜率为：

$$\frac{-a + m \pm \sqrt{(a+m)^2 + 4(l - a\delta)}}{2}. \qquad (14.65)$$

令

$$\frac{m - \delta + \sqrt{(m-\delta)^2 + 4}}{2} = \frac{m - a + \sqrt{(a+m)^2 + 4(l - a\delta)}}{2},$$

$$\frac{m - \delta - \sqrt{(m-\delta)^2 + 4}}{2} = \frac{m - a - \sqrt{(m+a)^2 + 4(l - a\delta)}}{2}.$$

我们得到：

$$a = \delta \text{ 及 } \sqrt{(m-\delta)^2 + 4} = \sqrt{(m+a)^2 + 4(l - a\delta)}. \qquad (14.66)$$

从而

$$a = \delta, \ l = \delta^2 - m\delta + 1. \qquad (14.67)$$

即(14.11)已成为(14.63)。反之，不难直接证明(14.63)确实以 $\overline{MR}$ 与 $\overline{MN}$ 为积分直线。

因为当 $\delta = 0$ 时(14.63)成为：

$$\dot{x} = -y + x^2 + mxy - y^2, \quad \dot{y} = x, \qquad (14.68)$$

它以 $O$ 为中心，所以(14.63)可以看成是(14.68)的扰动。但这里

$\delta\neq0$ 可以是任意实数，所以(14.63)是(14.68)的大扰动。

**注 14.1** 当 $\delta=0$ 时，经过 $M(0,\ -1)$ 的两条分界线是(14.68)的积分直线，$N$ 与 $R$ 消失于无限远。

**注 14.2** 对(14.63)有：

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ P'_\delta & Q'_\delta \end{vmatrix} = x^2[(1-\delta^2)x^2+mxy-y^2-y+(m-2\delta)x-1]. \tag{14.69}$$

二次曲线$\mathscr{L}$：

$$(1-\delta^2)x^2+mxy-y^2-y+(m-2\delta)x-1=0 \tag{14.70}$$

与 $y$ 轴无交点，但我们不能肯定(14.63)的两条积分直线

$$y+1=\frac{m-\delta\pm\sqrt{(m-\delta)^2+4}}{2}x$$

与(14.70)无交点。

**注 14.3** 当曲线(14.50)被写成(14.60)的形式时，很容易从 $a=\delta$ 导出 $l=\delta^2-m\delta+1$。由 (14.60) 也可找到其他满足此式的 $l$、$m$、$a$、$\delta$。例如：$m=\delta$，$(1-l)^2=(\delta-a)^2$。但

$$\dot{x}=-y+\delta x+(1+a-\delta)x^2+\delta xy-y^2,\ \dot{y}=x(1+ax) \tag{14.71}$$

只有一条积分直线 $y+1=x$，它经过 $M(0,\ -1)$。

$$\dot{x}=-y+\delta x+(1-a+\delta)x^2+\delta xy-y^2,\ \dot{y}=x(1+ax) \tag{14.72}$$

也只有一条积分直线$y+x=1$。显见，若(14.71)或(14.72)存在极限环(这是可能的)，必为唯一。

最近，文献[14.53]结合对无限远奇点的分析对$(\mathrm{I})_{n=0}$类方程得到比文献[14.17]更完整的分支图。

最后介绍文献[14.43]的工作：易见$(14.31)_{a=0}$有通积分

$$\Gamma_h:\ H(x,\ y)=\frac{2y+1-x^2}{(1+y)^2}=h, \tag{14.73}$$

当 $0<h<1$ 时，(14.73)是绕 $O(0,\ 0)$ 的一个对称于 $y$ 轴的椭圆。当 $h=0$ 时，(14.73)是抛物线 $2y+1=x^2$，当 $h=1$ 时，(14.73)成为一点 $O(0,\ 0)$。$(14.31)_{a=0}$ 虽然可积，但不是 Hamilton 系统。若乘以积分因子$\frac{1}{(1+y)^3}$，则它便成为 Hamilton 系统。因此以

后我们代替(14.31)，改而讨论：

$$\dot{x}=\frac{-y+x^2}{(1+y)^3}+\frac{\mu}{(1+y)^3}(l_1x^2+m_1xy+n_1y^2+p_1x+q_1y)$$
$$=P,$$
$$\dot{y}=\frac{x}{(1+y)^2}+\frac{\mu}{(1+y)^3}(l_2x^2+m_2xy+n_2y^2+p_2x+q_2y)$$
$$=Q.$$

(14.74)

为了研究当 $0<|\mu|\ll 1$ 时，(14.73) 的哪些闭线能产生(14.74)的极限环，按文献[14.4]的定理 4.1，可知道应考虑积分：

$$A(h)=\iint\limits_{D_h}[P''_{\mu x}(x,y,0)+Q''_{\mu y}(x,y,0)]dxdy$$
$$=\iint\limits_{D_h}\Big[\frac{2l_1x}{(1+y)^3}+\frac{m_1y}{(1+y)^3}+\frac{p_1}{(1+y)^3}$$
$$-\frac{3}{(1+y)^4}(l_2x^2+m_2xy+n_2y^2+p_2x+q_2y)$$
$$+\frac{1}{(1+y)^3}(m_2x+2n_2y+q_2)\Big]dxdy \qquad (14.75)$$

其中 $D_h$ 表示 $\Gamma_h$ 的内域。应用格林公式，并注意 $\Gamma_h$ 的对称性，易见：

$$A(h)=\int_{y_1}^{y_2}\left[\frac{\alpha h+\beta}{(1+y)^2}+\frac{\gamma}{(1+y)^3}+\frac{\delta}{(1+y)^4}\right]$$
$$\times\sqrt{1+2y-h(1+y)^2}\,dy$$
$$=(\alpha h+\beta)I_2+\gamma I_3+\delta I_4. \qquad (14.76)$$

其中

$$I_n=\int_{y_1}^{y_2}(1+y)^{-n}\sqrt{1+2y-h(1+y)^2}\,dy\ (n=2,3,4),$$

$$y_1=-1+\frac{1}{h}-\frac{\sqrt{1-h}}{h},\qquad y_2=-1+\frac{1}{h}+\frac{\sqrt{1-h}}{h}, \qquad (14.77)$$

$\alpha=2l_1$，$\beta=2(m_1-n_2)$，$\gamma=2(p_1-2q_2-m_1+4n_2-2l_2)$，

$\delta=2(3q_2-3n_2+l_2)$。

$I_n$ 的值可借变量代换 $1+y=z$ 和积分公式算出，为：

$$I_2=(1-\sqrt{h})\pi,\quad I_3=\frac{1-h}{2}\pi,\quad I_4=\frac{1-h}{2}\pi.$$

从而

$$A(h)=(\alpha h+\beta)(1-\sqrt{h})\pi+\frac{1-h}{2}\pi(\gamma+\delta)$$
$$=(1-\sqrt{h})\pi\Phi(h). \tag{14.78}$$

其中

$$\Phi(h)=h\alpha+\beta+(1+\sqrt{h})\gamma',\qquad \gamma'=\frac{\gamma+\delta}{2}. \tag{14.79}$$

为了计算 $A(h)$ 或 $\Phi(h)$ 在 $0<h<1$ 中零点的个数，可以任取 $0<h_1<h_2<1$，令 $\Phi(h_1)=\Phi(h_2)=0$，即

$$h_1\alpha+\beta+(1+\sqrt{h_1})\gamma'=0,\qquad h_2\alpha+\beta+(1+\sqrt{h_2})\gamma'=0. \tag{14.80}$$

上两式关于未知数 $\alpha$、$\beta$ 的系数行列式为 $h_1-h_2<0$，故可解出 $\alpha$、$\beta$ 为：

$$\alpha=\frac{-\gamma'}{\sqrt{h_2}+\sqrt{h_1}},\qquad \beta=-\frac{\sqrt{h_2}+\sqrt{h_1}+\sqrt{h_1h_2}}{\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}}\gamma'\quad(\text{设 }\gamma'\neq0). \tag{14.81}$$

(14.81)式等价于：

$$l_2=\frac{p_1+q_2}{\sqrt{h_1h_2}-\sqrt{h_1}-\sqrt{h_2}+1}\neq0,\qquad m_1=\frac{\sqrt{h_1h_2}+\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1h_2}-\sqrt{h_1}-\sqrt{h_2}+1}(p_1+q_2)+n_2. \tag{14.82}$$

又

$$\Phi'(h_i)=\alpha+\frac{\gamma'}{2\sqrt{h_i}}=\frac{2\sqrt{h_i}-(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2})}{2\sqrt{h_i}}\alpha$$
$$=\frac{2\sqrt{h_i}-(\sqrt{h_2}+\sqrt{h_1})}{\sqrt{h_i}}l_2\neq0.$$

因此得到如下定理：

**定理 14.2** 对任意给定的 $0<h_1<h_2<1$，如果(14.74)的系数满足条件(14.82)，其中假设 $p_1+q_2\neq0$，亦即 $l_2\neq0$。则当 $0<$

$|\mu|\ll 1$ 时，(14.74)有两个极限环。它们分别位于曲线 $\Gamma_{h_1}$ 与 $\Gamma_{h_2}$ 的小邻域中。

注意：若在 $\Phi(h)=0$ 中把 $\alpha$、$\beta$、$\gamma'$ 看作未知数，则由 $\Phi(h_1)=\Phi(h_2)=\Phi(h_3)=0$ 只能解出 $\alpha=\beta=\gamma'=0$，从而 $\Phi(h)\equiv 0$，故(14.74)不可能有三个极限环(当 $|\mu|\ll 1$)。

仿此可证以下定理：

**定理 14.3** 对任意给定的 $0<h_1<1$，如果(14.74)的系数满足条件：

$$l_2=\frac{p_1+q_2}{(1-\sqrt{h_1})^2}\neq 0,$$

$$m_1=\frac{h_1+2\sqrt{h_1}}{(1-\sqrt{h_1})^2}(p_1+q_2)+n_2, \tag{14.83}$$

则当 $0<|\mu|\ll 1$ 时，(14.74)存在一个二重环，它位于 $\Gamma_{h_1}$ 的小邻域中。

为此只须注意：在(14.82)中令 $h_2=h_1$ 即得(14.83)。

又 $\Phi''(h_1)=\dfrac{-\gamma'}{4h_1\sqrt{h_1}}=\dfrac{1}{h_1}l_2\neq 0$。

若在定理 14.2 中令 $h_1\to 0$，则(14.82)成为：

$$l_2=\frac{p_1+q_2}{1-\sqrt{h_2}}\neq 0,\quad m_1=\frac{\sqrt{h_2}}{1-\sqrt{h_2}}(p_1+q_2)+n_2 \tag{14.84}$$

这时(14.74)当 $0<|\mu|\ll 1$ 时将有一个极限环和一个无限大分界线环。为了肯定无限大分界线环的存在，可用反证法：假设在条件(14.84)之下，(14.74)当 $0<|\mu|\ll 1$ 时，只有一个极限环在 $\Gamma_{h_2}$ 的小邻域中而没有无限大分界线环，则它是结构稳定系统。现在取 $0<h_1\ll 1$，在满足条件(14.84)的系统(14.74)右边分别加上扰动项：

$$\mu\left(\frac{\sqrt{h_1h_2}+\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1h_2}-\sqrt{h_1}-\sqrt{h_2}+1}-\frac{\sqrt{h_2}}{1-\sqrt{h_2}}\right)(p_1+q_2)xy$$

和

$$\mu\left(\frac{1}{\sqrt{h_1h_2}-\sqrt{h_1}-\sqrt{h_2}+1}-\frac{1}{1-\sqrt{h_2}}\right)(p_1+q_2)x^2$$

$$(0<|\mu|\ll 1),$$

则所得的二次系统就成为满足条件(14.82)了。于是由定理14.2知它应有两个极限环。这与结构稳定的性质相矛盾。

若在(14.84)中令 $h_2 \to 0$，则得：

$$l_2 = p_1 + q_2 \neq 0, \quad m_1 = m_2. \tag{14.85}$$

仿前可知当条件(14.85)成立而 $0 < |\mu| \ll 1$ 时，(14.74)在原点外围只存在一个无限大分界线环，从这个方程出发，再用上面所说的方法，就可由只有一个无限大分界线环而无其他极限环的系统(14.74)经微扰使无限大分界线环破裂而产生两个很大的极限环。

最后，我们认为一个值得研究的二次系统全局分支图是关于文献[14.4]中§11中的方程：

$$\dot{x} = -y - \delta_2 x - 3x^2 + (1-\delta_1)xy + y^2,$$

$$\dot{y} = x\left(1 + \frac{2}{9}x - 3y\right).$$

虽然当 $\delta_1 = \delta_2 = 0$ 时，此方程只有一个无限远奇点，两个有限远焦点 $O(0, 0)$ 和 $N(0, 1)$，但对 $(\delta_2, \delta_1)$ 平面上位于抛物线：

$$(729\delta_2 + 243\delta_1 - 225)^2 + 648(54\delta_1 - 2129) = 0$$

的外部的点，方程却有四个有限远奇点．又对直线 $\delta_1 = 1 - \sqrt[3]{3/2} \doteq -0.1447$ 下方的点方程有三个无限远奇点。又当 $\delta_2 = 0$, $0 < \delta_1 \ll 1$ 时，已知 $O$ 外有两个极限环。所以情况要比方程(14.11)有固定 $l$ 值时更为复杂一些。全局分支图能使我们看到极限环的个数及位置的变化情况。

## 附录 14.1 图 14.5 的证明

令 $\Delta = (m+a)^2 + 4(l - a\delta)$，由(14.38)易见：当 $\Delta > 0$ 时，$N \neq R$；当 $\Delta = 0$ 时，$N = R$；当 $\Delta < 0$ 时，$x = -\frac{1}{a}$ 上无奇点。$\Delta = 0$ 在 $(\delta, m)$ 平面上表示以 $F\left(\frac{l}{a}, -a\right)$ 为顶点而主轴平行于 $\delta$ 轴的抛

物线。此抛物线与 $l_1$ 切于点 $G\left(\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-4l}),\ -\sqrt{a^2-4l}\right)$，与 $l_2$ 切于点 $H\left(\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-4l}),\ \sqrt{a^2-4l}\right)$，$l_1$、$l_2$ 上其他的点全部位于区域 $\Delta>0$ 中。整个 $(\delta,\ m)$ 平面被 $l_1$、$l_2$ 与 $\Delta=0$ 分成七个区域，分别以(Ⅰ)，(Ⅱ)，…，(Ⅶ)记之。

(1) $l>0$，且 $a^2-4l>0$

由 $\operatorname{div}(P,\ Q)=\delta+2lx+my$ 及(14.38)式易见 $\operatorname{div}\Big|_N=\operatorname{div}\Big|_R$ 当且仅当 $m=0$ 或 $\Delta=0$。所以使 $\operatorname{div}\Big|_N=\operatorname{div}\Big|_R=0$ 的点只有 $G$、$Q$、$H$。

在 $\delta$ 轴上 $\operatorname{div}\Big|_N$ 与 $\operatorname{div}\Big|_R$ 的符号由下式决定：

$$\operatorname{div}\Big|_N=\operatorname{div}\Big|_R=\delta-\frac{2l}{a}\begin{cases}>0,\ \text{当}\ \delta>\dfrac{2l}{a}, \\ <0,\ \text{当}\ \delta<\dfrac{2l}{a}.\end{cases}$$

其次，在 $C$ 与 $D$ 两点有 $\delta=0$，$m+a\pm\sqrt{a^2-4l}=0$，故

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\Big|_N&=-\frac{2l}{a}+m\cdot\frac{-(m+a)-\sqrt{(m+a)^2+4l}}{2a}\\&=-\frac{2l}{a}+m\frac{-m-a-|a|}{2a}\\&=-\frac{2l}{a}-\frac{m^2}{2a}=-\frac{2l}{a}+\frac{2am+4l}{2a}=m.\end{aligned}$$

$$\operatorname{div}\Big|_R=-\frac{2l}{a}+m\frac{-m-2a}{2a}=-\frac{m^2+2am+4l}{2a}=0.$$

这样，在 $l_1$ 上 $G$ 点以右的部分和 $l_2$ 上 $H$ 点以右的部分都有 $\operatorname{div}\Big|_R=0$ 而 $\operatorname{div}\Big|_N>0$。

其次，在 $l_1$ 上 $G$ 点左方取一点 $I\left(\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-4l})+\frac{2l}{a},a\right)$，对应地有：

$$y_1=\frac{1}{2a}\left(-3a-\sqrt{a^2-4l}\right),\quad y_2=\frac{1}{2a}\left(\sqrt{a^2-4l}-a\right).$$

从而

$$\operatorname{div}\Big|_R=-a-\sqrt{a^2-4l}>0,\ \operatorname{div}\Big|_N=0.$$

故 $l_1$ 上 $G$ 点以左的部分使 $\operatorname{div}\Big|_N=0$。仿此可证：$l_2$ 上 $H$ 点以左的部分使 $\operatorname{div}\Big|_N=0$。这样，就证明了图14.5(1)。由于 $\operatorname{div}\Big|_R$ 与 $\operatorname{div}\Big|_N$ 关于 $\delta$、$m$ 连续，故在每一区域(除了(Ⅶ))中保持恒正或恒负。情况如下：

(Ⅰ) $\operatorname{div}\Big|_N>0,\ \operatorname{div}\Big|_R>0$；　(Ⅱ) $\operatorname{div}\Big|_N>0,\ \operatorname{div}\Big|_R<0$；

(Ⅲ) $\operatorname{div}\Big|_N>0,\ \operatorname{div}\Big|_R>0$；　(Ⅳ) $\operatorname{div}\Big|_N>0,\ \operatorname{div}\Big|_R>0$；

(Ⅴ) $\operatorname{div}\Big|_N<0,\ \operatorname{div}\Big|_R<0$；　(Ⅵ) $\operatorname{div}\Big|_N<0,\ \operatorname{div}\Big|_R>0$；

(2) $l<0$ 的情况证明类似，各区域中发散量的符号如下：

(Ⅰ) $\operatorname{div}\Big|_N>0,\ \operatorname{div}\Big|_R>0$；　(Ⅱ) $\operatorname{div}\Big|_N>0,\ \operatorname{div}\Big|_R<0$；

(Ⅲ) $\operatorname{div}\Big|_N<0,\ \operatorname{div}\Big|_R<0$；　(Ⅳ) $\operatorname{div}\Big|_N<0,\ \operatorname{div}\Big|_R>0$；

(Ⅴ) $\operatorname{div}\Big|_N>0,\ \operatorname{div}\Big|_R>0$；　(Ⅵ) $\operatorname{div}\Big|_N>0,\ \operatorname{div}\Big|_R>0$。

这里为了确定 $l_1$ 上 $G$ 点左方 div 的符号，可取一点 $J\left(-\sqrt{a^2-4l},\ m_0\right)$，由此即可算出 $y_2=\frac{1}{2a}\left(-a+\sqrt{a^2-4l}\right)$，从而 $\operatorname{div}\Big|_N=0$。

又 $a^2-4l=0$ 时，$l_1=l_2$，由图14.5(1)取极限，即可得到相应的分支图。

## 附录 14.2 $(\delta-a)^2=[\delta(m-\delta)+l-1]\times[a(m-\delta)+l-1]$ 的图形

记 $\bar{m}=m-\delta$, $\bar{l}=l-1$, 将此方程按 $\bar{m}$ 展开, 得到:

$$a\delta\bar{m}^2+(a+\delta)\bar{l}\bar{m}+\bar{l}^2-(\delta-a)^2=0, \tag{14.86}$$

从而

$$\bar{m}=\frac{-\bar{l}(a+\delta)\pm(a-\delta)\sqrt{\bar{l}^2+4a\delta}}{2a\delta}. \tag{14.87}$$

前面已假设 $a<0$。现在看两种情况:

I) $-a>\bar{l}>0$

由(14.87)式知当 $\delta>\frac{\bar{l}^2}{-4a}$ 时, (14.86)没有轨迹。当 $\delta\longrightarrow\frac{\bar{l}^2}{-4a}-0$ 时,

$$\bar{m}\longrightarrow\frac{4a^2-\bar{l}^2}{2a\bar{l}}=\bar{m}_1<0.$$

又(14.86)与 $\bar{m}=0$ 交于两点:

$$(\bar{m}=0,\ \delta=a+\bar{l}<0)\text{ 及 }(\bar{m}=0,\ \delta=a-\bar{l}<0).$$

与 $\delta=0$ 交于 $\left(\bar{m}=\frac{a^2-\bar{l}^2}{a\bar{l}}=\bar{m}_2<0,\ \delta=0\right)$, 而

$$\frac{a^2-\bar{l}^2}{a\bar{l}}>\frac{4a^2-\bar{l}^2}{2a\bar{l}}.$$

又当 $\delta=a$ 时, (14.86)有重根 $\bar{m}=-\frac{\bar{l}}{a}=\bar{m}_3>0$。当 $\delta\longrightarrow0$ 时,

$$\bar{m}=\frac{-\bar{l}(a+\delta)\pm(a-\delta)\bar{l}\left(1+\frac{2a\delta}{\bar{l}^2}+h.o.t\right)}{2a\delta}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a^2-\bar{l}^2}{a\bar{l}}+h.o.t,\\[2ex]\dfrac{-2a\bar{l}}{2a\delta}\longrightarrow\pm\infty.\end{cases}$$

由此即可画出(14.86)的图形如图 14.21。

I) $a<\bar{l}<0$

这时有

$$\frac{4a^2-\bar{l}^2}{2a\bar{l}}>\frac{a^2-\bar{l}^2}{a\bar{l}}>0,\quad -\frac{\bar{l}}{a}<0,\ a+\bar{l}<a-\bar{l}<0.$$

故(14.86)有图 14.22.

对 $a$、$\bar{l}$ 的其他情况，(14.86)的图是类似的。

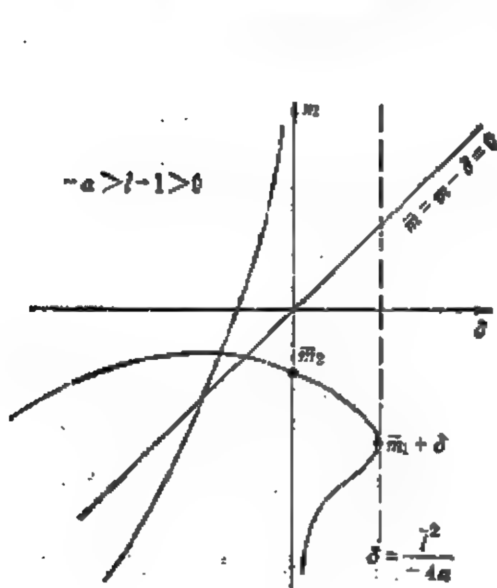


图 14.21

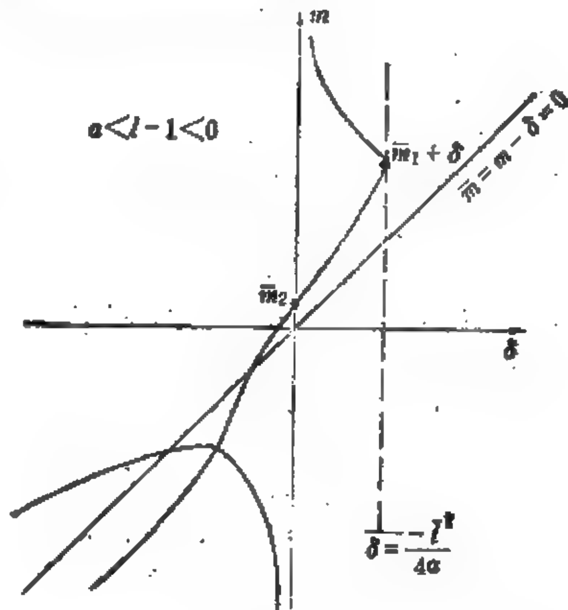


图 14.22

## 参考文献


[14.1] Ye Yanqian. Phase portrait of trajectories of the system $\dot{x}=-y(1+y-mx)$, $\dot{y}=x(1+ax)$, J. Nanjing Univ., 1963, no. 1, 1~18.

[14.2] Ma Zhien. J. Xian Jiaotong Univ. 1965, no. 1, 1~10.

[14.3] Cao Zhen-zhong. The global structure of trajectories of the differential equation $\dot{x}=-y+\delta x+my-y^2$, $\dot{y}=x(1+ax)$, J. Nanjing Univ. 1981, no. 4, 433~446.

[14.4] Ye Yanqian and others. The theory of limit cycles, Trans. Math. Monographs. V.66(1986), Amer. Math. Soc.

[14.5] Cao Yulin. Bifurcation curves of system (I), The approach to the bifurcation curve and its uniqueness for the equations $\dot{x}=-y+mx+mxy-y^2$, $\dot{y}=x(1+ax)$, J. Nanjing Univ. 1984, V.20, no.4, 655~663.

[14.6] Cao Yulin. Uniqueness of bifurcation curves for equations of type (Ⅲ), Chin. Ann. Math. A7(1), 1986, 73～82.

[14.7] 梁肇军。多项式微分系统全局分析导引。1989, 华中师大出版社。

[14.8] 罗定军。(Ⅲ)$_{\delta=m=0}$类方程当$ln\geq 0$时的全局相图和分支曲面。南京大学学报,1963, no.1.

[14.9] 孙开洤。方程$\frac{dy}{dx}=\sum\limits_{0\leq i+j\leq 2} q_{ij}x^iy^j/\sum\limits_{0\leq i+j\leq 2} p_{ij}x^iy^j$之定性研究。厦门大学学报,12(1965), no. 1, 35～50.

[14.10] Liang Zhaojun. Global topological structure and bifurcation curves for an equation of type (Ⅲ)$_{\delta=m=0}$, J. of Central Normal Univ., 1984, no. 3, 19～30.

[14.11] Liang Zhaojun and Ye Yanqian. The global structure and bifurcation curves of systems of type(Ⅲ)$_{\delta=n=0}$, J. Eng. Math. v.2(1985), no.1, 33～37.

[14.12] Dong Yuzhi, Ma Zhien and Wany Ernian. On bifurcation curves of system $(E_2)$ having symmetry centre, saddle points and fine foci, J. Xi'an Jiaotong Univ. v.22(1988), no.1, 47～54.

[14.13] 梁肇军。具三阶细焦点的二次系统的分界线环。数学杂志。1986, no. 4, 411～417.

[14.14] 路钢。有三阶细焦点的二次微分系统的全局拓扑结构与分支曲线。华中师大学报,常微分方程专辑,1986, no.2, 71～96.

[14.15] Chen Zhiying, Yan Zhong, Zhao Shenqi, Sun Jianhua and Luo Dingjun. Qualitative-numerical method to study the limit cycle problems of planar systems, J. Nanjing Univ. 1987, no.1, 99～106.

[14.16] Zhao Shenqi. The qualitative-numerical analysis of the limit cycle bifurcation for system of type (Ⅰ)$_{l=0}$, Ann. of Diff. Eqs., 3(2), 1987, 213～224.

[14.17] Yan Zhong. The study of limit cycles for the system of type (Ⅰ)$_{n=0}$, Ann. Diff. Eqs.2(1986), 461～474.

[14.18] Sun Jianhua. The limit cycles and bifurcation surfaces of system(Ⅲ)$_{m=0}$, Ann. Diff. Eqs.4(1), 1988, 71～83.

[14.19] Yan Zhong and Luo Dingjun. The study of the limit cycle bifurcations for the quadratic system of type (Ⅰ), 1)Ann.Diff.Eqs. 6(2), 1990, 225～240; 2)J. Nanjing Univ., Math.Biqurt., 1993, 57～65.

[14.20] Rousseau C. Example of a quadratic system with two cycles appearing in a homoclinic loop bifurcation, J. Diff. Eqs. 66(1987), 140～150.

[14.21] Ye Yanqian.Bifurcation theory of a certain quadratic system Chin. Ann. Math, 1993, 14(B), 427～434.

[14.22] Ye Yanqian. Bifurcation diagrams of quadratic differential

systems having one focus and one saddle, Research Report No. 153, Juny 1992, Centre de Recerca Matematica, Institut d'Estudis Catalans.

[14.23] Ye Yanqian. Bifurcation curves for a quadratic differential system of type (I) (to aqqear).

[14.24] Ye Yanqian. Bifurcation problem of bounded quadratic systems, Research Report, No. 158, Juny 1992, Centre de Recerea Matematica, Institut d' Estudis Catalans.

[14.25] Averin B P. On the limit cycles of a system, close to a linear eonservetive system, I All Union Conference on the Qualitative heory of Differenti al Equations, Samarkand, Oct. 1973. Abstracts, pp 5～6.

[14.26] Averin B.P. On the limit cycles of a system, close to a conservative system, Diff. Eqs. Sbornik Trud. Mat.Kat.Ped.Inst.RSFSR, no. 3, Rjazan, 1974, 3～6.

[14.27] Averin B P. On the limit cycles of a system, close toa onservative system, Diff. Eqs. Sbornik Trud Mat.Kat. Ped. Inst. RSFSR, no. 1, Rjazan, 1973.

[14.28] Bogdanov R I. Bifurcation of a limit cycle for a family of rectorfields in the plane, Trudy Seminar Petrovskii. v. 2 (1976), 23～35.

[14.29] Kutukova L T. The number of limit cycles close to a conservative quadratic one, Some questions of differential and integral equations and their applications, no. 3, 69～85, Yakutsk, Gos.Univ.Yakutsk(1978).

[14.30] Iljashenko Yu S. The multiplicity of limit cycles arising from perturbations of the form $W'=P_2/Q_1$ of a Hamiltonian equation in the real and complex domain, Trudy Sem. Petrovski, 3 (1978), 49～60.

[14.31] Huang Qiming and Li Jibin. Study by computer of a planar quadratically disturbed Hamiltonian system with two centers, J. Yunnan Univ V.7 (1985), no.4, 392～399.

[14.32] Li Cunfu and Xu Yumin Poineare bifurcations of a quadratic system with a pair of isochronous centers, J.Kunming Institute of Technology, no.4(1986), 80～87.

[14.33] Li Jibin and Chen Xiaoqiu Poincare branching of a class of second degree planar systems, Kexue Tongbao, 31 (1986), no. 16, 1213～1217.

[14.34] Wang Shidong and Li Jibin.Poincare Bifurcations and Chaotic Behavior in the Disturbed Planar Quadratic System, (Preprint, 1986).

[14.35] Drachman B, van Gils S.and Zhang Zhifen. Abelian Integrals for quadratic Vecetor fields, J.reine angew Math. 382 (1987), 165～180.

[14.36] Chicone C and Jacobs M, Bifurcation of limit cycles from quadratic isochrones, Dep. of Math, Univ.of Missouri, Columba, 1989.

[14.37] Gavrilov L and Horozov E.Limit cycles and zeros of Abelian integrals satisfying third order Picard-Fuchs equations, Lect.Notes in Math. no.1455, 1990.

[14.38] Van Horssen W T and Reyn J W, Bifurcation of limit cycles in a particular class of quadratic systems, Report of the Faculty of Tech. Math.91～76, 1991, Delft Univ.of Technology.

[14.39] van Horssen W T and Kooij R E, Bifurcation of limit cycles in a particular class of quadratic systems with two centers, Rep. of the Faculty of Tech.Math 92～48, 1992, Delft Univ of Technology.

[14.40] Zegeling A. Limit cycles in quadratic systems. Doctoral Thesis, (1991), Univ.of Tech, Delft, The Netherlands, 1～16o.

[14.41] Zoladek H. The cyclicity of triangles in quadratic systems, Institute of Math.Univ of Warsaw 1992.

[14.42] Mourtada A. Cycicite finie des polycycles hyper-boliques des champs de vecteurs du plan:mise sous forme normale, Lect. Notes in Math V. 1455, 1990, 272～314.

[14.43] 沈伯骞。二次系统的二重极限环和从无限大分界线环分支出两个极限环的例子(预印本,1992)。

[14.44] 沈伯骞。二次系统含两个无穷远奇点的细无限大分界线环分支出两个极限环的例子(预印本,1992)。

[14.45] 沈伯骞。二次系统从弓形分界线环分支出两个极限环的例子(预印本1992)。

[14.46] Dumortier F and Fiddelaers P. Quadratic models for generic, local 3-parameter bifurcations on the plane, L. U. C. Dipenbeck, Belgium (1991).

[14.47] Litvinenko D V.The number of limit cycles in systems that are close to conservative, Akad. Nauk SSSR, Inst. Prikl. Mat., Reprint, 1985, no.2.

[14.48] Li Jibin and Ou Yuchua Global bifurcations and chaotic-behaviour in a disturbed quadratic system with two centers, Acta Math. Appl. Sinica, no.3, vol. 11(1988), 312～328.

[14.49] Zoladck H. Quadratic systems with centers and their perturbations, J.Diff.Eqs.109(1994).223～273.

[14.50] Obi C. Researches on the equation (E): $\ddot{x}+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\dot{x}+x+\varepsilon_3x^2=0$, Proc. Camt. Phil. Soc. 50(1954), 26～32.

[14.51] Luo Dingjun. Global limit cycle bifurcations of system $\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+ny^2$, $\dot{y}=x+x^2$ (Preprint)

[14.52] Rousseau C and Schlomiuk D. Generalized Hopf bifurcations and applications to planar quadratic systems, Ann. Polonici Math. 49 (1988), 1~16.

[14.53] Qian Tifei. Bifurcation diegram for the quadratic differential system of type$(I)_{n=0}$, Preprint, 1992.

[14.54] 陈孝玖。一类二次系统的 Poincaré 分支。汕头大学学报, 1986.

[14.55] Jian Qibao. Determination of the sign of the divergence of quadratic systems at singulov points. J. Nanjing Univ, Math. Biqurt., 1993, 40~47.

[14.56] Jian Qibao. Construction of Dulac functions for polynomial systems (Preprint, 1993).

[14.57] 刘一戎。$E_n$ 的奇点量与几类分支问题。中国科学(A), 1992, no. 12, 1233~1241.

[14.58] Li C Z, Llibre J and Zhang Z F. Abelian integrals of quadratic Hamiltonian vector fields with an invariant straight line (Preprint, 1993).

[14.59] Gavrilov L and Horozov E. Limit cycles of perturbations of quadratic Hamiltonian vector fields, J. Math. pures appl., 1993, vol. 72. 213~238.

[14.60] 张芷芬, 李承治。一类二次 Hamilton 系统在二次扰动下的三参数开折。南京大学学报。数学半年刊, 增刊, 1993, 97~105.

[14.61] Cherkas L A. Bifurcation of limit cycles of quadratic systems on the plane, Int. Conf. Diff. Eqs., Barcelona, 1991, 390~392, World Sci., 1993.

[14.62] Perko L M. A global analysis of the Bogdanov-Takens system, SIAM J. Appl. Math., 1992, vol. 52, no.4, 1172~1192.

[14.63] Gaiko V A. Bifurcation of limit cycles of quadratic systems in the plane, Dissertation, Minsk., 1993, 100 pp.

[14.64] Gaiko V A. Separatrix cycles in quadratic systems, Dokl. A. N. Belarussia, 1993, vol. 37, no. 3.

[14.65] Zhang Z F and Li C Z. On the number of limit cycles of a class of quadratic Hamiltonian systems under quadratic perturbations, Inst. Math. and Dept. Math., Peking Univ., Res. Rep., 1993, no.33.

[14.66] Salam M A, Van Gils S A, Zhang Z F. Global bifurcation analysis of an adaptive control system, Diff. Int. Eqs, 1991, v.4, no. 6, 1353~1374.

# §15. 三次系统的分支理论

三次以至更高次多项式系统的分支理论，除了少数在§11中已提到的文章以外，都是属于局部的。其中大量的文章是关于高阶奇点的打散，一系闭轨线分支出极限环以及高阶细焦点分支出小振幅极限环的。关于前二者，问题的一个主要来源是：考虑三维或更高维空间中的自治系统，设原点是一高阶奇点，系统在原点的线性变分方程在中心流形上有如下三种线性部分中的一种：

$$A_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\text{或}A_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&\omega\\0&0&-\omega&0\end{pmatrix}\tag{15.1}$$

为了研究系统在这种奇点附近的开折，可以先将方程化为法式(normal form)，然后来研究其截断方程(多项式系统)的分类和开折．例如，对应于 $A_2$，按上法所得的截断方程经变换后可化为

$$\begin{cases}\dot{x}=\varepsilon_1x+axy+\bar{d}_1x^3+\bar{d}_2xy^2,\\ \dot{y}=\varepsilon_2+bx^2+cy^2+\bar{d}_3x^2y+\bar{d}_4y^3.\end{cases}\tag{15.2}$$

或

$$\begin{aligned}&\dot{x}=\lambda x+Bxy+\varepsilon[d_1x^3+d_2xy^2],\\ &\dot{y}=\frac{1}{4}-y^2-x^2+\varepsilon[d_3x^2y+d_4y^3].\end{aligned}\tag{15.3}$$

其中 $\lambda$、$\varepsilon$ 为小参数．当 $\lambda=\varepsilon=0$ 时，(15.3)成为

$$\dot{x}=Bxy,\quad \dot{y}=\frac{1}{4}-y^2-x^2;\tag{15.4}$$

它有首次积分

$$H=\frac{B}{2}\left[\frac{x^{q+1}}{4}-x^{q+1}y^2-\frac{x^{q+3}}{1+B}\right],\quad q=\frac{2}{B}-1.\tag{15.5}$$

然后就可按§14后半部的思路(即求$A(h)$的零点)研究(15.3)当$\lambda\varepsilon\neq0$时的分类和极限环的个数(但方法不同)。又如对(15.1)中的$A_1$,用同样的方法可得方程:

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=\mu+\nu y+x^2\pm xy. \tag{15.6}$$

其中$\mu$、$\nu$为小参数,称为Bogdanov-Takens分支的普适开折,$\mu=\nu=0$时,原点为二阶尖点。推广(15.6)又可研究三阶尖点的普适开折($\varepsilon_i$为小参数):

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=\varepsilon_1+\varepsilon_2 y+x^2+\varepsilon_3 xy+x^3y, \tag{15.7}$$

和四阶尖点

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=x^2\pm x^4y \tag{15.8}$$

的普适开折($\varepsilon_i$为小参数):

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=\varepsilon_1+\varepsilon_2 y+x^2+\varepsilon_3 xy+\varepsilon_4 x^3y\pm x^4y. \tag{15.9}$$

此外,还有研究方程

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-(x^3+Rx^2+Nx+M)+\delta(By-x^2y) \tag{15.10}$$

和($\varepsilon$为小参数):

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-(x^3-x-\lambda)+\varepsilon y(\alpha+\beta x+x^2) \tag{15.11}$$

的同样的问题。关于这方面可参考文献[15.1]~[15.15]及[15.54]~[15.61]等。由于在[15.16]、[15.17],特别是[15.18]中对于用Picard-Fuchs方程、Riccati方程以及其他方法研究上列方程的分支和普适开折问题已有详尽的介绍,故本书从略。

注意:在(15.6)中不出现$y^2$项,在(15.7)、(15.9)中不出现$x^2y$项,都是由法式与普适开折理论决定的,可参考[15.18]。上列方程的另一个特点是:含小参数的项都集中在一个方程的右边。

与上列工作不同,自1984年以来,李继彬等为了寻找三次系统与二次系统从一系闭轨线能分支出多少个极限环以及它们可能有多少种不同形式的分布,做了许多工作。除了关于二次系统的已在§14作简要介绍以外,关于三次系统的有文献[15.9]~[15.28]、[15.52]、[15.53],其中正常项和小扰动项都可随问题的需要而设置。且小扰动项可同时在两个方程的右方出现。在

[15.21]、[15.23]和[15.28]中他们都得到 11 个极限环，或呈 $C_9^1\supset 2[C_3^1\supset 2C_1^2]$ 分布，或呈 $C_7^1\supset 2[C_3^1\supset 2C_1^2]$ 分布[1)]，如图 15.1 和 15.2 所示。下面较详细地介绍文献[15.21]的工作，以说明他们所用的方法。

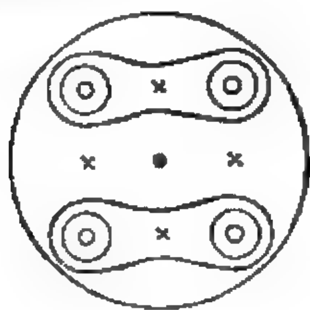


图 15.1

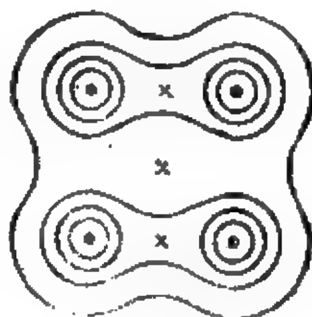


图 15.2

考虑方程：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y(1-cy^2)+\mu x(mx^2+ny^2-\lambda)=P(x,\ y,\ \lambda),\\ \dot{y}&=-x(1-ax^2)+\mu y(mx^2+ny^2-\lambda)=Q(x,\ y,\ \lambda).\end{aligned}\tag{15.12}_\mu$$

其中 $a>c>0$，$0<\mu\ll 1$，$m$、$n$ 是固定参数，$\lambda$ 是可变参数。当 $\mu=0$ 时，$(15.12)_0$ 有九个有限远奇点：

$$O(0,\ 0)、A_1^0\left(\frac{1}{\sqrt{a}},\ \frac{1}{\sqrt{c}}\right)、A_2^0\left(-\frac{1}{\sqrt{a}},\ \frac{1}{\sqrt{c}}\right)、$$

$$A_3^0\left(-\frac{1}{\sqrt{a}},\ -\frac{1}{\sqrt{c}}\right)、A_4^0\left(\frac{1}{\sqrt{a}},\ -\frac{1}{\sqrt{c}}\right)\tag{15.13}$$

是中心。

$$S_1^0\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{c}}\right)、S_2^0\left(0,\ -\frac{1}{\sqrt{c}}\right)、$$

$$S_3^0\left(-\frac{1}{\sqrt{a}},\ 0\right)、S_4^0\left(\frac{1}{\sqrt{a}},\ 0\right)\tag{15.14}$$

是鞍点。当 $0<\mu\ll 1$ 时，$(15.12)_\mu$ 仍有九个有限远奇点，分别以 $O$、$S_i$、$A_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 记之。所有这些奇点都位于曲线

$$ax^4+cy^4-(x^2+y^2)=0\tag{15.15}$$

上面。若将(15.15)改写为极坐标形式：

1) C的上标表示极限环数，下标表示这些环内含的奇点数，⊃表示“包含”。

$$r^2=\frac{1}{a\cos^4\theta+c\sin^4\theta} \text{ 与 } r=0, \tag{15.16}$$

则除 $O$ 在 $r=0$ 上以外，$A_i$ 与 $S_i$ 都在另一曲线上，记 $A_1$、$A_2$ 的坐标为 $A_1(\xi_1,\ \eta_1)$ 与 $A_2(\xi_2,\ \eta_2)$，则由 (15.12)$_\mu$ 容易算出：

$$\begin{aligned}
\xi_1&=\frac{1}{\sqrt{a}}+\left[\frac{1}{2\sqrt{c}}\mu+O(\mu^2)\right]\left[\lambda-\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{c}\right)\right],\\
\eta_1&=\frac{1}{\sqrt{c}}-\left[\frac{\mu}{2\sqrt{a}}+O(\mu^2)\right]\left[\lambda-\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{c}\right)\right],\\
\xi_2&=-\frac{1}{\sqrt{a}}+\left[\frac{1}{2\sqrt{c}}\mu+O(\mu^2)\right]\left[\lambda-\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{c}\right)\right],\\
\eta_2&=\frac{1}{\sqrt{c}}+\left[\frac{1}{2\sqrt{a}}\mu+O(\mu^2)\right]\left[\lambda-\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{c}\right)\right].
\end{aligned} \tag{15.17}$$

$A_3$ 与 $A_1$，$A_4$ 与 $A_2$ 分别对称于原点，故亦有类似的表达式。由 (15.17) 可见当 $\mu\to 0$ 或 $\lambda\to\frac{m}{a}+\frac{n}{c}$ 时，有 $A_i\to A_i^0$，$S_i\to S_i^0$。

(15.12)$_0$ 有首次积分

$$H(x,\ y)=2(x^2+y^2)-ax^4-cy^4=h, \tag{15.18}$$

其极坐标形式为：

$$\begin{aligned}
r^2=r^2(\theta,\ h)&=\frac{1\pm\sqrt{1-h(a\cos^4\theta+c\sin^4\theta)}}{a\cos^4\theta+c\sin^4\theta}\\
&\triangleq\frac{1\pm\sqrt{V(\theta,\ h)}}{u(\theta)}.
\end{aligned} \tag{15.19}$$

以后简记

$$r_+^2=\frac{1+\sqrt{V}}{u},\quad r_-^2=\frac{1-\sqrt{V}}{u}. \tag{15.20}$$

当 $h$ 变动时，(15.18) 确定几族性质不同的 4 次代数曲线：

1) $\{\Gamma_1^h\}$：$-\infty<h<\frac{1}{a}$，它们是包围九个奇点的闭曲线；

2) $\{\Gamma_2^h\}$，$0<h<\frac{1}{a}$，它们是只包围 $O$ 的闭曲线；

3) $\{\Gamma_3^h\}$，$\frac{1}{a}<h<\frac{1}{c}$，它们是分别包围 $A_1^0$、$A_2^0$、$S_1^0$ 和 $A_3^0$、$A_4^0$、$S_2^0$ 的两族闭曲线；

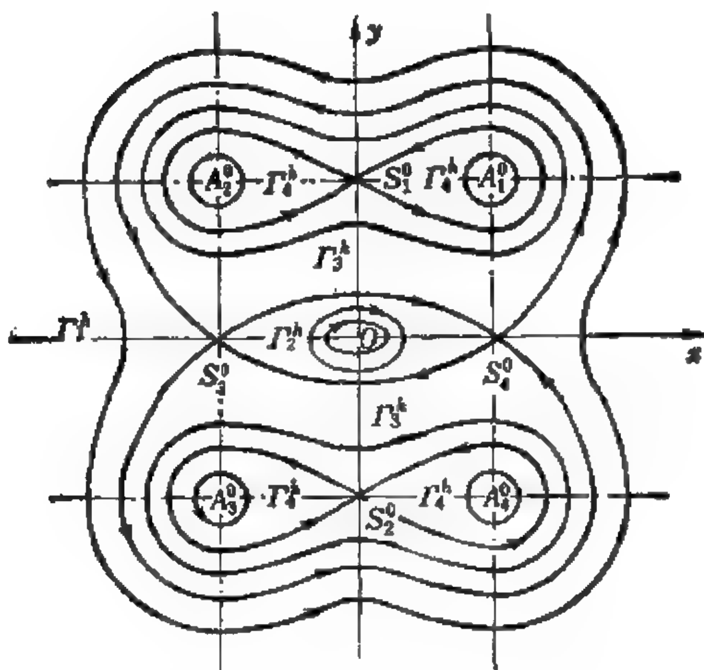



图 15.3

4) $\{\Gamma_4^h\}$，$\frac{1}{c}<h<\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$，它们是分别包围仅一个奇点 $A_i^0$ 的四族闭曲线；

5) 当 $h=\frac{1}{a}$ 时，(15.18)表示连接奇点 $S_3^0$ 与 $S_4^0$ 的四条异宿分界线，它们一起构成两个分界线环。当 $h=\frac{1}{c}$ 时，(15.18)表示过 $S_1^0$ 与 $S_2^0$ 的两条∞字形分界线环。

不难看出，随着 $h$ 的增大，$\Gamma_2^h$ 向外扩大，而其他三族曲线则向内缩小。

今以 $D^h$ 记 $\Gamma^h$ 所围的平面区域，与§14中(14.75)式一样，我们来研究下一二重积分

$$
\begin{aligned}
\Phi(h) &= \iint_{D^h}[P''_{\mu x}(x,y,\mu)+Q''_{\mu y}(x,y,\mu)]\Big|_{\mu=0}dxdy \\
&= \iint_{D^h}4(mx^2+ny^2)dxdy-2\lambda\iint_{D^h}dxdy \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^4(\theta,h)g(\theta)d\theta-2\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2(\theta,h)d\theta。 \qquad (15.21)
\end{aligned}
$$

其中 $g(\theta)=m\cos^2\theta+n\sin^2\theta$, $r(\theta,h)$ 见(15.19)式

再定义

$$\lambda_i(h)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}r_i^4(\theta,h)g(\theta)\Big/\int_0^{\frac{\pi}{2}}r_i^2(\theta,h)d\theta. \tag{15.22}$$

当 $i=1,2$, 其中

$$r_1=r_+,\ -\infty<h<\frac{1}{a};\ r_2=r_-,\ 0<h<\frac{1}{a}. \tag{15.23}$$

又

$$\begin{aligned}\lambda_i(h)&=\int_{\theta_1(h)}^{\theta_i(h)}(r_+^4-r_-^4)g(\theta)d\theta\Big/\int_{\theta_1(h)}^{\theta_i(h)}(r_+^2-r_-^2)d\theta\\&=\int_{\theta_1(h)}^{\theta_i(h)}\frac{2\sqrt{V}g(\theta)}{u^2(\theta)}d\theta\Big/\int_{\theta_1(h)}^{\theta_i(h)}\frac{\sqrt{V}}{u}d\theta,\end{aligned} \tag{15.24}$$

当 $i=3,4$, 其中

$$\theta_1(h)=\frac{1}{2}\arccos\left[\frac{2\left(\frac{a+c}{h}-ac\right)^{\frac{1}{2}}-(a-c)}{a+c}\right],$$

$$\theta_3(h)=\frac{\pi}{2},\quad \frac{1}{a}<h<\frac{1}{c}; \tag{15.25}$$

$$\theta_4(h)=\frac{1}{2}\arccos\left[-\frac{2\left(\frac{a+c}{h}-ac\right)^{\frac{1}{2}}+(a-c)}{a+c}\right],$$

$$\frac{1}{c}<h<\frac{1}{c}+\frac{1}{a}.$$

易见在每一 $\lambda_i(h)$ 的定义域中它是 $h$ 的单值连续函数。它们称为(15.12)$_\mu$对应于$\{\Gamma_i^h\}$的判定函数。由(15.21)式容易看出,对于 $h=h_0$, $\Phi(h_0)=0$ 当且仅当 $\lambda=\lambda(h_0)$; 且

$$\Phi'(h_0)=\cdots=\Phi^{(k-1)}(h_0)=0,\ \Phi^{(k)}(h_0)\neq 0,$$

当且仅当 $\lambda'(h_0)=\cdots=\lambda^{(k-1)}(h_0)=0$, $\lambda^{(k)}(h_0)\neq 0$。因此,为了研究由一系闭轨线$\{\Gamma_i^h\}$对于 $h$ 的那些数值能分支出极限环以及极限环的稳定性,我们只要把 4 个 $\lambda_i(h)$ 的图形搞清楚就够了。为此,重要的是,确定诸 $\lambda_i(h)$ 在定义域边界上的值以及当 $h$ 趋于边界时 $\lambda_i'(h)$ 的极限值。按照前面四族闭曲线$\{\Gamma_i^h\}$的定义域,可知这些边界值是:

$$b_1=\lambda_1\left(\frac{1}{a}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}r_+^4\left(\theta,\ \frac{1}{a}\right)g(\theta)d\theta\Big/\int_0^{\frac{\pi}{2}}r_+^2\left(\theta,\ \frac{1}{a}\right)d\theta$$

$$=\frac{m\left(2I_3+2I_7-\frac{1}{a}I_1\right)+(n-m)\left(2I_4+2I_9-\frac{1}{a}I_2\right)}{I_1+I_5},$$

$$b_2=\lambda_2\left(\frac{1}{a}\right)=\int_0^{2\pi}r_-^4\left(\theta,\ \frac{1}{a}\right)g(\theta)d\theta\Big/\int_0^{\frac{\pi}{2}}r_-^2\left(\theta,\ \frac{1}{a}\right)d\theta$$

$$=\frac{m\left(2I_3-2I_7-\frac{1}{a}I_1\right)+(n-m)\left(2I_4-2I_9-\frac{1}{a}I_2\right)}{I_1-I_5},$$

(15.26)

$$b_3=\lambda_3\left(\frac{1}{a}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{V\left(\theta,\ \frac{1}{a}\right)}\frac{g(\theta)}{u^2(\theta)}d\theta\Big/\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{V\left(\theta,\ \frac{1}{a}\right)}}{u(\theta)}d\theta$$

$$=2[mI_7+(m-n)I_9]/I_5;$$

$$b_4=\lambda_3\left(\frac{1}{c}\right)=\lambda_4\left(\frac{1}{c}\right)=\int_{\theta_2\left(\frac{1}{c}\right)}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sqrt{V\left(\theta,\ \frac{1}{c}\right)}g(\theta)}{u^2(\theta)}d\theta\Big/$$

$$\int_{\theta_2\left(\frac{1}{c}\right)}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{V\left(\theta,\ \frac{1}{c}\right)}}{u(\theta)}d\theta$$

$$=2[mI_8+(n-m)I_{10}]/I_6;$$

$$b_5=\lambda_4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)=2\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{c}\right).$$

其中 $I_1$, $I_2$, …, $I_{10}$ 是下列十个定积分:

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{u(\theta)},\qquad I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta}{u(\theta)}d\theta,$$

$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{u^2(\theta)},\qquad I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta}{u^2(\theta)}d\theta,\qquad (15.27)$$

$$I_5=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{V\left(\theta,\ \frac{1}{a}\right)}}{u(\theta)}d\theta,\qquad I_6=\int_{\theta_2\left(\frac{1}{c}\right)}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{V\left(\theta,\ \frac{1}{c}\right)}}{u(\theta)}d\theta,$$

$$I_7=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{V\left(\theta,\ \frac{1}{c}\right)}}{u^2(\theta)}d\theta,\qquad I_8=\int_{\theta_1\left(\frac{1}{a}\right)}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{V\left(\theta,\ \frac{1}{c}\right)}}{u^2(\theta)}d\theta,$$

$$I_9=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{V\left(\theta,\ \frac{1}{a}\right)}\sin^2\theta}{u^2(\theta)}d\theta,$$

$$I_{10}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{V\left(\theta,\ \frac{1}{c}\right)}\sin^2\theta d\theta}{u^2(\theta)}.$$

它们的数值可用计算机准确地算出来(对于确定的 $a$, $c$)。

现在考虑 $a=2$, $c=1$, $m=1$, $n=-3$ 的特殊情况，于是(15.12) 成为：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y(1-y^2)+\mu x(x^2-3y^2-\lambda),\\ \dot{y}&=-x(1-2x^2)+\mu y(x^2-3y^2-\lambda).\end{aligned}\tag{15.28}$$

而 $g(\theta)=4\cos^2\theta-3$, 又：

$$\begin{aligned}b_1&=\lambda_1\left(\frac{1}{2}\right)=-3.32245,\\ b_2&=\lambda_2\left(\frac{1}{2}\right)=-0.19703,\\ b_3&=\lambda_3\left(\frac{1}{2}\right)=-4.0291,\\ b_4&=\lambda_3(1)=\lambda_4(1)=-4.80305,\\ b_5&=\lambda_4\left(\frac{3}{2}\right)=-5.\end{aligned}\tag{15.29}$$

故有 $b_2>b_1>b_3>b_4>b_5$。再证：

**引理 15.1**　$\lambda_1(h)<0$, $\lim\limits_{h\to-\infty}\lambda_1(h)=-\infty$, $\lim\limits_{h\to\frac{1}{2}-0}\lambda_1'(h)=-\infty$。

**证**　由(15.22)，先算分子：

$$\psi_1(h)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{g(\theta)\left(1+\sqrt{V}\right)^2}{u^2}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{g(\theta)\left(1+\sqrt{V}\right)^2}{u^2}d\theta$$

$$+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{g(\theta)\left(1+\sqrt{V}\right)^2}{u^2}d\theta+\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{g(\theta)\left(1+\sqrt{V}\right)^2}{u^2}d\theta,$$

在上式右边第三个积分中作代换 $\tilde{\theta}=\frac{\pi}{2}-\theta$, 并记

$$\tilde{g}(\theta)=g\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right),\ \tilde{u}(\theta)=u\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right),\ \tilde{V}(\theta)=V\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right),$$

即得

$$\psi_1(h)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[\frac{g(\theta)(1+\sqrt{V})^2}{u^2}+\frac{\tilde{g}(\theta)(1+\sqrt{\tilde{V}})^2}{\tilde{u}^2}\right]d\theta$$
$$+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{g(\theta)(1+\sqrt{V})^2}{u^2}d\theta, \tag{15.30}$$

注意：当$\theta\in\left(0,\ \frac{\pi}{6}\right)$时，$u(\theta)>\tilde{u}(\theta)$，又当 $h>0$ 时，$\sqrt{V}<\sqrt{\tilde{V}}$，故得：

$$\begin{aligned}&\tilde{u}^2g(\theta)(1+\sqrt{V})^2+u^2\tilde{g}(\theta)(1+\sqrt{\tilde{V}})^2\\&\leqslant u^2(\theta)(1+\sqrt{\tilde{V}})^2[g(\theta)+\tilde{g}(\theta)]\\&=-2u^2(\theta)(1+\sqrt{\tilde{V}})^2<0.\end{aligned}$$

即(15.30)式中两积分的被积函数为负 $\left(\text{当 } h\in\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right)\right)$，从而积分值为负。又(15.22)式中的分母恒正，故 $\lambda_1(h)<0$。

其次易见(15.22)式右边两被积函数之比趋于 $-\infty$ (当 $h\to-\infty$)，故 $\lim\limits_{h\to-\infty}\lambda_1(h)=-\infty$。

最后，记(15.22)右边的分子为 $\varphi_1(h)$。则有 $\psi_1=\lambda_1\varphi_1$。从而 $\psi_1'-\lambda_1\varphi_1'=\lambda_1'\varphi_1$，现在

$$\psi_1'(h)-\lambda_1(h)\varphi_1'(h)=\left[-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{g(\theta)}{u(\theta)}d\theta\right.$$
$$\left.-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{g(\theta)}{u\sqrt{V}}d\theta+\lambda_1(h)\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{2\sqrt{V}}\right]$$
$$+\left[-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{g(\theta)}{u\sqrt{V}}d\theta+\lambda_1(h)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{2\sqrt{V}}\right]. \tag{15.31}$$

上式右边第一个括弧内的诸积分对一切 $h\leqslant\frac{1}{2}$ 为有界，而第二个

括弧内的积分当 $h\to\frac{1}{2}-0$ 时在 $\theta=0$ 有奇性，又因 $g(\theta)>0$ $\Big($当 $\theta\in\left(0,\ \frac{\pi}{6}\right)\Big)$，且 $\lim\limits_{h\to\frac{1}{2}-0}\lambda_1(h)=-3.32245<0$，故当 $h\to\frac{1}{2}-0$时，(15.31)式右边趋于 $-\infty$。此外，$\lim\limits_{h\to\frac{1}{2}-0}\varphi_1(h)=2.69237>0$，因此 $\lim\limits_{h\to\frac{1}{2}-0}\lambda_1'(h)=-\infty$。 ▮

用同样的方法可证：

**引理 15.2** $\lambda_2(h)<0$，$\lim\limits_{h\to\frac{1}{2}-0}\lambda_2'(h)=+\infty$。

**引理 15.3** $\lambda_3(h)<0$，$\lim\limits_{h\to\frac{1}{2}+0}\lambda_3'(h)=-\infty$，$\lim\limits_{h\to1-0}\lambda_3'(h)=+\infty$。

**引理 15.4** $\lambda_4(h)<0$，$\lim\limits_{h\to1+0}\lambda_4'(h)=+\infty$。

又用计算机可算出各 $\lambda_i(h)$ 在其定义区间中都只有一个极值，即 $\lambda_1(h)$ 与 $\lambda_4(h)$ 各有一极大值；$\lambda_2(h)$ 与 $\lambda_3(h)$ 各有一极小值[1]。于是可以画出 $(h,\lambda)$ 平面上的分支图如图 15.4 所示。

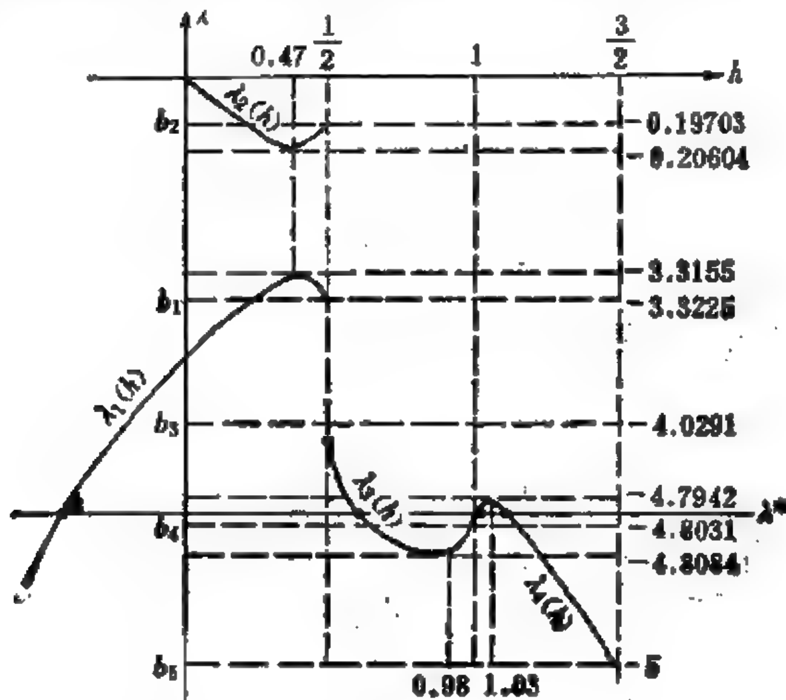



图 15.4

1) 由 4 个引理可以看出每一个 $\lambda_i(h)$ 至少各有一个极值。

现在如果画一水平直线 $\lambda=\lambda^*$，使与 $\lambda_4(h)$ 交于两点(它们对应于每一 $A_i$ 外围各有两个环，故共有 8 个环)，与 $\lambda_3(h)$ 交于一点(它对应着两个较大的环，分别包围 $A_1$、$A_2$、$S_1$ 和 $A_3$、$A_4$、$S_2$)，与 $\lambda_1(h)$ 交于一点(它对应着一个包含所有奇点的大环)，那末我们就看出方程 $(15.28)_{\lambda^*}$ 当 $0<\mu\ll1$ 时至少有 11 个环，它们呈图 15.1 所示的

$$C_9^1\supset2[C_3^1\supset2C_1^2]$$

型分布。这里 $C_9^1$ 表示最外面的大环，$C_3^1$ 表示一个包含三个奇点的环，$C_1^2$ 表示两个套在一起而内部只含一个奇点的小环。它前面的 2 表示这种环组有两套，方括弧前面的 2 也有类似的含义。

注意：如果在 $(15.12)_\mu$ 中取 $m=-1$，$n=1$，则最多只能得到 7 个极限环，呈 $C_9^1\supset2[C_3^1\supset2C_1^1]$ 型分布。

对于三次系统的扰动，在李继彬等的其他文章中所取的扰动项大致和 $(15.12)_\mu$ 中的一样。但对于二次系统，由一系或两系闭轨线能分支出多少个极限环，以及它们能有些什么样的分布，由于他们曾希望得到 (2, 2) 分布的实例，故所取的小扰动项要更多更全一些(见§14 的参考文献[14.33])，所用以寻找 $A(h)$ 的零点的方法也比这里介绍的更多一些，可惜最后都得不到 (2, 2) 分布。实际上，我们以后将证明：对于二次系统来说，极限环的 (2, 2) 分布是不存在的。

关于三次系统以及 Liénard 型多项式系统，除了以上所述的两类计三十余篇文章以外，还有需要提到的是由英国学者 N.G. Lloyd 和他的学生们所做的，由细焦点分支出极限环(称为小振幅环)的一系列工作（见文献[15.29]～[15.41]）。其中关于从一个细焦点或中心能分支出几个极限环的一些主要结果已在§5 中有所介绍。但是更有趣的是，从几个细焦点同时分支出极限环的问题。如所熟知，在二次系统的情况，若两个焦点都是细焦点，则它们都只能是一阶的，且有不同的稳定性。因而只能通过小扰动得到 (1, 1) 分布的小振幅环，这种例子已在文献[15.42]中举出过。但对三次系统来说，情况就复杂得多，细焦点的个数或它们所能分

支出的小振幅环的分布情况只得到一些零星的结果，距离彻底解决问题还很远。

文献[15.36]中证明了：在方程

$$\begin{cases}\dot{x}=\lambda x+y+Ax^2+(B+2D)xy+Cy^2+\mu x^3\\ \qquad +Gx^2y+\mu xy^2+Gy^3\\ \dot{y}=-x+\lambda y+Dx^2+(E-2A)xy-Dy^2\\ \qquad -Gx^3+\mu x^2y-Gxy^2+\mu y^3\end{cases}\tag{15.32}$$

中，若 $(A+C)DG\neq 0$，又 $G$、$E$、$B$、$\mu$、$\lambda$ 与 $\alpha=E-5(A+C)$，$\beta=(A+2C)C+D^2-4G$ 满足条件：

$$G<0,\ \beta<0,\ E\alpha>0,\ BD>0,$$

$$\mu BG(A+C)>0,\ \lambda B(A+C)>0,$$

且
$$|\lambda|\ll|\mu|\ll|B|\ll|\alpha|\ll|\beta|,$$

则(15.32)至少存在5个包围 $O(0,\ 0)$ 的极限环。其中最外一个环内部至少包含三个奇点，且其定向与其他4个环的定向相反，它是由无穷远处产生的。

又对于右边缺二次项的三次系统[1)]：

$$\begin{cases}\dot{x}=\lambda x+y+Fx^3+Gx^2y+(H-3P)xy^2+Ky^3,\\ \dot{y}=-x+\lambda y+Lx^3+(M-H-3F)x^2y+(N-G)xy^2+Py^3.\end{cases}\tag{15.33}$$

在文献[15.36]中证明了：若 $O(0,\ 0)$ 是阶数 $\geqslant 3$ 的细焦点，则(15.33)没有其他细焦点。若 $O$ 是二阶细焦点，则或是没有其他细焦点，或是有两个一阶细焦点，它们的稳定性与 $O$ 的相反。又若 $O$ 是一阶细焦点，且存在另两个细焦点，则当 $2K+N-2G\neq 0$ 时，它们的阶数都不大于3。这时再加一些其他条件后，可使 $(15.33)_{P=0}$ 至少存在7个极限环，其中一个在 $O$ 外围，另在其他两焦点外围各有3个环。为了计算各阶焦点量，需要在计算机上进行大量计算，以及对计算技巧的改进(见文献[15.50]、[15.51])。

类似的结果也见于文献[15.43]，其中证明了：

1) 注意此方程确定平面上关于 O(0, 0)对称的向量场。

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+(1-4b+\varepsilon_1)x^2y+(a+\varepsilon_2)xy^2+by^3,\\ \dot{y}=x+\lambda y-x^3+(5a+\varepsilon_3)x^2y+(4-b+\varepsilon_4)xy^2-2ay^3.\end{cases}\tag{15.34}$$

当 $a(4b+3a^2)(a^2+2b-2b^2)\neq 0$; $b\in(-1,0)$，且 $|\varepsilon_i|\ll 1$ 时，在 $O(0,0)$ 外围至少有 5 个极限环，且在 $A(-1,0)$ 及 $B(1,0)$ 外围还各有一个环。注意：当 $\varepsilon_1=\cdots=\varepsilon_4=\lambda=0$ 时，$O$ 是(15.34)的五阶细焦点。又当 $\varepsilon_i\lambda\neq 0$ 时，$A$ 与 $B$ 外围的极限环是由无限大分界环破裂而产生的，故与前述[15.36]中的结论不矛盾。由于 5 是缺二次项的三次系统焦点的最高阶数，上列两项结果使人有理由相信这种系统最多只能有 7 个极限环，但尚无法证明。

文献[15.38]是一篇很好的综合报告，总结了N.G.Lloyd及其学生们在 1988 年前关于多项式系统定性理论方面所完成的工作。

文献[15.37]研究了 $n$ 次多项式系统：

$$\begin{cases}\dot{x}=y+p(x,y),\quad p(x,y)=\sum\limits_{\substack{i+j=2\\ i\geq 0,j\geq 1}}^{n}p_{ij}x^iy^j\\ \dot{y}=-x+q(x,y),\quad q(x,y)=\sum\limits_{\substack{i+j=2\\ i\geq 1,j\geq 0}}^{n}q_{ij}x^iy^j\end{cases}\tag{15.35}$$

能有多少个细焦点。证明存在这样的(15.35)有不少于$\left[\frac{1}{4}(n+2)\times(n-1)\right]$个一阶细焦点，且可经过小扰动使之产生$\left[\frac{1}{4}(n+2)\times(n-1)\right]$个小振幅环。又存在这样的 (15.35)，它有不少于$\left[\frac{1}{8}(n+2)(n-1)\right]-1$个二阶细焦点。

文献[15.33]研究多项式 Liénard 型方程

$$\dot{x}=y-F(x),\quad \dot{y}=-g(x)\tag{15.36}$$

(其中 $F$、$g$ 为 $x$ 的多项式)的小振幅环，得到如下几条十分简洁的结论，其中以 $\partial F$ 记$F$的次数；以$H$记(15.36)所能有的小振幅环的最多个数，$k(F)=\left[\frac{1}{2}(\partial F-1)\right]$，([ ]表示整数部分)：

1) 若$F$为奇次多项式，则 $H=k(F)$，不论$g$的次数如何；

2) 若$F$为偶次多项式,则 $H=\max(n, m)$, 这里设

$$\partial F=2n+2,\ \partial g=2m+2 \text{ 或 } 2m+3;$$

3) 若 $\partial F=2$ 而 $\partial g=2m$ 或 $2m+1$, 则 $H=m$;

4) 若 $\partial g=2$, $\partial F=2n+2$, 则 $H=n$;

5) 若 $g$ 为奇次多项式,则 $H=k(F)$。

比文献[15.33]更早些,在[15.29]中也有类似的一些结果。

关于多项式 Liénard 型方程(不妨设 $F(0)=0$):

$$\dot{x}=y-F(x),\quad \dot{y}=-x. \tag{15.37}$$

值得提到的是 Lins、de Melo 与 Pugh 的工作[15.44], 他们证明了:若 $\partial F=N$, $N=2n+1$ 或 $2n+2$, 又 $m\leqslant n$, 则必存在这样的系统(15.37), 使它恰有$m$个极限环。并且猜想:(15.37)不可能有多于 $k(F)=\left[\frac{1}{2}(\partial F-1)\right]$个的极限环。但这猜想仅当 $\partial F\leqslant 5$时已得到部分解决,见文献[15.45]、[15.46]、[15.47],其中[15.46]所用以证明极限环唯二性的技巧后来被许多人应用或改良, 使之适用于其他方程。

文献[15.29]中证明了:对于$O(0, 0)$外围的小振幅极限环来说,[15.44]的猜想是对的. 其法是用熟知的计算细焦点的各阶焦点量的办法算出了:

$$\dot{x}=y-a_1x-a_2x^2-a_3x^3-\cdots-a_{2n+2}x^{2n+2},\quad \dot{y}=-x \tag{15.38}$$

在其唯一焦点$O(0, 0)$的$n+1$个焦点量为

$$-a_1,\ -a_3,\ -a_5,\ \cdots -a_{2n+1}. \tag{15.39}$$

易见(15.39)已是(15.38)的全部焦点量.因为当它们都等于零时,(15.38)是一个有对称轴$x=0$的可积系统, $O$是中心。

关于(15.38)在$O$的小邻域中能且最多只能出现$n$个极限环,可用熟知的 Bautin 方法来证明,即选取

$$a_{2k-1}a_{2k+1}<0\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

且
$$|a_1|\ll|a_3|\ll|a_5|\ll\cdots\ll|a_{2n+1}|,$$

然后对第一方程没有$x$的奇次项的(15.38)先加上一项 $-a_{2n+1}x^{2n+1}$, 再加上一项 $-a_{2n-1}x^{2n-1}$, $\cdots$, 如此等等, 直到最后

加上一项 $-a_1x$, 这样就可在$O$外围产生$n$个小振幅环。

值得注意的是：以(15.39)中的任一 $a_{2k+1}(k=0, 1, \cdots, n)$作为参数，(15.38)都对它构成广义旋转向量场。因此，若设 $a_{2n+1}>0$, 则当加上 $-a_{2n+1}x^{2n+1}$ 项以后，$O$就成为方程的全局渐近稳定焦点(不论$|a_{2n+1}|$有多大)。其次，当加上第二项 $-a_{2n-1}x^{2n-1}$ 后，$O$变为不稳定，外部出现稳定极限环$\Gamma_1$, 它随$|a_{2n-1}|$的增大而扩大，只要$|a_{2n-1}|$足够大，$\Gamma_1$也可以非常大。然后，当加上 $-a_{2n-3}x^{2n-3}$ 以后，$O$又变为稳定焦点，外部出现不稳定环$\Gamma_2$, 随着 $a_{2n-3}$ 的增加，$\Gamma_2$将扩大，而$\Gamma_1$将缩小，如此等等。因此，只要§14 中所说的"不必要出现的半稳定环决不出现"的命题对(15.38)也成立，那末(15.38)对其系数的任何值在全平面将最多只能有$n$个极限环，亦即文献[15.44]中的猜想是成立的。

关于多项式系统(奇数次，没有无穷远奇点)由无穷远产生极限环的研究，除了文献[15.43]以外，还有[15.48]与[15.49]。

[15.48]对赤道上无奇点的奇次多项式系统借助于变换 $x=\frac{\cos\theta}{r}, y=\frac{\sin\theta}{r}$ 把赤道化为$(r, \theta)$坐标下方程的原点，然后仿Hopf分支的办法由 Poincaré 的返回映射来定义各阶焦点量，以及产生$k$个极限环的条件，为使返回映射

$$P(r_0)=r(2\pi)=u_1(2\pi)r_0+u_2(2\pi)r_0^2+\cdots$$

的各项系数可表示为原来多项式系统

$$\dot{x}=p_0+p_1(x, y)+\cdots+p_n(x, y),$$

$$\dot{y}=q_0+q_1(x, y)+\cdots+q_n(x, y)\quad (n\text{为奇数})$$

中各项系数的多项式，必须

$$p_n(x, y)=-y(x^2+y^2)^k,\ q_n(x, y)=x(x^2+y^2)^k\quad (n=2k+1)。\tag{15.40}$$

然后，文献[15.48]对满足条件(15.40)的三次系统：

$$\begin{cases}\dot{X}=-\eta Y+AX^2+(B+2D)XY+CY^2-Y(X^2+Y^2)\\ \dot{Y}=\eta X+DX^2+(E-2A)XY-DY^2+X(X^2+Y^2)\end{cases}\tag{15.41}$$

及
$$\begin{cases}\dot{x} = -\eta y + ax^2 + bxy + ey^2 - y(x^2+y^2)\\ \dot{y} = \eta x + cx^2 + dxy + x(x^2+y^2)\end{cases} \tag{15.42}$$

算出在 $O(0, 0)$ 的各 4 阶的焦点量与在∞处的各 5 阶焦点量。从而得到(15.41)与(15.42)为可积的几组条件。又证明存在形如：

$$\begin{cases}\dot{X} = \lambda_1 X - \eta Y + AX^2 + (B+2D)XY + CY^2\\ \qquad + \lambda_2 X(X^2+Y^2) - Y(X^2+Y^2),\\ \dot{Y} = \eta X + \lambda_1 Y + DX^2 + (E-2A)XY - DY^2\\ \qquad + X(X^2+Y^2) + \lambda_2 Y(X^2+Y^2)\end{cases} \tag{15.43}$$

的三次系统，它当 $\eta>0$ 时可存在{(4), 1}，{(3), 2}及{(2), 5}型的极限环分布；当 $\eta<0$ 时可存在{(4),2}，{(1),5}及{(2),4}型的极限环分布，这里{($k_1$), $k_2$}表示有 $k_1$ 个小环，$k_2$ 个大环。又对

$$\begin{cases}\dot{x} = \lambda x - y + a\alpha^{-1}x^2 + (5c\alpha^{-1} + \delta)xy + \alpha^{-1}ey^2\\ \qquad - y(x^2+y^2) + \lambda x(x^2+y^2),\\ \dot{y} = x + c\alpha^{-1}x^2 + \alpha^{-1}(3a + 5e + \varepsilon + \delta(a+1)c^{-1})xy\\ \qquad + x(x^2+y^2)\end{cases} \tag{15.44}$$

证明当 $|\lambda|$、$|\varepsilon|$、$|\delta|$、$|\alpha|$ 足够小且其他系数满足一定的条件时可以存在{(3, 1), 2}型分布的极限环，其中(3, 1)表示在 $O(0, 0)$ 外围有三个环，在奇点 $\left(0, \dfrac{e-\sqrt{e^2-4\beta}}{2\alpha}\right)$ 外围至少有一个环。文献[15 49]除了赤道分支出极限环的问题外，还研究了赤道的稳定性问题，给出一切解为有界的判据。

最近文献[15.59]研究了有三个细焦点或中心位于同一直线上的三次系统的细焦点阶数及可能产生小振幅环的个数。

## 参考文献


[15.1] Bogdanov R I. Bifurcation of a limit cycle for a family of vector fields on the plane, Trudy Seminar Petrovskii, 1976, 373～387.

[15.2] Bogdanov R I. Versal deformation of a singular point of a vector field on the plane in the case of zero eigenvalues, Trudy Seminar Petrovskii, 1976, 358～421.

[15.3] Cushman R and Sanders J A.A codimension two bifurcation with a third order Picard-Fuchs Equation, J.of Diff.Eqs.59, 1985, 243～256.

[15.4] Carr J, Shui-Nee Chow and Hale J K, Abelian integrals and bifurcation theory, J.of Diff.Eqs.59,1985, 413～435.

[15.5] Takens F. Unfoldings of certain singularities of vector fields Generalized Hopf bifurcations, J.of Diff.Eqs.14,1973, 476～493.

[15.6] Dangelmayr G and Guckenheimer J. On a four parameter family of planar vector fields, Arch.Rat.Mech. Anal.97, 1987, 321～350.

[15.7] Dumortier F, Roussarie R and Sotomayor J, Generic 3-parameter families of vector fields on the plane, unfolding a singularity with nilpotent linear part.The cusp case of codimension 3, Ergodic theory and dynamical systems, 7, 1987, 375～413.

[15.8] Dumortier F, Roussarie R and Sotomayor J, Generic 3-parameter families of planar vector fields, unfoldings of saddle, focus and elliptic singularities with nilpotent linear parts, preprint, 1988.

[15.9] Horozov E I.Versal deformations of equivariant vector fields under symmetries of order 2 and 3, Trudy Seminar Petrovskii 5, 1979, 163～192.

[15.10] Жолондек Хенрик, О версальности одного семейства симметричных векторных полей на плоскости, Мат. сбор. 120, 162, no. 4, 1983, 473～499.

[15.11] Zoladek H. Abelian integrals in non-symmetric perturbation of symmetric Hamiltonian vector field(Preprint, 1990).

[15.12] Zoladek H.Bifurcations of certain family of planar vector fields tangent to axes, J.Diff.Eqs.67, 1987, 1～55.

[15.13] Shui-Nee Chow, Chengzhi Li and Duo Wang. Uniqueness of periodic orbits of some vector fields with codimension two singularities, J.Diff.Eqs.77, 1989, 231～253.

[15.14] Chengzhi Li and Rousseau C. A system with three limit cycles appearing in a Hopf bifurcation and dying in a homoclinic bifurcation: The cusp of order 4, J.Diff.Eqs.79, 1989, 132～167.

[15.15] Li C Z and Rousseau C. Codimension 2 symmetric homoclinic bifurcations and application to 1:2 resonance, Can. J.Math.42, 1990, 191～212.

[15.16] Chow S N and Hale J K. Methods of bifurcation theory, Springer-Verlag, New York, 1982.

[15.17] Guckenheimer J and Holmes P.Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields, Springer-Verlag, New York, 1983.

[15.18] Chow S N, Li C Z and Wang D.normalforms and bifurcations of vecto: fields.Cambridge Univ.Press, 1994.

[15.19] 李继彬。平面三次系统的一类极限环分布。中国科学(A辑), 7, 1984, 586～596.

[15.20] 李继彬，李存富。平面三次 Hamilton 系统与($E_3$) 的极限环分布。数学学报 v.28,1985, no.4, 509～521.

[15.21] Li Jibin and Huang Qiming.Bifurcations of limit cycles forming compound eyes in the cubic system, Chin.Ann.of Math.8B(4), 1987, 391～403.

[15.22] 李继彬，黄其明。n=3 的 Hilbert 第 16 问题，H(3)≥11. 科学通报, 1985, (12), 958.

[15.23] 黄其明，李继彬。平面三次微分系统的极限环复眼分支(I)·云南大学学报, 1985, no.1, 7～16.

[15.24] 李继彬。关于弱化的 Hilbert 第 16 问题的研究。昆明工学院学报, 1988, no.1, 94～109.

[15.25] 李继彬。一类平面三次系统的分支与相图。科学通报, 23, 1984, 1469～1470.

[15.26] 万世栋。一类具有椭圆与双曲线解的三次 Hamilton 扰动系统的极限环分布。云南大学学报. 1985, 7, no.4, 400～410.

[15.27] 李昆垣，刘天一。一类三中心 Hamilton 扰动系统的分支与相图。云南大学学报. 1986, v.8, no.1, 1～10.

[15.28] Li Jibin and Liu Zhenrong; Bifurcation set and limit cycles forming compound eyes in a perturbed Hamiltonian system, Pub.Mat.v.35, 1991, 487～506.

[15.29] Blows T R and Lloyd N G.The number of small-amplitude limit cycles of Liénard equations, Math.Proc.Camb.Philos.Soc.95, 1984, 359～366.

[15.30] Blows T R and Lloyd N G.The number of limit cycles of certain polynomial differential equations, Proc.Roy.Soc.Edinburgh Sect. A 98, 1984, 215～239.

[15.31] Kalenge M C On Some polynomial systems in the plane, PhD.Thesis, Univ.College of Wales, Aberystwyth, 1986.

[15.32] Lloyd N G.Smale amplitude limit cycles of polynomial differential equations, Ord.Diff.Eqs. and Oper, Eds.W. N. Everitt and R. T. Lewis, Lect.Notes in Math.v.1032, 1982, 346～357.

[15.33] Lloyd N G and Lynch S. Small-amplitude limit cycles of certain lienard systems, Proc.Roy.Soc.Lond.A 418, 1988, 199～208.

[15.34] Lloyd N G, Lienard systems with several limit cycles, Math. Proc.Camb.Phil.Soc, 102, 1987, 565～572.

[15.35] Lloyd N G, The number of limit cycles of polynomial syst-

ems in the plane, Bull.Inst.Math.Appl.24,1988, 161~165.

[15.36] Lloyd N G, Blows T R, Kalenge M C.Some cubic systems with several limit cycles, Nonlinearity, 1,1988, 653~669.

[15.37] Basarab-Horwath P and Lloyd N G. Co-existing fine foci and bifurcating limit cycles, (to appear in Nieuw Archief van Wiskunds).

[15.38] Lloyd N G. Limit cycles of polynomial systems-Some recent developonents, New Directions in Dynamical Systems, 192~233,1988, Camb.Univ.Press, Lond.Math.Soc.Lect.Notes Series, No.127.

[15.39] James E M and Lloyd N G. A cubic system with eight small-amplitude limit cycles. Preprint, 1989.

[15.40] Lloyd N G, Pearson J M.Computing centre conditions for certain cubic systems(Preprint, 1990).

[15.41] Christopher C J and Lloyd N G.On the paper of Jin and Wang concerning the conditions for a centre in certain cubic systems, Bull.Lond.Math.Soc 22,1990, 5~12.

[15.42] Ye Yanqian. Periodic solutions and limit cycles of systems of nonlinear differential equations, J.of Nanjing Univ, 1958, no.1, 7~17.

[15.43] Руденок А Е.О предельных циклах двумерной автономной системы с нелинейностями третвей степени, Диф. урав., 23, 1987, 825~834.

[15.44] Lins A, W.de Melo and Pugh C C. On Liénard equation, Geometry and Topology, Lect.Notes in Math.no.597, Springer-Verlag. 1977, 335~357.

[15.45] Lloyd N G. Liénard systems with several limit cycles, Math Proc.Camb.Phil.Soc.102,1987, 565~572.

[15.46] Rychkov G S. The maximum number of limit cycles of the system $\dot{y}=x$, $\dot{x}=y-\sum_{i=0}^{2} a_i x^{2i+1}$ is two, Diff.Uravn.11,1973, 380~391.

[15.47] Zeng Xianwu:Remarks on the uniqueness of limit cycles, Kexue Tongbao, 28,1983, 452~455.

[15.48] Blows T R and Rousseau C. Bifurcation at infinity in polynomial vector fields, (Preprint, 1991).

[15.49] Han Maoan.Stability of the Equator and bifurcation of limit cycles(Preprint, 1991).

[15.50] Devlin J.Word problems related to periodic solutions of a non-autonomous system, Math.Proc.Camb.Phil.Soc.108, 1990, 127~151.

[15.51] Lloyd N G and Pearson J M.REDUCE and the bifurcation of limit cycles, J.Symbolic Comput, 9, 1990, 215~224.

[15.52] 邓大一，李继彬．一类旋转 $\frac{2\pi}{m}$ 不变的平面 Hamilton 扰动系统的全局与局部分支，云南大学学报．1985, 7, 383～391.

[15.53] Li Jibin and Ren Hongshan, Bifurcations of phase portraits in the disturbed Hamiltonian system approching the principal deformation of $Z_4$-field. (Preprint, 1991).

[15.54] Chicone C. On bifurcation of limit cycles from centers, Lect. Notes in Math. v.1455, 1990, 20～93.

[15.55] Rousseau C. Universal unfolding of a singularity of a symmetric vector field with 7-jet $C^\infty$—equivalent to $y\partial/\partial x+(\pm x^3\pm x^6y)\partial/\partial y$, Lect. Notes in Math. v.1455, 1990, 334～355.

[15.56] Rothe F and Shafer D S. Bifurcation in a quartic polynomial system arising in Biology, Lect. Notes in Math. v.1455, 1990, 356～372.

[15.57] Варченко А Н. Оценка числа нулей Абелева интеграла, зависящего от параметра, и предельные циклы, Функ. ана. и его прил, т. 18, 1984, в. 2, 14～25.

[15.58] Петров Г С. Чебышевское свойство эллиптических интегралов, Функ. ана. и его прил. т. 22, 1988, В. 1, 83～84.

[15.59] Li Xuepeng. The limit cycles of the cubic systems with three centre-type singular points on a straight line. Ann. Diff. Eqs. 10(1994), 39～51.

[15.60] Li Baoyi and Zhang Zhifen. Petrov's result about the weakened 16th Hilbert problem, Inst. Math., Dept. Math., Peking Univ., Res. Rep., 1993, no. 35.

[15.61] Li C Z and Zhang Z F. A criterion for determining the monotonicity of the ratio of two Abelian integrals, Inst. Math., Dept. Math., Peking Univ., Res. Rep., 1993, no. 34.

[15.62] Rousseau C. Bifurcation methods in polynormial systems, Preprint, 1993.

# §16. 无界解与有界二次和三次系统

关于有界二次系统自文献 [16.1]§17 介绍了 1984 年以前的成果后，近十年来又有不少新贡献。首先，对于[16.3]所得二次系统为有界的三个充要条件中的第三个条件是错误的，除了[16.1]所引的[16.21]的反例以外，在[16.2] 中也独立地指出了这一点，[16.2]中另外还给[16.4]的分类补充了一个遗漏的新情况，并且把16.3]和[16.4]的两种分类法加以对照。

**定理 16.1** [16.4] 一个二次系统是有界的，当且仅当它仿射等价于方程：

$$\dot{x}=a_{11}x+a_{12}y+y^2,\quad \dot{y}=a_{21}x+a_{22}y-xy+cy^2, \tag{I}$$

其中$|c|<2$，而其他系数满足下列条件之一：

(I.1) $a_{11}<0$； (I.2) $a_{11}=a_{21}=0$； (I.3) $a_{11}=0$, $a_{21}=-a_{12}\neq 0$, $ca_{21}+a_{22}\leqslant 0$；

或等价于方程：

$$\dot{x}=a_{11}x,\quad \dot{y}=a_{21}x+a_{22}y+xy, \tag{II}$$

其中 $a_{11}<0$, $a_{22}\leqslant 0$。

或等价于方程：

$$\dot{x}=a_{11}x+a_{12}y+y^2,\quad \dot{y}=a_{22}y, \tag{III}$$

其中诸系数满足下列条件之一：

(III.1) $a_{11}\leqslant 0$, $a_{22}\leqslant 0$, $a_{11}+a_{22}<0$。

(III.2) $a_{11}<0$, $a_{22}<0$, $2a_{22}-a_{11}>0$。

这里条件(III.2)是文献[16.2]补上的，相应的全局相图如图16.1。

关于有界二次系统的全部相图可参考文献[16.5]第五章，这

里不一一画出了。

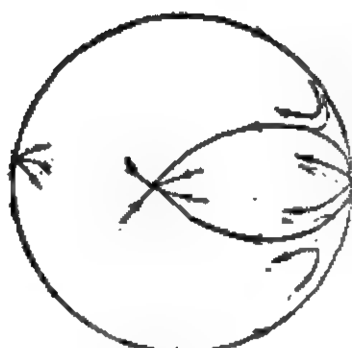


图 16.1

**定理 16.2**[16.2], [16.3] 若一二次系统的指标为 $+1$ 的非退化奇点不位于积分直线上，则此系统是有界的，当且仅当它仿射等价(以及 $t$ 的长度变换)于方程：

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy,$$
$$\dot{y}=x(1+ax+by), \tag{16.1}$$

其中诸系数满足下列二条件之一：

(Ⅳ.1) $(b-l)^2+4ma<0,\ mb<0$.

(Ⅳ.2) $(b-l)^2+4ma<0,\ b=m+a=0,$

$$m(l+m\delta)\leqslant 0. \tag{16.2}$$

关于两种分类法的比较，文献[16.2]得到如下表：

**表 16.1**

| Dickson, Perko 的分类 | | 杨信安的分类 |
|---|---|---|
| (Ⅰ.1) 中 $a_{21}=0,\ B^2\leqslant 4D$ | | $\phi$ |
| (Ⅰ.1) 中 $a_{21}=0,\ B^2>4D$ | 包含在 | (Ⅳ.1)中 |
| (Ⅰ.1) 中 $a_{21}\neq 0,\ \lvert B\rvert+\lvert D\rvert>0$ | 等价于 | (Ⅳ.1) |
| (Ⅰ.1) 中 $a_{11}\neq 0,\ \lvert B\rvert+\lvert D\rvert=0$ | | $\phi$ |
| (Ⅰ.2) 中 $a_{12}=0$ | | $\phi$ |
| (Ⅰ.2) 中 $a_{12}\neq 0$ | 等价于 | Ⅳ.2 中 $m(l+m\delta)=0$ |
| (Ⅰ.3) 中 $ca_{21}+a_{22}<0$ | 等价于 | Ⅳ.2 中 $m(l+m\delta)<0$ |
| (Ⅰ.3) 中 $ca_{22}+a_{22}=0$ | 等价于 | Ⅳ.2 中 $m(l+m\delta)=0$ |
| (Ⅰ)与(Ⅱ) | | $\phi$ |

表 16.1 中的 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, $B=a_{12}-a_{21}+ca_{11}$.

关于二次系统是有界还是存在无界解的问题，值得介绍的是韩茂安[16.6]中的方法与结果，这是他的博士论文的一部分。

考虑一般的二次系统

$$\dot{x}=\sum_{0\leqslant i+j\leqslant 2}a_{ij}x^iy^j,\quad \dot{y}=\sum_{0\leqslant i+j\leqslant 2}b_{ij}x^iy^j. \tag{16.3}$$

如果它没有有限远奇点，则显然有许多无界解。现设(16.3)至少有一有限远奇点，则可取它为原点$O(0, 0)$，于是有$a_{00}=b_{00}=0$。若$b_{20}=0$，可以对调$x$与$y$，而设$a_{02}=0$，若$b_{20}\neq 0$，则三次方程

$$b_{20}u^3+(b_{11}-a_{20})u^2+(b_{02}-a_{11})u-a_{02}=0$$

必有一实根$u$，作变换$x_1=x-uy$，$y_1=y$，就可使新方程中的$a_{02}=0$。因此，不失一般性，可设$a_{00}=b_{00}=a_{02}=0$。

现在如果$a_{10}=0$，则(16.3)具有形式：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\gamma y+ax^2+bxy,\\ \dot{y}&=\varepsilon x+\delta y+lx^2+mxy+ny^2,\end{aligned}\qquad(16.4)$$

如果$a_{10}a_{01}\neq 0$，则可作变换

$$x_2=x,\quad y_2=x+\frac{a_{01}}{a_{10}}y.$$

而把(16.3)变成(16.4)的形式，如果$a_{01}=0$，则(16.3)具有形式：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=cx+ax^2+bxy,\\ \dot{y}&=\lambda x+\delta y+lx^2+mxy+ny^2.\end{aligned}\qquad(16.5)$$

不妨设(16.4)中的$\gamma\neq 0$（否则，(16.4)是(16.5)的特例），于是不失一般性，可设$\gamma=-1$。现在如果$\varepsilon<0(>0)$，则可把它变为$-1(1)$，因此有如下命题：

**命题 16.1** 任何有有限远奇点的二次系统(16.3)必定仿射等价于下列两方程之一：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y+ax^2+bxy,\\ \dot{y}&=\varepsilon x+\delta y+lx^2+mxy+ny^2,\end{aligned}\qquad(E_1)$$

其中$\varepsilon=0$, 1或$-1$；或

$$\begin{aligned}\dot{x}&=cx+ax^2+bxy,\\ \dot{y}&=\lambda x+\delta y+lx^2+mxy+ny^2.\end{aligned}\qquad(E_2)$$

为了研究$(E_1)$及$(E_2)$，首先注意下面的命题：

**命题 16.2** $(E_1)$可分别化为 Lienard 方程：

$$\dot{x}=y-F(x),\ \dot{y}=-g(x)\qquad(16.6)$$

或

$$\dot{x}=y-F_1(x),\ \dot{y}=-g_1(x).\qquad(16.7)$$

在区域 $1-bx>0$ 或 $1-bx<0$ 中，式中

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx,\quad f(x)=\begin{cases}e^{nx}\psi(x), & \text{当 } b=0;\\ \psi(x)(1-bx)^{-2-\frac{n}{b}}, & \text{当 } b\neq 0;\end{cases}$$

$$F_1(x)=\int_{\frac{2}{b}}^{x} f_1(x)dx,\ f_1(x)=-\psi(x)(bx-1)^{-2-\frac{n}{b}};$$

$$g(x)=\begin{cases}x\varphi(x)e^{2nx}, & \text{当 } b=0;\\ x\varphi(x)(1-bx)^{-3-\frac{2n}{b}}, & \text{当 } b\neq 0,\end{cases}\tag{16.8}$$

$$g_1(x)=-x\varphi(x)(bx-1)^{-3-\frac{2n}{b}}.$$

而

$$\varphi(x)=(a^2n+b^2l-amb)x^3+(am+\varepsilon b^2-ab\delta-2bl)x^2 +(l-2b\varepsilon+a\delta)x+\varepsilon;$$

$$\psi(x)=(ab+mb-2na)x^2+(b\delta-2a-m)x-\delta.\tag{16.9}$$

本命题的证明与文献[16.1]中 §15 定理 15.15 一样，故从略。

对于一般的 Lienard 方程(16.6)，设其中的

$$F(x),g(x)\in C^1(x_1,x_2)\quad(0<x_1<x_2\leqslant\infty).\tag{16.10}$$

**定义 16.1**　(16.6)的解称为*单调无界*，如果沿着它当 $t$ 很大时有 $dy/dx\neq 0$（或 $dy/dx\equiv 0$）。显见跑向无限远的螺线不是单调无界的。

易证下列引理成立：

**引理 16.1**　若存在 $x_0\in(x_1,x_2)$，使 $g(x)<0$，当 $x\in(x_0,x_2)$，则当 $x_2-g(x_2-0)=+\infty$ 时，(16.6)在带域 $x_0<x<x_2$ 上有一族单调无界解（以后凡述及无界解都是指正向无界）。

这可由分析轨线的走向立刻看出，因为在 $(x_0,x_2)$ 中有 $\dot{y}>0$。类似的有：

**引理 16.2**　若存在 $x_0'\in(x_2',x_1')$ $(-\infty\leqslant x_2'<x_1'<0)$，使 $F,g\in C'(x_2',x_1')$，又 $g(x)>0$ 当 $x\in(x_2',0)$。则当 $x_2'-g(x_2'+0)=-\infty$ 时，(16.6)在带域 $x_2'<x<x_0'$ 上有一族单调无界解。

**引理 16.3**　设对方程(16.6)，条件(16.10)成立，又若存在 $x_0\in(x_1,x_2)$，使：

1) $G(x_2-0)=\infty$, 这里 $G(x)=\int_{x_0}^{x}g(x)dx$;

2) $g(x)>0$, $F(x)\leqslant-\sqrt{8G(x)}+(G(x))^{\alpha}$ (对 $x\in(x_0, x_2)$, $0<\alpha<\frac{1}{2}$). 则(16.6) 在带域 $x_0<x<x_2$ 中有一族单调无界解。

此引理是另一文献[16.21]中一个更一般的定理的特殊情况。由于该定理本身颇有用处,所以这里也介绍一下:

设有方程

$$\dot{x}=\varphi(y)-F(x),\quad \dot{y}=-g(x)。\tag{16.11}$$

其中 $g(x)$、$F(x)$ 在区间 $(x_1, x_4)$ 上连续, $g(x)$ 只有有限个奇点, 又

$$-\infty\leqslant x_1<x_2\leqslant 0\leqslant x_3<x_4\leqslant\infty,$$

$\varphi(y)$ 连续, 且方程 (16.10) 满足初值问题解的唯一性, 又设当 $x\in(x_1, x_2)\cup(x_3, x_4)$ 时, $xg(x)>0$, $g(x_2)=g(x_3)=0$, 对

$$G(x)=\int_0^x g(x)dx$$

有

$$G(x_1+0)=G(x_4-0)=\infty。$$

于是可知必存在 $x_0\in[x_3, x_4)$、$x_0'\in(x_1, x_2]$, 使当 $x\in(x_0, x_4)\cup(x_1, x_0')$ 时, 有 $G(x)>0$。引进变换

$$Z=G(x),\tag{16.12}$$

此变换在 $Z\geqslant G(x_0)=Z_0$ 时有唯一的反函数 $x_1(Z)\geqslant x_0$; 在 $Z\geqslant G(x_0')=Z_0'$ 时有另一反函数 $x_2(Z)\leqslant x_0'$。记

$$F_1(Z)=F(x_1(Z))\text{ 当 }Z\geqslant Z_0;$$
$$F_2(Z)=F(x_2(Z)),\text{ 当 }Z\geqslant Z_0'。\tag{16.13}$$

**定理 16.8** 设:

1) 存在 $Y>0$, 使当 $|y|\geqslant Y$ 时, 有

$$y\varphi(y)>0,\ |\varphi(y)|\leqslant|y|^{\beta}(\beta>0);$$

2) 存在 $Z_1>0$, 使当 $Z\geqslant Z_1$ 时, 有

$$F_1(Z)\leqslant-bZ^{\frac{\beta}{\beta+1}}+Z^{\alpha}\quad\text{或}\quad F_2(Z)\geqslant bZ^{\frac{\beta}{\beta+1}}-Z^{\alpha},\tag{16.14}$$

其中

$$b=(\beta+1)\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}, \quad \left(0\leqslant\alpha<\frac{\beta}{\beta+1}\right). \qquad (16.15)$$

则方程(16.11)在带域$(x_1, x_4)$上必存在一族单调无界正半轨。

证明大意：设(16.14)的第二式成立。在变换(16.12)之下，对$x\in(x_1, x_0')$，方程(16.11)化为：

$$\frac{dZ}{dy}=F_2(Z)-\varphi(y), \quad Z\geqslant Z_0'.$$

然后把此方程和已知存在无界解的方程

$$\frac{dZ}{dy}=bZ^{\frac{\beta}{\beta+1}}-Z^{\alpha}-|y|^{\beta}sgny \quad (Z>0)$$

作比较。对 (16.14) 的第一式成立时证法也是类似的(详见文献[16.21])。

显见引理 16.3 是定理 16.3 的特例，其中 $\varphi(y)\equiv y$, $\beta=1$, $b=\sqrt{8}$。

引理 16.4 取 $x_2=\infty$，若存在 $M>0$ 及 $x_0>x_1$，使对 $x>x_0$ 有 $g(x)>0$, $F(x)\leqslant-\sqrt{8G(x)}+M$，则(16.6) 在 $x>x_0$ 中有一族单调无界解。

证 通过坐标轴的平移可设 $M=0$。易见 $y=-\sqrt{2G(x)}$ 是

$$dy/dx=-g(x)/[y+\sqrt{8G(x)}] \quad (x>x_0)$$

的无界解，然后利用比较定理便可证明此引理。∎

注 16.1 若$F$、$g\in C^1(x_2', x_1')$, $-\infty\leqslant x_2'<x_1'<0$，我们也有和引理16.4类似的结果。

下面开始研究方程$(E_1)$。

命题 16.3 当 $b=0$ 时，$(E_1)$有一族单调无界解。

证 注意$(E_1)$在区域$1-bx\geqslant1(\leqslant-1)$中有单调无界解，当且仅当(16.6) (或(16.7)) 在该区域中有单调无界解。因此，在 $b=0$ 的时候我们只须证明方程(16.6)有一族单调无界解，其中的

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx, \ f(x)=-(2anx^2+(m+2a)x+\delta)e^{ax},$$

$$g(x)=x(a^2nx^3+amx^2+(l+a\delta)x+\varepsilon)e^{2ax}. \qquad (16.16)$$

对如上的 $F(x)$ 与 $G(x)=\int_0^x g(x)dx$，由分部积分以及当 $x\to\infty$ 时的阶易见若 $n\neq0$，则由引理 16.4 与引理 16.2 立刻可知命题的结论成立。当 $n=0$ 时，若 $am<0$ 或 $am=0$，而 $l+a\delta\neq0$ 时，可用引理 16.1 及引理 16.2；若 $n=am=l+a\delta=0$，则必 $2a+m\neq0$（否则，将有 $a=m=l=n=0$，而 $(E_1)$ 成为线性系统，不是我们所要讨论的）。而命题 16.3 当 $\varepsilon=-1$ 时可由引理 16.1 导出，当 $\varepsilon=1$ 时可由引理 16.3 及引理 16.2 导出；当 $\varepsilon=0$ 时，可以直接证明 $(E_1)$ 有单调无界解。若 $am>0$，而 $2a\neq m$，则

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{F(x)}{\sqrt{G(x)}}=-\frac{2a+m}{\sqrt{am}}\begin{cases}<-\sqrt{8}, & 当\ a>0;\\ >\sqrt{8}, & a<0.\end{cases}$$

故由引理 16.3 及引理 16.2 即得结论。若 $2a=m$，则可取

$$\frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{2}\ 及\ x_0>0$$

使下式成立：

$$F(x)\geqslant\sqrt{8G(x)}-(G(x))^{\alpha},\ 当\ x<-x_0,\ a<0;$$

$$F(x)\leqslant-\sqrt{8G(x)}+(G(x))^{\alpha},\ 当\ x>x_0,\ a>0.$$

这是因为，例如当 $a<0$ 时，如果 $\frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{2}$，则

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{F(x)}{\sqrt{G(x)}}=\sqrt{8},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{F^2-8G}{2FG^{\alpha}}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{G^{\alpha}}{2F}=0.$$

由此即可导出 $F+G^{\alpha}>\sqrt{8G}$（当 $x<0$ 而 $|x|\gg1$）。命题证毕。∎

其次考虑 $b\neq0$ 的情况，不失一般性，可设 $b=-1$，而 $(E_1)$ 成为：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y+ax^2-xy,\\ \dot{y}&=\varepsilon x+\delta y+lx^2+mxy+ny^2.\end{aligned}\tag{16.17}$$

相应的方程 (16.6) 与 (16.7) 现在成为：

$$\dot{x}=y-F(x),\quad \dot{y}=-g(x),\ x>-1\tag{16.18}$$

和

$$\dot{x}=y-F_1(x),\quad \dot{y}=-g_1(x),\quad x<-1。\tag{16.19}$$

其中

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx,\quad f(x)=\psi(x)(1+x)^{n-2},$$
$$g(x)=x\varphi(x)(1+x)^{2n-3},$$
$$F_1(x)=\int_{-2}^x f_1(x)dx,\quad f_1(x)=-\psi(x)(-1-x)^{n-2},$$
$$g_1(x)=-x\varphi(x)(-1-x)^{2n-3}。$$
$$\varphi(x)=Ax^3+A_1x^2+(l+2e+a\delta)x+e,$$
$$\psi(x)=Bx^2+B_1x-\delta,\tag{16.20}$$
$$A=a^2n+l+am,\quad A_1=am+e+a\delta+2l,$$
$$B=-(a+m+2an),\quad B_1=-(\delta+2a+m)。$$

记

$$G(x)=\int_0^x g(x)dx,\quad G_1(x)=\int_{-2}^x g_1(x)dx。$$

**命题 16.4** 设 $A=0$，如果(16.17)没有一族单调无界解(即单调无界解最多只有可数个)，则必有以下两条件之一成立：

1) $a+m+2an=B=0$，$e+a(a+\delta)=0$，$l=a^2(n+1)$，$e+a^2n>0$，$a>0$，$n\geqslant 0$；

2) $e=a=m=l=0$，$\delta<0$，$n\geqslant 0$。

**证** 这时(16.18)(或(16.19))在 $x\geqslant 0$(或 $x\leqslant -2$)中亦必没有一族单调无界解，故由引理 16.1 及引理 16.2 知必有 $A_1=0$，从而

$$\varphi(x)=(e+a^2n)x+e,$$

且应有 $e+a^2n\geqslant 0$。如果 $e+a^2n=0$，则应有 $e=0$；如果 $e+a^2n>0$，则易看出：

$$G(x),\ G_1(x)\sim\begin{cases}\dfrac{e+a^2n}{2n}|x|^{2n}, & \text{当 } n\neq 0\\ e\ln|x|, & \text{当 } n=0\end{cases}\qquad \text{当 } |x|\gg 1;$$

$$F(x),\ F_1(x)\sim\begin{cases}\dfrac{B}{n+1}|x|^{n+1}, & \text{当 } n+1\neq 0\\ B\ln|x|, & \text{当 } n+1=0\end{cases}\qquad \text{当 } |x|\gg 1。\tag{16.21}$$

于是由引理 16.4 及引理 16.2 可知应有 $n\geqslant 0$；由引理 16.4 及引理 16.2 知应有 $B=0$。由 $A=A_1=B=0$ 立刻导出

$$l=a^2(n+1),\ e+a(a+\delta)=0,\ \delta+a-2an\neq 0.$$

这样，

$$F(x)\sim\begin{cases}\dfrac{-\delta-a+2an}{n}x^n, & n\neq 0\\ -(a+\delta)\ln x, & n=0\end{cases}\quad 当\ x\gg 1.$$

从而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{\sqrt{G(x)}}=\begin{cases}\dfrac{-\sqrt{2}\,(\delta+a-2an)}{\sqrt{n(e+a^2n)}}=\mu, & n>0;\\ -\infty, & 当\ n=0,\ a+\delta>0;\\ +\infty, & 当\ n=0,\ a+\delta<0.\end{cases}$$

由引理 16.3 知应有 $\delta+a-2an<0$。与 $e+a^2n>0$ 及 $e+a(a+\delta)=0$ 一起可知应有 $a>0$，故命题的条件 1) 成立。

当 $e+a^2n=0$ 时有 $e=an=0$，从而 $g=g_1=0$。仿前可得 $n+1\geqslant 0$，$B=0$，$B_1>0$。然后由 $A=A_1=0$ 与引理 16.4 即可导出

$$l=a=m=0,\ n\geqslant 0,\ \delta<0.$$

故命题的条件 2) 成立。命题证毕。∎

**命题 16.5** 设 $A>0$ 如果 (16.17) 没有一族的单调无界轨线，则或

1) $n+1>0$，$(a-m)^2<4l(n+1)$；

或

2) $n+1=0$，$m=a$，$l>0$。

**证** 当 $A>0$ 时，有

$$G(x),\ G_1(x)\sim\begin{cases}\dfrac{A}{2n+2}|x|^{2n+2}, & n+1\neq 0\\ A\ln|x|, & n+1=0\end{cases}\quad 当\ |x|\gg 1.$$

而 $F(x)$ 与 $F_1(x)$，仍如(16.21)。由引理 16.4 知必 $n+1\geqslant 0$。若 $n+1=0$，则由引理 16.3 知 $B=0$，从而 $m=a$，$l>0$，故条件 2) 成立。

若$n+1>0$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{\sqrt{G(x)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{F_1(x)}{\sqrt{G_1(x)}}=\frac{\sqrt{2}B}{\sqrt{(n+1)A}}=\tilde{\mu}.$$

故由引理 16.3 及引理 16.2 知必有 $|\tilde{\mu}|<\sqrt{8}$，即

$$B^2<4A(n+1),$$

亦即

$$(m-a)^2<4l(n+1),$$

故条件 1) 成立。命题证毕。▮

**命题 16.6** 设命题 16.4 的条件 1) 或 2) 成立，则(16.17) 恰有两个无限远奇点。它们是 $(0, 1, 0)$ 和$(1, a, 0)$，后者在积分直线 $y=ax$ 上。当 $n=0$ 时，(16.17)是有界系统；若 $n\neq0$，则(16.17)有一族的单调无界轨线，这时(16.17)有另一积分直线

$$y=ax-\frac{a+\delta}{n}.$$

**证** 先设命题16.4的条件 1) 成立。用常用的方法将(16.17)化到坐标$(x, 1, z)$得到：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{d\tau}=-(n+1)x+(a-m)x^2-lx^3-z(1+\delta x+\varepsilon x^2),\\[2mm] \dfrac{dz}{d\tau}=-z(n+mx+lx^2+\delta z+\varepsilon xz).\end{cases}\tag{16.22}$$

由此立刻看出，赤道上有一个单奇点$(0, 1, 0)$ 和一个重奇点$(1, a, 0)$。当 $n>0$ 时，$(0, 1, 0)$是稳定结点。故(16.17) 有一族的单调无界解。它们趋向 $(0, 1, 0)$。又可直接验证 $y=ax$ 是(16.17)的积分直线。

若 $n=0$，则(16.22)在$(0, 1, 0)$有特征根 $0$、$-1$。不难证明，这时$(0, 1, 0)$是鞍结点。又同法可证$(1, a, 0)$有两个鞍状区和两个结点区，在赤道的每一边各有一个。合起来可得如图 16.2 所示的相图（易证在条件 1)之下(16.17) 只有一个有限远奇点 $O(0, 0)$。故(16.17)为有界系统)。

若 $n\neq0$，则可直接验证(16.17)还有一条积分直线

$$y=ax-\frac{a+\delta}{n},$$

它也通过无限远奇点$(1, a, 0)$。

当命题16.4的条件2)成立时(16.17)简化为：

$$\dot{x}=-y-xy,\ \dot{y}=\delta y+my^2,\ \delta<0,\ n\geqslant 0. \tag{16.23}$$

命题的结论是明显的。∎

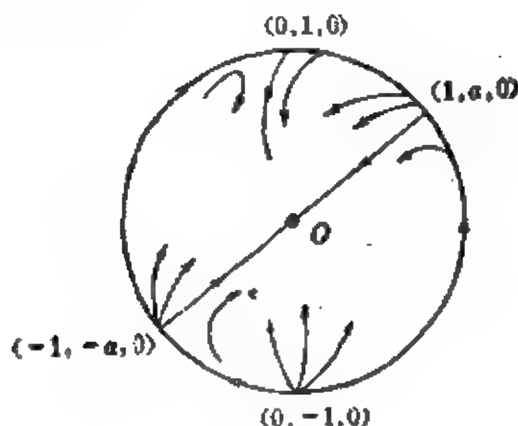



图 16.2

**命题 16.7**　设命题16.5的两个条件之一成立，则(16.17)只有唯一的无限远奇点 $(0, 1, 0)$。(16.17)是有界系统当且仅当 $n=0$, $\delta<m$ 或 $n=\delta-m=0$, $l+a\delta=\varepsilon\neq 0$, 且 $\varepsilon a\geqslant 0$。(16.17)有唯一的单调无界轨线当且仅当 $n<0$ 或 $n=\delta-m=0$, $l+a\delta<\varepsilon$。

**证**　(16.17)只有唯一的无限远奇点$(0, 1, 0)$是明显的。今设命题16.5的条件1)成立。若 $n<0$，则$(0, 1, 0)$为鞍点，此时(16.17)只有唯一单调无界轨线(跑向无限远鞍点)。若 $n>0$，则$(0, 1, 0)$为结点，故(16.17)有一族的单调无界轨线跑向无限远结点。当 $n=0$ 时，由(16.22)的第一方程右边等于零，解出$x=x(z)$，然后代入第二方程的右边可得：

$$\frac{dz}{d\tau}=(m-\delta)z^2+(\varepsilon-l-m(a-m+\delta))z^3+a\varepsilon z^4+\cdots.$$

故由文献[16.22]定理7.1知道当$\delta<m$或$\delta=m$, $l+a\delta=\varepsilon\neq 0$且$\varepsilon a>0$时，有图16.3(a)；而当$\delta>m$或$\delta=m$, $l-\varepsilon+a\delta=0$且$\varepsilon a<0$时，有图16.3(b)。在16.3(a)的情况(16.17)显然是有界系统；在

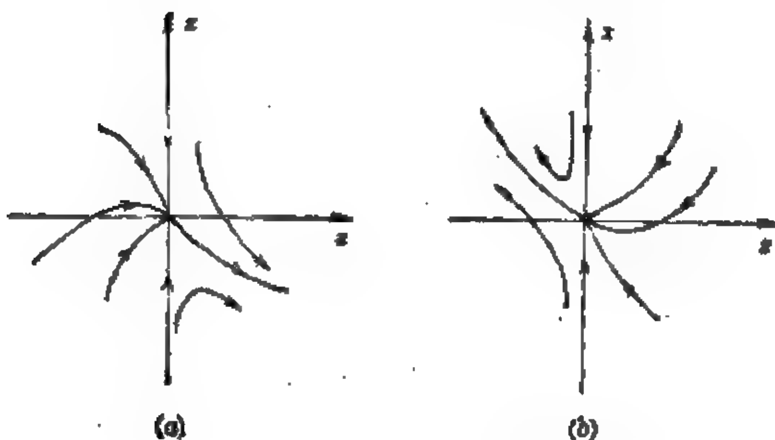


图 16.3

16.3(b)的情况(16.17)有一族单调无界轨线跑向无限远奇点。

若 $\delta=m$, $n=0$, $l-\varepsilon+a\delta\neq0$, 则(0, 1, 0) 为一结点(鞍点)。当 $l-\varepsilon+a\delta>0(<0)$, 故在 $l-\varepsilon+a\delta<0$ 时 (16.17) 有唯一的单调无界轨线进入无限远鞍点。

今若 $\delta=m$, $l-\varepsilon+a\delta=0$ 且 $\varepsilon a=0$, $n=0$. 则当 $a=0$ 时，有 $l=\varepsilon$. 若取 $\varepsilon=1$, $\delta<0$, $|\delta|<2$, 则(16.17)成为：

$$\dot{x}=-y(1+x),\quad \dot{y}=(1+x)(x+\delta y).$$

易见它是有界系统。当 $\varepsilon=0$ 时有 $l=-am$, 与 $(m-a)^2<4l$ 相矛盾，故不合要求。

若命题 16.5 的条件 2) 成立，则(0, 1, 0)是 (16.22) 的鞍点，这时(16.17)只有唯一的单调无界轨线进入此鞍点。证毕。∎

由以上诸命题及引理容易导出以下定理：

**定理 16.4** 二次系统$(E_l)$为有界，当且仅当下列条件之一成立：

1) $n=a+m=0$, $a^2+bl=0$, $b^2+a(a-b\delta)=0$, $ab<0$, $\varepsilon=1$;

2) $n=\varepsilon=a=m=l=0$, $\delta<0$, $b\neq0$;

3) $n=0$, $b(b\delta+m)<0$, $(a-m)^2+4bl<0$;

4) $n=b\delta+m=0$, $\varepsilon b+l+a\delta=0$, $\varepsilon ab\leqslant0$, $(a-m)^2+4bl<0$, $\varepsilon\neq0$.

这里3)、4) 可由命题16.7导出，1)、2) 不满足命题16.7的条件，但可由命题16.6导出。在条件1) 之下，(16.17) 有积分直线 $y=ax$，相图如图16.2。

**定理16.5**　$(E_1)$恰有一条单调无界轨线，当且仅当下列条件之一成立：

1) $n(b-n)>0$，$(a-m)^2<4l(n-b)$，$nb>0$；

2) $n=b\delta+m=0$，$b(cb+l+a\delta)>0$，$(a-m)^2+4bl<0$；

3) $n=b$，$m=a$，$bl<0$。

用同样的方法对$(E_2)$可证另两个定理：

**定理16.6**　$(E_2)$为有界系统，当且仅当下列条件之一成立：

1) $b=a=n=c=m=0$，$\delta<0$；

2) $b=a=n=0$，$c<0$，$\delta\leqslant 0$；

3) $b\neq 0$，$n=a+m=0$，$am=bl$，$a\delta+mc=\lambda b$，$c\leqslant 0$，$\delta<0$；

4) $b\neq 0$，$n=0$，$\delta\leqslant 0$，$(a-m)^2+4bl<0$。

**定理16.7**　$(E_2)$恰有一条单调无界轨线，当且仅当下列条件之一成立：

1) $n=b$，$m=a$，$bl<0$；

2) $b(b-n)>0$，$nb>0$，$(a-m)^2<4l(n-b)$。

应用上列定理于：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}&=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\\
\dot{y}&=x(1+ax+by),
\end{aligned}
\tag{16.24}
$$

可得以下定理：

**定理16.8**　当$a=0$时，(16.24) 为有界系统，当且仅当下列条件之一成立：

1) $l=0$，$b(m-b\delta)>0$，$m^2+4nb<0$，

2) $l=b+n=m-b\delta=0$，$m^2+4nb<0$。

当$a=0$时(16.24)恰有一条单调无界轨线，当且仅当下列条件之一成立：

1) $l(b-l)>0$，$m^2<4n(l-b)$；

2) $l=m-b\delta=0$，$b(n+b)>0$，$m^2+4nb<0$；

3) $m=b-l=0,\ nb<0$。

当 $n=0$ 时，(16.24)为有界系统，当且仅当下列条件之一成立：

1) $bl=ma,\ b+l=0,\ a+b\delta=m,\ mb<0$[1]；

2) $(b-l)^2+4ma<0,\ mb<0$；

3) $(b-l)^2+4ma<0,\ b=m+a=0,\ m(l+m\delta)\leqslant 0,\ m\neq 0$。

(16.24)恰有一条单调无界轨线，当且仅当 $b=0,\ m(m+a)>0,\ l^2+4ma<0$。

给出二次系统为有界的特征的还有文献[16.24]。

关于有界二次系统的奇点与极限环已知有下列一些性质[2]：

（一）无限远奇点只能有一个，除非有过非鞍点的积分直线。

（二）有限远奇点最多有三个。

（三）当有限远奇点只有一个或两个时，极限环若存在必为唯一(见§10)。

（四）当有三个有限远奇点时必有一为鞍点，另二为非鞍点。

（五）若存在细焦点，它最多只能是二阶的。

此外，还有文献[16.7]研究了有一个细焦点的有界二次系统的极限环的存在与不存在性。[16.8]证明了 $R^n$ 中的有界齐偶次系统必有一直线上充满了奇点。至于有界二次系统是否存在极限环的(1, 1)与(1, 2)分布？在一个细焦点外围是否最多只能存在两个极限环？这两问题过去一直未曾有人考虑过。最近在[16.9]中研究了上述第一个问题以及有界二次系统的大范围分支图，在[16.10]中则考虑了第一个问题和有界系统的局部分支问题。下面介绍一下文献[16.9]的内容。

---

1) 此条件补充了定理 16.2 的不足，虽然在文献[16.2]、[16.4]中都有相应的相图，即图 16.2。

2) 当二次系统写成(16.24)的形式时，要它是有界系统，不一定 $n=0$，例如

$$\dot{x}=-y+\delta x+mxy+ny^2,\quad \dot{y}=x(1-mx-ny)$$

当 $\delta<0$ 时，是有界系统。因为取 $V=x^2+y^2$ 时易见 $\frac{dv}{dt}=2\delta x^2\leqslant 0$，此方程只有一无限远奇点$\left(-\frac{n}{m},\ 1,\ 0\right)$，且可经线性变换化为(16.1)的形式。

我们从满足条件(Ⅳ.1)的有界系统(16.1)出发，易见必有 $mab\neq0$；不失一般性，以后可设：

$$m>0,\ a<0,\ b=-1. \tag{16.25}$$

于是使(Ⅳ.1)成立的 $l$ 应满足不等式

$$-1-2\sqrt{-ma}<l<2\sqrt{-ma}-1. \tag{16.26}$$

我们今后假设

$$2\sqrt{-ma}-1>0,\ \text{即}\ 1+4ma<0. \tag{16.27}$$

否则，由后面的 $W_1$ 表达式将可看出情况太简单，讨论起来缺乏内容。

当 $\delta=l=0$ 时，(16.1)成为：

$$\dot{x}=-y+mxy,\quad \dot{y}=x(1+ax-y). \tag{16.28}$$

它可借助变换

$$v=y+\frac{1}{m}x+\frac{1}{m^2}\ln(1-mx),\ \frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{1-mx}, \tag{16.29}$$

化为 Lienard 系统：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau}&=-v+\left[\frac{1}{m}x+\frac{1}{m^2}\ln(1-mx)\right],\\ \frac{dv}{d\tau}&=\frac{x+ax^2}{1-mx},\end{aligned} \tag{16.30}$$

然后可用熟知的方法证明(16.30)不存在极限环[1]。

(16.28)有三个有限远奇点：

$$O(0,\ 0),\ R\left(-\frac{1}{a},\ 0\right)\text{和}N\left(\frac{1}{m},\ 1+\frac{a}{m}\right). \tag{16.31}$$

若 $a<-m$，则 $\frac{1}{m}>-\frac{1}{a}$，$R$ 有指标 $-1$，$N$ 有指标 $+1$(图16.4)；若 $-m<a$，则 $\frac{1}{m}<-\frac{1}{a}$，$N$ 有指标 $-1$，$R$ 有指标 $+1$ (图 16.5)。在这一节中除了例 16.2 以外都假设

$$a<-m<0. \tag{16.32}$$

当 $\delta=0$ 时，(16.1)在 $O(0,\ 0)$ 的第一个焦点量是：

$$W_1=a+(m-2a)l. \tag{16.33}$$

---

1) 或由(16.28)有积分直线与细焦点亦可推出不存在极限环 (见 [16.1]§15)。

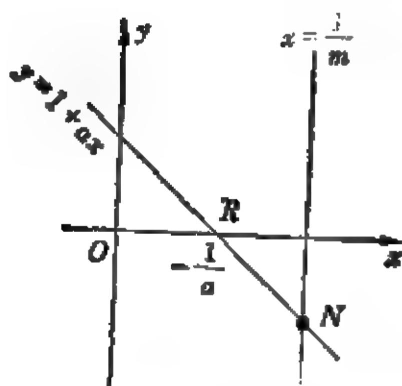



图 16.4

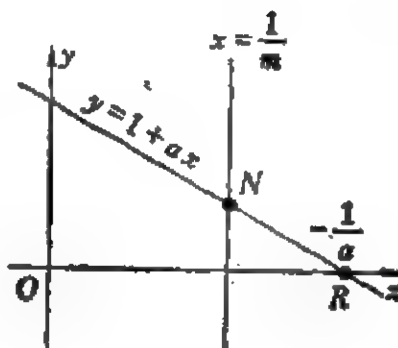



图 16.5

因此，$O(0,\ 0)$是(16.28)的稳定焦点，因为这时$W_1=a<0$。现在研究当$l\geqslant0$的系统：

$$\dot{x}=-y+lx^2+mxy,\ \dot{y}=x(1+ax-y),\qquad(16.34)$$

当

$$1>l=l^*=\frac{a}{2a-m}>0\qquad(16.35)$$

时，有$W_1=0$，这时$O$是(16.34)的阶数$\geqslant2$的细焦点，(16.34)的位于$1+ax-y=0$上的两个奇点为$R(x_1,\ y_1)$与$N(x_2,\ y_2)$。其中$y_i$满足方程：

$$G(y)=(l+ma)y^2-(2l+ma+a^2)y+l=0.\qquad(16.36)$$

故当$0<l<-ma$时，$y_1y_2<0$；当$l>-ma$时，$y_1y_2>0$。由于

$$2\sqrt{-ma}-1\leqslant-ma,$$

故对有界二次系统(16.1)与(16.34)[1]应有$y_1y_2<0$。(16.34)的等倾线与奇点的相对位置如图16.6所示，其中$R$为鞍点，过$R$而包向$O$的两分界线的相对位置还不能确定。

由(16.36)可解出

$$y_i=\frac{2l+ma+a^2\pm a\sqrt{(m+a)^2+4l}}{2(l+ma)}.\qquad(16.37)$$

现在研究$y_i$与$\operatorname{div}(P,\ Q)$随$l$的变动而变化的情况。由(16.36)，对$l$求导可得：

$$\frac{dG(y_i)}{dl}=y_i^2-2y_i+1+[2y_i(l+ma)-(2l+ma+a^2)]\frac{\partial y_i}{\partial l}=0,$$

1) 注意：条件(Ⅲ.1)与$a$无关。

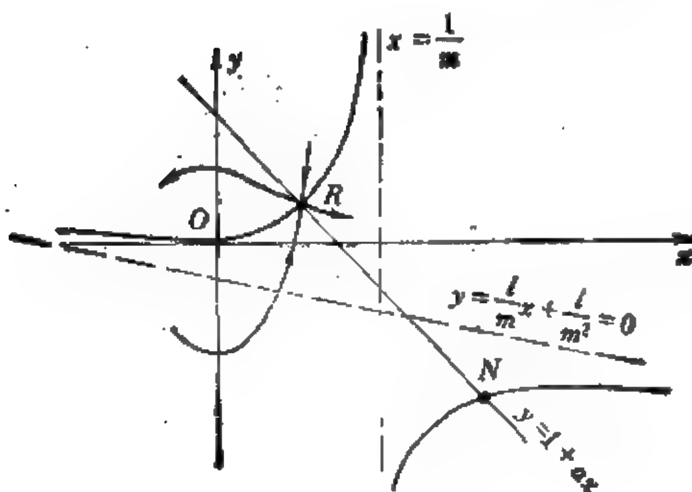



图 16.6

从而

$$\frac{\partial y_i}{\partial l}=\frac{(y_i-1)^2}{2l+ma+a^2-2(l+ma)y_i}$$

$$=\frac{(y_i-1)^2}{-\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y_i}}\quad\begin{cases}>0, & \text{当 } i=1,\\ <0, & \text{当 } i=2.\end{cases}\tag{16.38}$$

故当 $l$ 增大时 $y_1(y_2)$ 增大(减小)。现在

$$\operatorname{div}(P,\ Q)\,|_R=\frac{(ma+2l-1)y_1-2l+1}{a}\tag{16.39}$$

当 $l=0$ 时 $y_1=0$，故 $\operatorname{div}|_R<0$.

为了确定对于 $l$ 的什么数值有

$$\operatorname{div}|_R=0 \text{ 或 } \operatorname{div}|_N=0,\tag{16.40}$$

即

$$\frac{(ma+2l-1)\left[2l+ma+a^2\pm a\sqrt{(m+a)^2+4l}\right]}{2(l+ma)}=2l-1,\tag{16.41}$$

必须解三次方程：

$$\begin{aligned}F(l)&=4l^3+(m^2+6ma-4)l^2+(1-5ma-m^2+m^3a\\&\quad+2m^2a^2)l+ma(1-m^2-ma)\\&=(l+ma)[4l^2+(m^2+2ma-4)l+1-ma-m^2]\end{aligned}$$

$$= (l+ma)g(l) = 0. \tag{16.42}$$

故(16.42)的三个根是：

$$l = -ma \text{ 及 } l_{1,2} = \frac{4-m^2-2ma\pm m\sqrt{(m+2a)^2+8}}{8}. \tag{16.43}$$

为了比较上列三个根的大小，我们加一个比(16.27)更强的条件

$$1+ma<0. \tag{16.44}$$

于是有

$$1+2ma-m^2 = 1+ma+m(a-m)<0. \tag{16.45}$$

从而

$$g(-ma) = (1+ma)(1+2ma-m^2)^2>0. \tag{16.46}$$

再由(16.32)、(16.45)可得：

$$g(0) = 1-m(m+a)>0,$$
$$F(0) = mag(0)<0,$$
$$g(l^*) = \frac{m^2}{(2a-m)^2}(1+2am-m^2)<0,$$
$$F(l^*) = \frac{am^2}{(2a-m)^3}(1+2am-m^2)^2>0. \tag{16.47}$$

故 $g(l)$ 与 $F(l)$ 有如图 16.7 所示的图形。注意：必有 $-ma>l_2$。

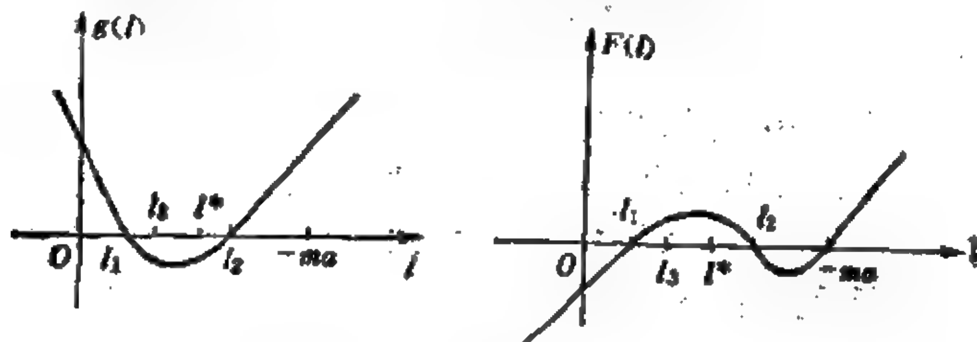



图 16.7

否则，若 $-ma<l_1$，则因 $l^*$ 应在 $l_1$ 与 $l_2$ 之间，故必有 $F(l^*)<0$，与(16.47) 矛盾。又若 $l_1<-ma<l_2$，则将有 $g(-ma)<0$，与(16.46)式矛盾。因此有：

$$0<l_1<l^*<l_2<-ma. \tag{16.48}$$

$F(l)=0$ 的根 $l=-ma$ 表示这时$N$已成为无穷远奇点,而

$$R=\left(\frac{2a-m}{a(m-a)},\ \frac{a}{m-a}\right),$$

且有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}|_R&=(2l-1)x_1+my_1\\&=\frac{a(m^2-2am-1)+(m-a)(1+am)}{a(m-a)}>0。\end{aligned}$$

为了确定当 $l=l^*$ 时 $O(0,\ 0)$ 的稳定性,可计算:

$$\begin{aligned}W_2(l^*)&=ma(5a-m)[-l^{*2}-a^2(2l^*-1)]\\&=\frac{-ma^3(5a-m)(1+2am-m^2)}{(2a-m)^2}\\&>0。\end{aligned}\tag{16.49}$$

故$O$为不稳定二阶细焦点。又可看出:当 $l$ 从零增大到 $l^*$ 时,有一不稳定极限环 $\Gamma_1$ 缩小到 $O$, 使它改变稳定性,即当 $l\geqslant l^*$ 时,$O$ 恒为不稳定。再注意当 $l$ 从零增加时,直线

$$\operatorname{div}(P,\ Q)=(2l-1)x+my=0$$

按顺时针方向绕$O$旋转。已知 $l=0$ 时$R$在$x$轴上,且当 $l$ 增大时 $y_1$ 增大,所以 $l_1$ 必使 $\operatorname{div}|_R=0$ 而不是使 $\operatorname{div}|_N=0$[1)]。当 $l>l_1$ 时 $\operatorname{div}|_R$ 已成为正的了。故前述缩小到$O$的不稳定环$\Gamma_1$应是由过$R$的两分界线在 $l=l_3$ 时重合成为分界环$\Gamma$然后交换位置而产生的,且必有 $l_1<l_3<l^*$。因若 $l_3\leqslant l_1$, 则在 $l=l_1$ 时(34)有一细焦点$O$和一细鞍点$R$, 同时又存在分界线环或极限环,这对二次系统是不可能的。因此,比(16.48)更进一步,我们有

$$0<l_1<l_3<l^*<l_2<-ma。\tag{16.50}$$

如图 6.7 所示。当 $l>l^*$ 时,$O$ 成为不稳定,外部无环,$\operatorname{div}|_R>0$。因此可以画出如图 16.8 所示的 $l$ 轴上的分支图(只考虑$O$点外围)。

---

1) 若 $m+a>0$, 且 $1-ma-m^2<0$, 则有 $l_1<0<l_2$, 当 $l<0$ 时$N$在第一象限。因为 $y+\frac{l}{m}x+\frac{l}{m^2}=0$ 有正斜率,div=0 随 $l$ 的增大可能先经过$N$一次;然后当 $l>0$ 时$N$跑到第Ⅳ象限。div=0 又经过$N$一次。即这时 $l_1$ 与 $l_2$ 都是 $\operatorname{div}|_N=0$ 的根。例如后面的例 6.2 所示。

| $-1-2\sqrt{ma}$ … $0$ | $0$ … $l_1$ | $l_1$ … $l_2$ | $l_2$ … | … $l^*$ | $l^*$ … $2\sqrt{-ma}-1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\text{div}\vert_R<0$, $W_1<0$ | $\text{div}\vert_R=0$, $W_1<0$ | $\text{div}\vert_R>0$, $\Gamma$ 出现，内不稳定 | $\Gamma_1 \supset O$, $\Gamma_1$ 不稳定, $O$ 稳定, $W_1<0$ | $W_1=0$, $W_2>0$, $\Gamma_1=O$ | $W_1>0$, $O$不稳定, 无环, $\text{div}\vert_R>0$ |

图 16.8

**例 16.1** 对于系统

$$\dot{x}=-y+lx^2+xy,\ \dot{y}=x\left(1-\frac{10}{3}x-y\right) \tag{16.51}$$

有 $a=-\dfrac{10}{3}$, $b=-1$, $m=1$, $m+a<0$, $1+ma<0$。上式(16.51)当

$$-4.65\doteq -1-\sqrt{\frac{40}{3}}<l<\sqrt{\frac{40}{3}}-1\doteq 2.65$$

时是有界系统。现在

$$g(l)=4l^2-\frac{29}{3}l+\frac{10}{3}=0 \tag{16.52}$$

有根 $l_1=\dfrac{5}{12}$, $l_2=2$, 又 $l^*=\dfrac{10}{23}>l_1$, $l^*<l_2$, $-ma=\dfrac{10}{3}>l_2$。系统

$$\dot{x}=-y+\frac{5}{12}x^2+xy,\ \dot{y}=x\left(1-\frac{10}{3}x-y\right) \tag*{$(16.51)_{l_1}$}$$

有奇点：

$O(0,0)$——稳定一阶细焦点；$R\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{1}{21}\right)$——鞍点；$N\left(\dfrac{6}{5},-3\right)$——非鞍点。因为 $P_x+Q_y=y-\dfrac{x}{6}=0$ 通过 $R$, 故 $R$ 为细鞍点。其次

$$\dot{x}=-y+2x^2+xy,\quad \dot{y}=x\left(1-\frac{10}{3}x-y\right) \tag*{$(16.51)_{l_2}$}$$

有奇点：

$O$——不稳定一阶细焦点；$R'\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{6}\right)$——鞍点；$N'(3,-9)$——非鞍点。但 $P_x+Q_y=3x+y=0$ 通过 $N'$, 故 $N'$

亦为细焦点，当然是一阶的。

在图16.8中当$l$从$-1-2\sqrt{-ma}$变到$2\sqrt{-ma}-1$的过程中，我们不能严格证明没有半稳定环突然出现，但我们相信这种"不必要的"半稳定环是不会出现的。也可以根据文献[16.11]中一个未证明的命题来得出上述结论。就是说，如果在$l$变动时(16.34)能在$O$外围出现半稳定环，则容易看出当(16.1)中的$\delta$单调变化时$O$外围将两次突然出现半稳定环，与[16.11]中的那个命题相矛盾。此外，我们也还不能说明当$l$增大时$\Gamma_1$是单调缩小而趋于$O$的。但由于$\frac{\partial W_1}{\partial l}>0$，它表示："随着$l$的增大$O$愈来愈不稳定了"。我们相信$\Gamma_1$基本上是缩小的，最后在$l=l^*$时消失于$O$。以上两个未证明的事实在二次系统的大范围分支理论中会经常遇到(已见于§14)，尚有待于人们努力去给以严格的证明。

下面回到分支问题，当(16.34)的第一个方程右边被加上$\delta x$项以后，它就成为方程(16.1)了。今以图16.8中的$l$轴作为$(\delta, l)$平面上的纵轴，另画一水平直线过$l=0$的作为横轴($\delta$轴)。那末由旋转向量场理论，我们不难得到如图16.9所示的分支曲线图。

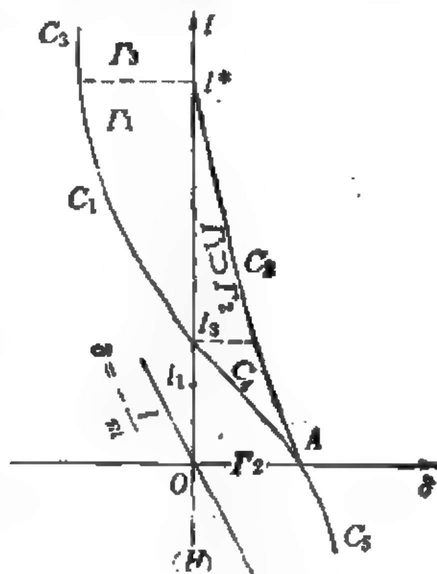


图 16.9

其中$(H)$即整条$l$轴是Hopf分支曲线，当$(\delta, l)$平面上的点移动而穿过$l$轴时，$O$将改变稳定性而产生一极限环，或是有一极限环缩小于$O$，$C_1$表示当$l\in(l_3, l^*)$而$\delta$从零减少时，由于$\Gamma_1$单调扩大而形成了分界线环的分支曲线。$C_3$的意义与$C_1$类似。但$\Gamma_3$是由于$O$点改变稳定性而产生的。实际上，当$\delta<0$时，$\Gamma_1$与$\Gamma_3$是一样的。故以过$(0, l^*)$的虚线段分开$\Gamma_1$与$\Gamma_3$的存在域，它不影响极限环的个数。$C_2$表示$\Gamma_1$与$\Gamma_2$重合而产生半稳定环的分支曲线，这里$\Gamma_2$是当$l<l^*$而$\delta$从零增大

时由于 $O$ 点改变稳定性所产生的环，当 $l<l_3$，而 $0<\delta\ll 1$ 时，只有稳定环 $\Gamma_2$。但由于 $\mathrm{div}|_R>0$，故在 $\Gamma_2$ 扩大而未到达 $R$ 以前，过 $R$ 的两分界线先重合而形成内不稳定分界线环(用 $C_4$ 表示相应的分支曲线)，它破裂而产生不稳定环 $\Gamma_1'$，然后 $\Gamma_2$ 扩大，$\Gamma_1'$ 缩小，最后重合成半稳定环而消失。仍以 $C_2$ 表示相应的分支曲线。图 16.9 中的 $A$ 与 $B(0, l_1)$ 都应位于曲线

$$
\begin{aligned}
&(-1+l)\delta^2+(2ml-2m+a-ma^2-2la)\delta-m^2+4l^2\\
&+1-4l+2lma+lm^2-ma=0
\end{aligned}
\tag{16.53}
$$

上。(16.53) 表示(16.1)的奇点 $R$ 或 $N$ 位于 $\mathrm{div}(P, Q)=0$ 上，在图 16.7 中未曾画出。若在(16.53)中令 $\delta=0$，即得(16.42)中的 $g(l)=0$。$A$ 是 $C_2$ 与 $C_4$ 的公共点，也是 $C_2$ 的下端点。$C_4$ 却可延伸到 $A$ 点的下方成为 $C_5$，它仍表示 $\Gamma_2$ 扩大成为内稳定分界线环。可能对于某些 $m$、$a$ 的值，点 $A$ 会跑到第 Ⅳ 象限中。直线 $\delta=-\dfrac{l}{m}$ 表示(16.1)出现积分直线 $x=\dfrac{1}{m}$。此直线不能与 $C_4$ 和 $C_5$ 相遇，否则，(16.1) 将不是有界系统了。由于当 $|\delta|\geqslant 2$ 时 $O$ 将成为结点。外围不再有极限环和分界线环，所以 $C_3$ 与 $C_5$ 应有铅直渐近线。在 $C_2$、$C_5$ 右方的区域中的点，或是 $C_1$、$C_3$ 左方的区域中的点，对应的方程(16.1)都不存在极限环。

下面试用 Dulac 函数来得出 $N$ 外围有无极限环以及(16.1)能否有极限环的(1, 1)分布的信息。取 Dulac 函数

$$
B(x)=\frac{1}{1-mx},
\tag{16.54}
$$

则由

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\frac{-y+lx^2+mxy}{1-mx}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{x(1+ax-y)}{1-mx}\\
&=\frac{x[2l-1-m(l-1)x]}{(1-mx)^2}
\end{aligned}
\tag{16.55}
$$

可证以下定理。

**定理 16.9** 系统(16.34)在条件(Ⅳ.1)之下不能有 (1, 1)分布的极限环。

**证** 当 $0<l<1$ 时，$x=\frac{2l-1}{m(l-1)}$位于 $x=\frac{1}{m}$的左方。而$N$外围若出现极限环，则它的最左点应位于 $P(x, y)=0$ 的右下支上(见图 16.6)，因而应位于 $x=\frac{1}{m}$的右方，即不可能与

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)=0$$

相交，从而$N$外围不存在极限环。

当 $l\leqslant 0$ 或 $l\geqslant 1$ 时，由图 16.8 知$O$外无环，因此(1, 1)分布不可能存在。∎

事实上，这定理的结论由王明淑、陈兰荪的一个定理(见文献[16.1]中§16)立刻可得出，因为现在$O$是细焦点，且除$O$与$N$以外还有第三个奇点$R$。

对于方程(16.1)，代替(16.55)有

$$\operatorname{div}(BP, BQ)=\frac{1}{(1-mx)^2}[\delta+(2l-1)x-m(l-1)x^2]. \tag{16.56}$$

$\operatorname{div}=0$ 的轨迹是两条铅直直线 $x=x_1$ 与 $x=x_2$，$x_1>x_2$ 是方程

$$\Phi(x)=m(l-1)x^2-(2l-1)x-\delta=0 \tag{16.57}$$

的两个根。由(16.57)可得：

$$\frac{\partial x_i}{\partial \delta}=\frac{1}{2m(l-1)x_i-(2l-1)}=\frac{1}{\left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{x_i}}. \tag{16.58}$$

下面研究当 $\delta$ 变动时$O$与$N$外围的极限环的存在性。

**情况 I)** $0\leqslant l\leqslant\frac{1}{2}$

则 $l-1<0$, $2l-1\leqslant 0$, $0\leqslant\frac{2l-1}{l-1}\leqslant 1$。由(16.57)看出，当 $\delta>0$ 时，有 $0<x_2<x_1$。又易见有：

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{x_1}<0,\quad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{x_2}>0,$$

从而

$$\frac{\partial x_1}{\partial \delta}<0,\quad \frac{\partial x_2}{\partial \delta}>0. \tag{16.59}$$

因此，当 $\delta$ 从零增大时，$x_1$ 从 $\frac{2l-1}{m(l-1)}\leqslant\frac{1}{m}$ 减小，而 $x_2$ 从零增加，二者愈来愈接近。故由图 16.9 及 $N$ 外的极限环应与 $x=x_1$ 相交的性质可知：若 $l>l^*$，则 $O$ 与 $N$ 外都无环；若 $l_3<l<l^*$，则 $O$ 外有两环 $\Gamma_1\supset\Gamma_2$，而 $N$ 外无环。

其次，若 $\delta$ 从零减小，则 $x_2<0<x_1$，但(16.59)式仍成立。故当 $l>l_3$ 时，在 $O$ 外有一 $\Gamma_1$ 或 $\Gamma_3$；当 $l<l_3$ 时，$O$ 外无环。由于现在 $x_1$ 从 $\frac{2l-1}{m(l-1)}$ 增大，当 $N$ 的稳定性改变时，它外围有可能出现极限环，这发生在 $x=x_1$ 通过 $N$ 以前或以后。因此，当 $l>l_3$ 而 $\delta<0$ 时，有可能存在极限环的(1, 1)分布。数字例子尚待寻找[1]。

情况 I) $\frac{1}{2}<l<1$

则 $l-1<0$, $2l-1>0$, $\frac{2l-1}{m(l-1)}<0$。当 $\delta$ 从零增大时，$x_2<x_1<0$，(16.59)式仍成立，故 $N$ 外围不可能有极限环。由于

$$l>\frac{1}{2}>l^*,$$

$O$ 外围亦无环。

其次，若 $\delta$ 从零减小，则 $x_2<0<x_1$，且 $x_1$ 增大，$x_2$ 减小。$N$ 外的情况如情况 I)。又因现在 $l>l^*$，故 $O$ 外围有一环 $\Gamma_3$。(1, 1)分布估计是可能的[2]。

情况 II) $l>1$

则 $2l-1>l-1>0$, $\frac{2l-1}{m(l-1)}>\frac{1}{m}$。代替(16.59)，现在有：

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x_1}>0,\quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x_2}<0,$$

---

1) 若存在(1, 1)分布，则必 $O$ 外的环与 $x=x_2$ 相交；$N$ 外的环与 $x=x_1$ 相交，这是因为在 $x=x_1$ 上只有一点使 $\dot{x}=0$，故 $O$ 外的环不能与它相交了。

2) 见情况 I)的注。

从而
$$\frac{\partial x_1}{\partial \delta}>0,\quad \frac{\partial x_2}{\partial \delta}<0. \tag{16.60}$$
当 $\delta$ 从零增大时有 $x_2<0<x_1$，且 $x_2$ 减小，$x_1$ 增加。由于现在 $l>1>l^*$，故(16.1)在 $O$ 外无环。至于在 $N$ 外围，我们可以用例 16.1 中的方程 $(16.51)_{l_2}$ 来证明当 $l=l_2=2$ 而 $0<\delta\ll 1$ 时 $N$ 外围有环。为此，移原点到 $N(3,\ -9)$ 得
$$\begin{aligned}\dot{x}&=2y+3x+2x^2+xy,\\ \dot{y}&=-10x-3y-\frac{10}{3}x^2-xy.\end{aligned} \tag{16.61}$$
然后再作代换：
$$\xi=10x+3y,\quad \eta=-\sqrt{11}\,y,\quad \frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{11}}.$$
则(16.61)成为：
$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\tau}&=-\eta+\frac{1}{10\sqrt{11}}\xi^2-\frac{6}{55\sqrt{11}}\eta^2-\frac{1}{110}\xi\eta,\\ \frac{d\eta}{d\tau}&=\xi\left(1+\frac{1}{30}\xi+\frac{1}{10\sqrt{11}}\eta\right).\end{aligned} \tag{16.62}$$
对(16.62)的细焦点(0, 0)有：
$$\begin{aligned}W_1&=-\frac{1}{110}\left[\frac{1}{10\sqrt{11}}-\frac{6}{55\sqrt{11}}\right]-\frac{1}{30}\left[\frac{1}{10\sqrt{11}}+\frac{2}{10\sqrt{11}}\right]\\ &=\frac{1}{100\sqrt{11}}\left[\frac{1}{121}-1\right]<0,\end{aligned}$$
即它是一阶稳定细焦点。

现在如果考虑：
$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y+\delta x+2x^2+xy,\\ \dot{y}&=x\left(1-\frac{10}{3}x-y\right).\end{aligned} \tag{16.63}$$
则容易证明当 $0<\delta\ll 1$ 时，$N$的位置略略离开(3, −9)，同时它已成为一个不稳定的粗焦点，从而外围将出现稳定极限环。

回到方程(16.1)，若 $\delta$ 从零减小，则 $0<x_2<x_1$，且(16.60)仍成立，$x_1$ 减小，$x_2$ 增大。由图 16.9 看出，这时 $O$ 外有环 $\Gamma_3$，它应与直线 $x=x_2$ 相交。至于 $N$ 外围，就上例中的方程(16.63)来看，

可见$N$从一阶稳定细焦点变为稳定粗焦点，故$N$外围无环。由此可见：对于方程$(16.51)_{l_2}$的两个细焦点$O$与$N(3,\ -9)$的扰动来说，$\delta$变动而经过零时，在一个焦点外围产生极限环的同时，有另一极限环在另一焦点外围消失，(1, 1)分布不可能。

情况Ⅳ) $l<0$

则$2l-1<l-1<0$, $\dfrac{2l-1}{m(l-1)}>\dfrac{1}{m}$。设$\delta$从零增大，则$0<x_2<x_1$，且(16.59)成立，故$x_1$减小，$x_2$增大，由图16.9看出，$O$外有一稳定环$\Gamma_2$出现，这时若$N$外也出现一环$\Gamma'$，则(1, 1)分布成立。如前，$\Gamma_2$应与$x=x_2$相交，而$\Gamma'$应与$x=x_1$相交。具体的例子见后面的例16.2。

若$\delta$从零减小，则$x_2<0<x_1$，(16.59)仍成立。$O$与$N$外都无环。

**例 16.2** 对方程

$$\dot{x}=-y-\frac{x^2}{2}+3xy,\quad \dot{y}=x\left(1-\frac{19}{12}x-y\right) \tag{16.64}$$

有

$$l=-\frac{1}{2},\ m=3,\ a=-\frac{19}{12},$$

现在$m+a>0$，与例16.1不一样，

$(l-1)^2+4ma<0$ 给出

$$-1-\sqrt{19}<l<\sqrt{19}-1<\frac{19}{4}=-ma.$$

$g(l)=0$有两个根，

$$l_1=-\frac{1}{2}<0<l_2=\frac{13}{8}.$$

(16.64)的奇点为：

$$O(0,\ 0),\ R\left(\frac{3}{7},\ \frac{9}{28}\right)\text{——鞍点；}$$

$$N\left(\frac{4}{9},\ \frac{8}{27}\right)\text{——焦点。}$$

因为$P_x+Q_y=3y-2x=0$通过$N$，故$N$为细焦点，又$\operatorname{div}|_R>0$。

移原点到 $N$，得：

$$\dot{x}=\frac{1}{3}y+\frac{4}{9}x-\frac{1}{2}x^2+3xy,$$
$$\dot{y}=-\frac{19}{27}x-\frac{4}{9}y-\frac{19}{12}x^2-xy. \tag{16.65}$$

再作变换：

$$x=\frac{36\sqrt{3}}{19}\eta+\frac{27}{19}\xi,\quad y=-3\sqrt{3}\,\eta$$

或

$$\eta=\frac{-1}{3\sqrt{3}}y,\quad \xi=\frac{19}{27}x+\frac{4}{9}y;\quad \frac{dt}{d\tau}=3\sqrt{3},$$

则(16.65)变为：

$$\frac{d\xi}{d\tau}=-\eta-\frac{3\sqrt{3}}{19}\left[756\eta^2+243\sqrt{3}\,\xi\eta+\frac{81}{2}\xi^2\right],$$
$$\frac{d\eta}{d\tau}=\xi+\frac{3\sqrt{3}}{19}\left[27\xi\eta+\frac{27}{4}\sqrt{3}\,\xi^2\right], \tag{16.66}$$

由此可见，$N$是一阶不稳定细焦点。另一方面，$O$ 是(16.64)的一阶稳定细焦点。故(16.64)或(16.66)无环[1]。

现在考察：

$$\dot{x}=-y+\delta x-\frac{1}{2}x^2+3xy,$$
$$\dot{y}=x\left(1-\frac{19}{12}x-y\right). \tag{16.67}$$

其中$0<\delta\ll 1$。则$O$变为不稳定粗焦点，其外出现一稳定环$\Gamma_2$。$N\left(\frac{4}{9},\ \frac{8}{27}\right)$现在略略移动到 $N'(x_3,\ y_3)$，$x_3$ 满足方程：

$$63x^2-(55+12\delta)x+12=0,$$

故

1) 注意 $\dot{x}=-y+\frac{13}{8}x^2+3xy,\ \dot{y}=x\left(1-\frac{19}{12}x-y\right)$仍有细焦点 $N'\left(\frac{6}{5},-\frac{9}{10}\right)$。故与例 16.1 不同。关于 $l_1$、$l_2$ 与 $R$、$N$ 哪个是细奇点的关系，文献[16.16]有详细讨论。

$$x_3=\frac{55+12\delta+\sqrt{1+1320\delta+144\delta^2}}{126},\quad y_3=1-\frac{19}{12}x_3.$$

又

$$\begin{aligned}(P_x+Q_y)_{N'}&=\delta+3y_3-2x_3\\&=\frac{504\delta-228\delta-96\delta-17820\delta+0(\delta)}{504}\\&<0.\end{aligned}$$

即 $N'$ 为稳定粗焦点[1)]。故(16.67)有(1, 1)分布的极限环。

对方程(16.67)有

$$\Phi(x)=-9x^2+4x+\delta=0.$$

它的两根(当 $0<\delta\ll 1$时)为：

$$x_1\doteq\frac{4}{9}-\frac{1}{4}\delta,\quad x_2\doteq\frac{\delta}{4}.$$

$O$ 外的环应与 $x=x_2$ 相交，$N'$ 外的环应与 $x=x_1$ 相交。

当 $0<\delta<\delta_1<\frac{1}{6}$， $\delta=\frac{1}{6}$ 与 $\delta>\delta_2>\frac{1}{6}$时，(16.67)的相图如图 16.10 所示。注意：$\delta=\frac{1}{6}$是(16.67)的一个分支值，这时

$$P(x,y)=(3x-1)\left(y-\frac{1}{6}x\right),$$

故 $x=\frac{1}{3}$是一铅直积分直线，而鞍点 $B\left(\frac{1}{3},\ \frac{17}{36}\right)$恰在 $x=\frac{1}{3}$上。这时 $\operatorname{div}|_B>0$。又因现在(16.58)成为

$$-\frac{3}{2}\delta^2-\frac{793}{48}\delta=0,$$

它没有正根，故 $\operatorname{div}|_B>0$(对一切 $\delta>0$)。

由图 16.10 可看出：

1) 当 $0<\delta<\frac{1}{6}$ 时，轨线与 $x=\frac{1}{3}$相交者常从右向左。由于(16.67)是有界系统，分界线 $l_1$ 应进入稳定环 $\Gamma_2$ 的邻域。$B'$ 位于 $x=\frac{1}{3}$的右方，故从下方进入 $B'$ 的分界线 $l_2$ 也来自 $x=\frac{1}{3}$ 的 右

1) 若 $\delta<0$, $|\delta|\ll 1$, 则 $N'$ 为不稳定粗焦点。

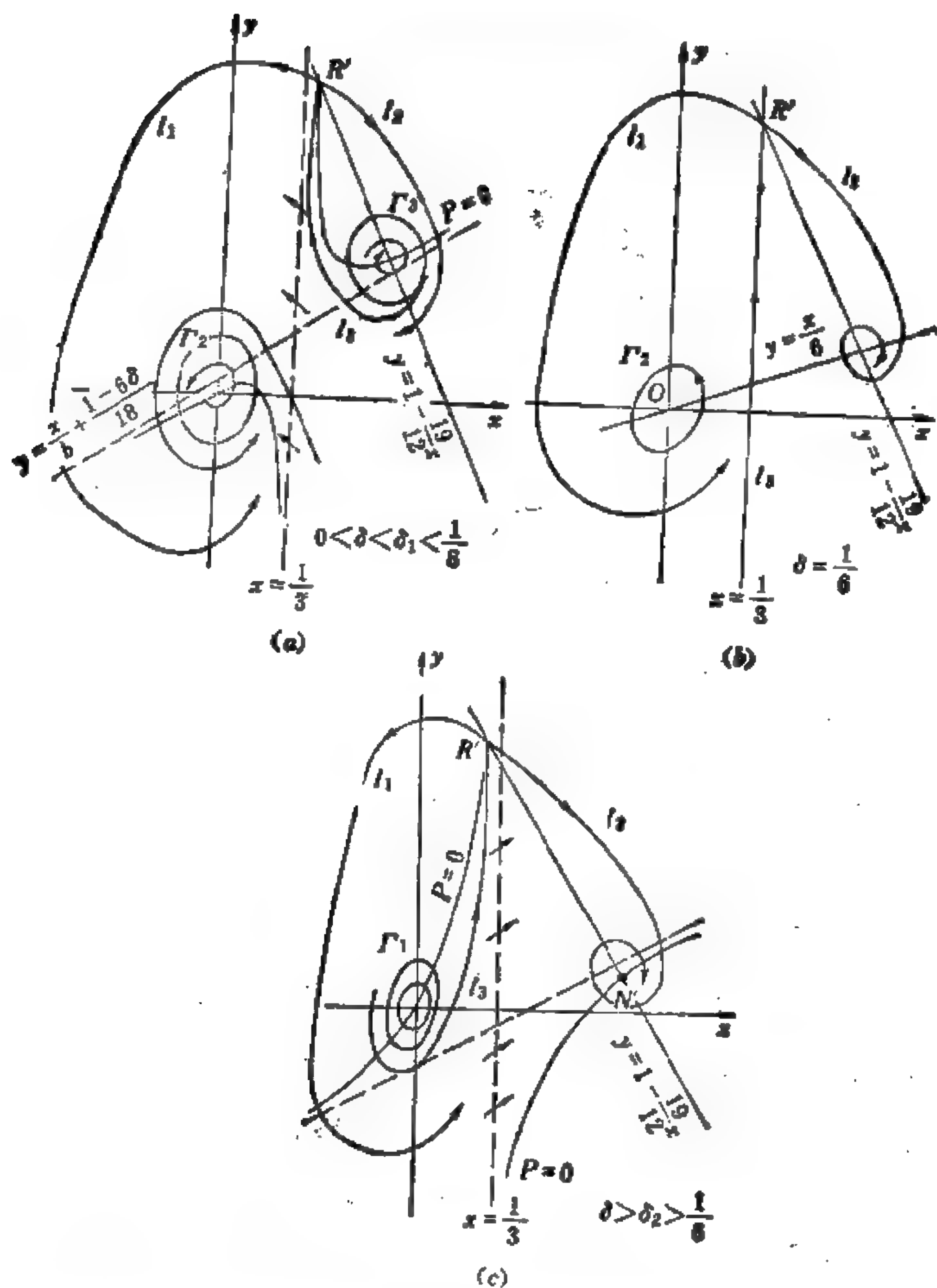



图 16.10

方。易见，当 $0<\delta\ll 1$ 时，$l_3$ 是来自 $\Gamma_3$ 的邻近。但当 $\delta=\delta_1$ 时，$l_2=l_3=\Gamma_3$，然后当 $\delta_1<\delta<\frac{1}{6}$ 时，改为 $l_2$ 进入 $N'$ 邻近，$l_3$ 则来自无穷远。

2) 当$\delta=\frac{1}{6}$时，$l_3$成为$x=\frac{1}{3}$的下半部，$\Gamma_3$已于$\delta=\delta_1$时消失，而$O$外的$\Gamma_2$仍存在，$N$外围无环，因为(16.67)只能有一个环。

3) 当$\delta=\delta_2>\frac{1}{6}$时，$l_3$与$l_1$重合，交换位置而产生$\Gamma_1\supset\Gamma_2$，$R'$已移到$x=\frac{1}{3}$的左方，由于$\Gamma_2$是稳定环，而$\operatorname{div}|_{R'}>0$，故$\Gamma_2$不可能扩大而到达$R'$。这时，轨线与$x=\frac{1}{3}$相交的都从左到右穿过它。由于(16.67)是有界系统，故$l_1$穿过$x=\frac{1}{3}$之后亦必进入$N'$邻近。

以上的讨论说明了(16.67)不可能有极限环的(2, 1)分布，因为在$O$外围出现两个环以前$N'$外围的环已经消失了。后面的定理16.10将对一般的有界二次系统来证明同样的结论。

上述分析过程对于一般的有界二次系统(16.1)与(16.2)也是可行的。当$\delta=-\frac{l}{m}$时，$R'$位于$x=\frac{1}{m}$上，它是(16.1)的积分直线。故(16.1)若有极限环必为唯一。又当$O$与$N$都是细焦点时，它们必同时为一阶细焦点，具有不同的稳定性，且(16.1)不存在极限环。若(16.1)只有一个细焦点，则极限环应集中分布。

**定理 16.10** 有界二次系统(16.1)与(16.2)不能有极限环的(2, 1)分布。

证 如前可设$m>0$, $a<0$, $b=-1$, $2\sqrt{-ma}-1>0$。由上一段所述知道在讨论(2, 1)分布是否可能时，可设$O$与$N$都是粗焦点，且具不同的稳定性。

情况 I) 设$\delta>0$，于是$O$为不稳定，$N$为稳定，假设(2, 1)分布存在，则又可分为两种情况：

1) $O$外围有两个环，$N$外围有一个环。

根据$l$与$\delta+\frac{l}{m}$的符号，又可能出现三种情况：

(1) $l<0$, $\delta+\frac{l}{m}>0$

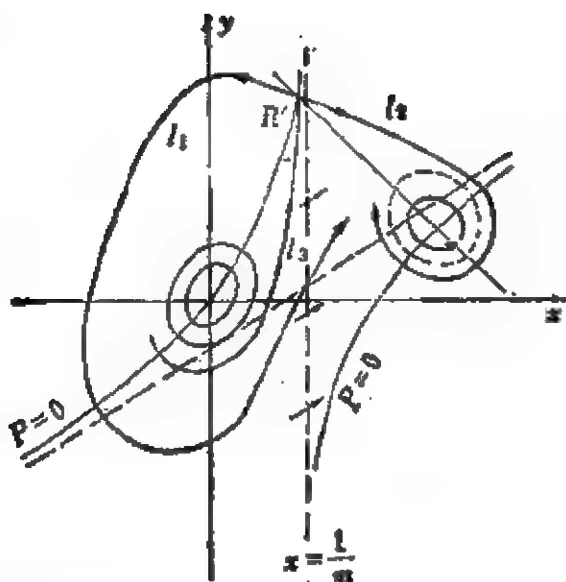



图 16.11

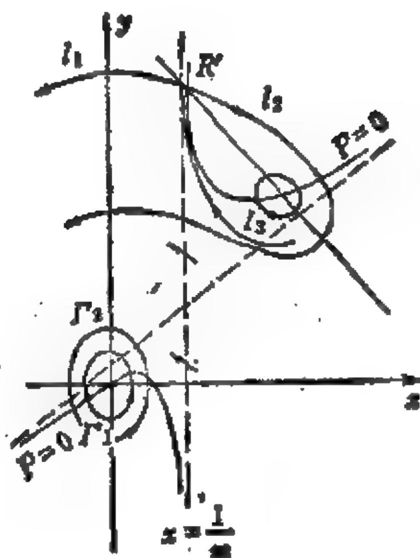



图 16.12

因为在 $x=\dfrac{1}{m}$上有 $\dot{x}=\dfrac{m\delta+l}{m^2}>0$, 故相图如图 16.11所示。但是最靠近$N$的极限环应是不稳定的。故由分界线的走向和(16.1)的有界性，知$N$外还应有一稳定环（图 16.11 中以虚线表出）。于是将出现环的(2, 2)分布，这是不可能的。

(ii) $l<0$, $\delta+\dfrac{l}{m}<0$

这时在 $x=\dfrac{1}{m}$上有 $\dot{x}<0$, 故有图 16.12。但$O$外围的大环$\Gamma_3$应是不稳定的，故 $l_1$ 与 $l_2$ 都应跑向无穷远，这不可能。

(iii) 若 $l>0$, 则必有$\delta+\dfrac{l}{m}>0$, 故有图 16.13。如情况(i)一样可导出(2, 1)分布的不可能性。

2) $O$ 外有一个环，$N$ 外有两个环。

同前又可分为三种情况：

(i) $l<0$, $\delta+\dfrac{l}{m}<0$, 则有图 16.14。现在让$\delta$减小而趋于零，则 $\Gamma_1\to O$, 同时不稳定环 $\Gamma_2\to N$。但稳定环 $\Gamma_3$ 应仍存在。这是因为 $\operatorname{div}(P, Q)=0$ 应在 $R'$ 与 $N'$ 之间穿过 $1+ax-y=0$。故

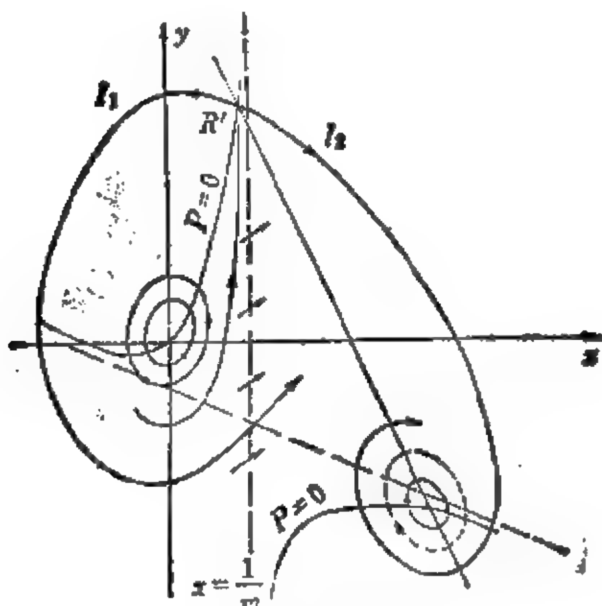



图 16.13

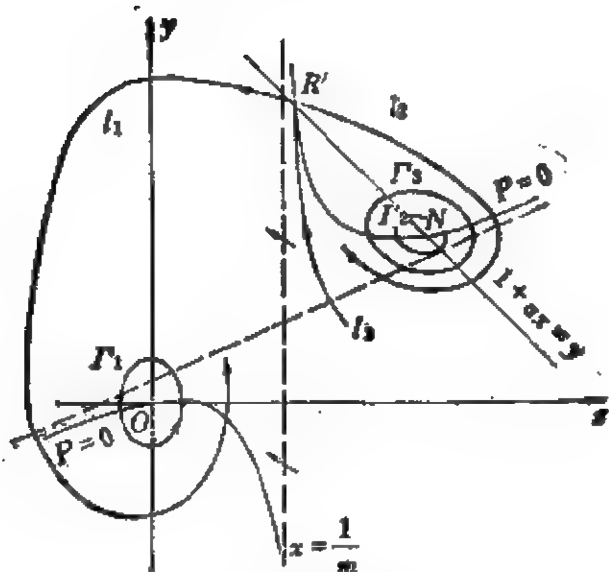



图 16.14

$\mathrm{div}|_{R'}>0$, 从而 $\Gamma_3$ 不可能扩大到达 $R'$。这样，当 $\delta=0$ 时，$(16.1)_{\delta=0}$ 即(16.34) 应有两个细焦点和一个极限环 $\Gamma_3$, 这不可能。

(ii) $l<0$, $\delta+\frac{l}{m}>0$, 有图 16.15。

(iii) $l>0$, 从而 $\delta+\frac{l}{m}>0$, 有图 16.16。

这两种情况都可如前(i)一样导出矛盾。

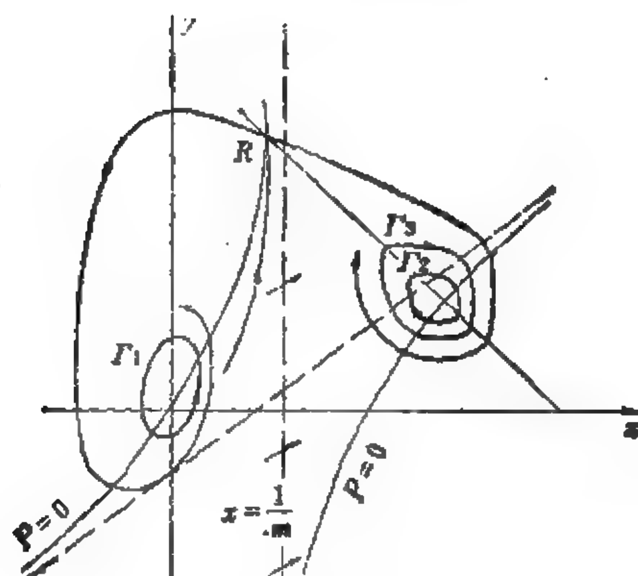



图 16.15

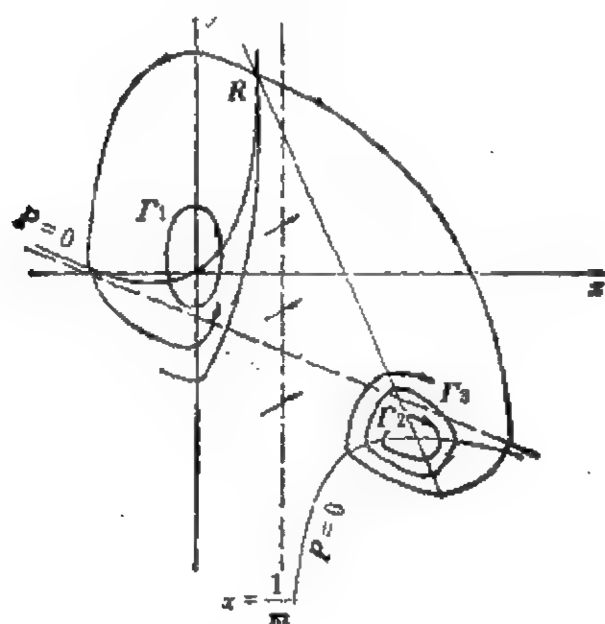



图 16.16

**情况 I)** 设 $\delta<0$。于是 $O$ 为稳定，$N$ 为不稳定。

(2, 1) 分布不可能性的证明与前类似，但 $\delta<0$，$\delta+\frac{l}{m}<0$，$l>0$ 时的相图与前面六个图都不一样，其不可能性的证明则类似于情况 I).2).(i)。定理证毕。∎

在文献[16.10]中主要得到下列六项结果：

1) 证明当 $a_1b_2-a_2b_1>0$ 时，有界二次系统，

$$\dot{x}=-a_1x-a_2y+y^2,\quad \dot{y}=b_1x+b_2y-xy+cy^2 \tag{16.68}$$

(其中 $a_1>0$, $-2<c\leqslant 0$, 见(I)与(I.1))有两个一阶细焦点 $(x_1, y_1)$ 与 $(x_2, y_2)$ 当且仅当:

$$b_1=a_1c,\quad a_2=\frac{a_1}{c},\quad -2<c<0. \tag{16.69}$$

这一结果之所以比文献 [16.9] 中的美好，是因为 $O(0, 0)$ 被取作鞍点，而两个非鞍点同为细焦点的条件可写成相同的形式:

$$a_1^2-a_2b_1+(b_1-ca_1)y_i=0\quad (i=1,\ 2).$$

由于 $y_1\neq y_2$, 故要上式对 $y_1$、$y_2$ 同时成立，必须且只须

$$a_1^2-a_2b_1=0,\quad b_1-ca_1=0.$$

即得(16.69)。

2) 由 1)易证：若(16.68)满足:

(i) $a_1>0$, $-2<c<0$;

(ii) $b_2-a_1>0$;

(iii) $b_1=a_1c(1-\varepsilon)$, $a_2=\dfrac{a_1}{c(1-\varepsilon)}$.

其中 $0<\varepsilon\ll 1$, 则(16.68)有(1, 1)分布的极限环。

3) 当 $0<\varepsilon\ll 1$ 时，$(x_i, y_i)$ 外围恰各有一个极限环。

但这一事实其实是不用花大力气去证明的。因为当 $\varepsilon=0$ 时，两个细焦点外围不存在极限环与分界线环；而当 $0<\varepsilon\ll 1$ 时，由 Bautin 的理论在焦点邻近的小振幅环是唯一的，且在它处也不可能出现由半稳定环或分界线环产生的极限环。

4) 当有界二次系统

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy,\quad \dot{y}=x(1+x+by) \tag{16.70}$$

(其中 $m<0$, $b>0$, $(b-l)^2+4m<0$, 见(16.1)与(16.2))有二阶细焦点 $O(0, 0)$, 亦即 $W_1=ml-(b+2l)=0$ 时，必有 $W_2>0$, 即 $O$ 必为不稳定二阶细焦点。

这由 $m-bl<0$ 以及 $l<0$ 可知必有

$$W_2=ml^3(m-5)(m-bl)>0.$$

由此可见(16.70)既不可能有三阶细焦点，也不可能有中心。

5) 有界二次系统(16.70)在其二阶细焦点$O$的外围不存在极限环。

为此文献[16.10]也花了很大的篇幅，其实对一般有二阶细焦点$O$的$(\mathrm{II})_{n=0}$类方程，[16.12]已证明当$\frac{a}{m}<0$时在全平面没有极限环了。

6) 研究了有界二次系统

$$\dot{x}=y(y-a),\quad \dot{y}=y(b-x) \tag{16.71}$$

(其中$a>0$, $b<0$)的开折

$$\dot{x}=y(y-a)+\mu_1x,\quad \dot{y}=y(b-x)+\mu_2x+\mu_3y^2, \tag{16.72}$$

其中$\mu_1$、$\mu_2$、$\mu_3$为小参数。

(16.71)在$y=0$上充满了奇点，所以这是一个特殊的局部分支问题。令

$$\mu_1=-\delta,\quad \mu_2=\delta\nu_2,\quad \mu_3=\delta\nu_3.$$

[16.10]在$(\nu_2,\nu_3)$平面上所得的分支图基本上与图16.9一致。

此外还有文献[16.19]，其中证明了：若二次系统有界，且有三个有限远奇点，则在其一阶细焦点外围最多只能有一个极限环。

关于有界三次系统近年来也有不少工作，例如在文献[16.13]、[16.14]、[16.23]中研究了：

$$\dot{x}=a_1x+a_2y+a_3x^2+a_4xy+a_5y^2+a_6x^3+a_7x^2y$$
$$+a_8xy^2+a_9y^3,\quad \dot{y}=x, \tag{16.73}$$

为有界系统的各种充要条件(情况很多)，以及极限环的存在与唯一性。由此可以看出，即使是一个很特殊的三次系统(16.73)，研究其有界性也比二次系统困难得多。

文献[16.15]在无穷远奇点为唯一的条件下得到三次系统为有界的条件。

在文献[16.16]中证明了：对$R^n$中的逦有有界多项式向量场，它的一切奇点的指标总和为$(-1)^n$。[16.16]又分析了$R^2$中的有界多项式系统在其无穷远孤立奇点的邻域中的相图，从而导出：有界三次系统在赤道邻域中恰有17种不同的拓扑结构。

此外，在前面已介绍过的文献[16.8]中也有一些关于三次齐次有界系统的结果，不再在此细述了。

若不限于多项式系统，则考虑广义 Lienard 方程

$$\dot{x}=h(y)-F(x),\quad \dot{y}=-g(x)$$

的解的有界性的文章有[16.20]，其中容许方程可以有多个奇点。

# 参 考 文 献


[16.1] Ye Yanqian and others.Theory of limit cycles, Trans. Math, Monographs.v.66(1986), AMS.

[16.2] Coll B, Gasull A and Llibre J.Some theorems on the existence, uniqueness and nonexistence of limit cycles for quadratic systems, J. of Diff.Eqs.67(1987), 372～399.

[16.3] Yang Xinan.Number of limit cycles of the bounded quadratic systems with two finite singular points, Chin.Ann.of Math.B4(1983), 217～225.

[16.4] Dickson R J and Perko L M.Bounded quadratic systems in the plane, J.of Diff.Eqs.7(1970), 251～273.

[16.5] 梁肇军. 多项式微分系统全局分析导引. 华中师范大学出版社, 1989.

[16.6] Han Maoan.Properties in the large of quadratic systems in the plane, Chin.Ann.of Math.10B 3(1989).

[16.7] Yang Xinan.A bounded quadratic system with a weak focus, Ann.of Diff.Eqs.4(2), 1988, 231～242.

[16.8] Llibre J.Bounded polynomial vector fields (I) Dynamical Systems, Proc Spec.Prog Nankai Inst.Math.1990～1991, v.4(1993), 126～136, World Scientitfic, Singapore.

[16.9] Ye Yanqian.Bifurcation problem of bounded quadratic systems, Research Report, no.158, 1992, Centre de Recerca Matematica, Institut d'Estudis Catalans. or J. Nanjing Univ, Math. Biq., 1993, 27～36.

[16.10] Li Chengzhi, Llibre J and Zhang Zhifen. Weak focus, Limit cycles and bifurcations for bounded quadratic systems. Research Report. 1993, Centre de Recerca Matematica, Institut d'Estudis Catalans.

[16.11] Ye Yanqian.Bifurcation theory of quadratic differential systems Chin.Ann.of Math.14B, 1993, 427～434.

[16.12] 蔡燧林，汪中位. 具二阶细焦点的二次系统(Ⅲ)$_{n=0}$的极限环. 数学年刊 5A(1984), 764～770.

[16.13] Chen Guowei.Some bounded cubic systems (I), Ann. Diff.

Eqs.4(3), 1988.

[16.14] Chen Guowei. A bounded $E_3^1$ system and its limit cycle, Ann. of Diff.Eqs.5(3), 1989, 253～261.

[16.15] 李林，党新益。有界三次系统 I，西北大学学报 19 (1989)，又 II，同刊，20(1990)。

[16.16] Cima A and Llibre J. Bounded polynomial vector fields. Trans.Amer.Math.Soc.v.318(1990), 557～579.

[16.17] Coll B, Gasull A, Llibre J.A note on the bounded quadratic systems(Preprint).

[16.18] 江其保。二次系统发散量在鞍点或焦点的符号判定，南京大学学报，数学半年刊1993年增刊，40～47。

[16.19] Xie Xiangdong.On the uniqueness of limit cycles of a bounded quadratic system with a weak focus, Ann.Diff.Eqs.8(3), 1992, 379～383.

[16.20] 韩茂安。一类非线性方程解的有界性。高校应用数学学报，2(1989)。

[16.21] 韩茂安。关于方程 $\dot{x}=\varphi(y)-F(x)$，$\dot{y}=-g(x)$的周期解，无界解及振荡解。南京大学学报数学半年刊 1984, no.1, 89～101.

[16.22] 张芷芬等。微分方程定性理论。科学出版社，1985。

[16.23] Chen Guowei.The $E_3^1$ system with two invariant conjugate imaginary lines, Ann.of Diff.Eqs.7(4), 1991, 385～401.

[16.24] Bose A K and Renke J A. Sufficient conditions for two-dimensional point dissipative nonlinear systems, Int. J. Math, Math. Sci., 1989.v.12, no. 4, 693～696.

# §17. 多项式系统的代数解与极限环和可积性的关系

这方面的研究工作从50年代末开始不断有新的成果出现,特别是近几年来进展尤为迅速。下面分几个方面来介绍。

**一、二次系统方面**

1) 有一条积分直线的二次系统最多只能有一个极限环(见文献[17.1]或本书§10)。

2) 有两条积分直线的二次系统没有极限环,但可以有中心(见文献[17.1]中§1的习题)。

3) 有三条积分直线的二次系统没有极限环,但可以有中心(见文献[17.1]中§11)。

4) 有≥4条积分直线的二次系统没有闭轨线(见文献[7.2])。

5) 有一对共轭复积分直线的二次系统可能有极限环,若存在必为唯一(见文献[17.3])。

为了证明这一有趣的结果,先定义两条复共轭直线的平行与相交。两直线:

$$l_1:\ mx+ny+p=0,\quad l_2:\ \bar{m}x+\bar{n}y+\bar{p}=0, \tag{17.1}$$

其中 $m=a+bi$, $n=c+di$, $p=r+si$; $\bar{m}=a-bi$, $\bar{n}=c-di$, $\bar{p}=r-si$ 称为复共轭。易见:

$$\begin{vmatrix} m & n \\ \bar{m} & \bar{n} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ a-bi & c-di \end{vmatrix}=2(bc-ad)i. \tag{17.2}$$

i) 若 $bc-ad=0$, 则 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$, 即 $\dfrac{m}{n}$为实数。此时 $l_1$ 与 $l_2$ 无

交点，称它们为平行。$bc-ad=0$ 也就是

$$m\bar{n}-n\bar{m}=0 \text{ 或 } \frac{m}{n}=\frac{\bar{m}}{\bar{n}}。\tag{17.3}$$

ii) 若 $m\bar{n}-n\bar{m}\neq 0$，即 $bc-ad\neq 0$，则 $l_1$ 与 $l_2$ 有唯一的实交点$\left(\frac{-sc+rd}{bc-ad},\ \frac{-br+as}{bc-ad}\right)$，称 $l_1$ 与 $l_2$ 为相交。

当 $l_1$ 与 $l_2$ 相交时，可经实系数非异仿射变换把它们化为：

$$l_1:\ y+ix=0;\quad l_2:\ y-ix=0。\tag{17.4}$$

而以 $l_1$ 与 $l_2$ 为积分直线的二次系统，则可化为[1]：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=(\lambda x-\mu y)(ax+by+c)+k(x^2+y^2),\\ \dot{y}&=(\mu x+\lambda y)(ax+by+c),\end{aligned}\tag{17.5}$$

若 $\mu=0$，则(17.5)有星形结点 $O(0,0)$；若 $c=0$，则(17.5)为齐二次系统；若 $k=0$，则(17.5)可约化为线性系统，都无极限环。因此下面研究 $\mu ck\neq 0$ 的情况：不妨设 $\mu=c=k=1$，而(17.5)化为：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=(\lambda x-y)(ax+by+1)+x^2+y^2,\\ \dot{y}&=(x+\lambda y)(ax+by+1)。\end{aligned}\tag{17.6}$$

当 $a=\lambda=0$ 时，$O(0,0)$ 是中心点，无极限环。当 $a=0$，$\lambda\neq 0$ 时(17.6)有首次积分：

$$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(1+by)^{-\frac{1}{b}}=\exp\left(-\lambda\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right),\tag{17.7}$$

亦无极限环$\left(\text{当 arc tg}\frac{y}{x}\to\pm\infty\text{时，} r=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\to 0 \text{ 或 } \infty\right)$。

若 $a\neq 0$，则易见 $L=ax+by+1=0$ 是(17.6)的无切直线，取 Dulac 函数

$$B(x,y)=\frac{1}{(x^2+y^2)(ax+by+1)},\tag{17.8}$$

则 $B(x,y)$ 在 $L>0$ 且去掉原点的双连通域中恒正。又对 (17.6) 有：

$$\operatorname{div}(BP,BQ)=\frac{-a}{(ax+by+1)^2},$$

它在上述区域中定号，故由推广的 Dulac 定理，知道(17.6)在 $L>$

1) 也可以说(17.5)有点椭圆解 $x^2+y^2=0$。

0 区域中最多只能有一个极限环，在 $L<0$ 区域中没有闭轨线。利用分析无限远奇点的方法可以证明：当 $a\lambda-b+1=0$ 时，(17.6)有唯一的有限远奇点 $O$ 和唯一的无限远奇点 $N(-\lambda, 1, 0)$，从而易证，这时(17.6)有极限环的充要条件是 $\lambda a>0$（见文献[17.3]）。

下面转到有二次代数曲线解的二次系统：

6) 有椭圆解的二次系统若在椭圆上无奇点，则它是唯一的极限环(见文献[17.1])。若椭圆上有奇点，则必有两个单奇点或一个鞍结点，这时二次系统无极限环，椭圆也不可能成为二次系统的有返回映射的分界线环(见文献[17.4])。

7) 有双曲线解的二次系统无极限环(见文献[17.5])，这时方程不一定可积。双曲线的一支或两支都可能成为二次系统的无限大分界线环的一部分(见[17.6])。关于二次系统有双曲线解、两相交直线解或虚椭圆解时不存在极限环，在[17.7]与[17.8]中有统一的证明，也是应用形如(17.8)的 Dulac 函数，故从略。

8) 有抛物线解的二次系统可以有极限环，若存在必为唯一。

前一事实由文献[17.9]、[17.10]、[17.11]几乎同时发现的。后来又有[17.12]、[17.13]、[17.14]、[17.15]也得到。关于这种二次系统有下列许多值得注意的结果：

i) 方程必可化为[17.12]：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=c(y-x^2)+(a+bx+gy)+exy,\\ \dot{y}&=d(y-x^2)+2x(a+bx+gy)+2ey^2,\end{aligned}\qquad(17.9)$$

这时 $y=x^2$ 是抛物线解。

ii) 二次系统不在抛物线解上的奇点最多有一个。当此奇点存在时，方程必可化为[17.10]：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=xy+\mu,\\ \dot{y}&=(xy+\mu)(x+l)+(2y\pm1)\left(y-\frac{x^2}{2}-lx-m\right)\quad(\mu>0).\end{aligned}\qquad(17.10)$$

这时 $y=\frac{x^2}{2}+lx+m$ 是抛物线解。

证明大意：设二次系统为：

$$\dot{x}=P_2(x,\ y),\ \dot{y}=Q_2(x,\ y),\tag{17.11}$$

而抛物线解为$y=x^2$。于是有：

$$Q_2(x,\ y)-2xP_2(x,\ y)\equiv(\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1)(y-x^2).$$

由此可得：

$$\begin{aligned}&\frac{Q_2(x,\ y)-y(\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1)}{x}\\&\equiv 2P_2(x,\ y)-x(\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1)\\&\equiv\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2,\end{aligned}$$

代入(17.11)式，即得：

$$\begin{aligned}&\dot{x}=\frac{1}{2}x(\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1)+\frac{1}{2}(\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2),\\&\dot{y}=y(\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1)+x(\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2).\end{aligned}\tag{17.12}$$

(17.12)的奇点除了由方程组：

$$\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1=0,\quad \alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2=0\tag{17.13}$$

所决定的以外，其余的都在$y=x^2$上，若(17.13)无解或有无穷多个解，则(17.12)显然没有极限环。今设(17.13)有唯一的解，则$|\alpha_1|+|\beta_1|\neq0$。当$\alpha_1\neq0$，$\beta_1=0$时，可用 Dulac 函数

$$B(x,\ y)=(y-x^2)^{-2-\frac{\beta_2}{\alpha_1}}$$

来证明(17.12)没有极限环。故以后可设$\beta_1\neq0$。今记：$\alpha_1=\beta_1\bar{\alpha}_1$，$\gamma_1=\beta_1\bar{\gamma}_1$，$\alpha_2=\beta_1\bar{\alpha}_2$，$\beta_2=\beta_1\bar{\gamma}_2$，$\gamma_2=\beta_1\bar{\gamma}_2$。再作代换：$\bar{t}=\beta_1t$，$\bar{x}=x+\bar{\beta}_2$，$\bar{y}=\frac{1}{2}(\bar{\alpha}_1x+y+\bar{\gamma}_1+\bar{\alpha}_2-\bar{\alpha}_1\bar{\beta}_2)$，

则(17.12)变为(仍记$\bar{x}$，$\bar{y}$，$\bar{t}$为$x$，$y$，$t$)：

$$\begin{aligned}&\dot{x}=xy+\mu,\\&\dot{y}=(xy+\mu)(x+l)+(2y-n)\left(y-\frac{1}{2}x^2-lx-m\right).\end{aligned}\tag{17.14}$$

其中

$$\mu=-\frac{\bar{\beta}_2(\bar{\alpha}_1\bar{\beta}_2-\bar{\gamma}_1-\bar{\alpha}_2)+\bar{\gamma}_2}{2},\quad l=\frac{1}{2}\bar{\alpha}_1-\bar{\beta}_2,$$

$$m=\frac{1}{2}(\bar{\beta}_2^2+\bar{\gamma}_1+\bar{a}_2-2\bar{a}_1\bar{\beta}_2),\ n=\bar{a}_1\bar{\beta}_2-\bar{a}_2.$$

而(17.14)的抛物线解是

$$y-\frac{1}{2}x^2-lx-m=0.$$

在(17.14)中再作适当的伸缩变换可变$n$为$\pm1$，而其形式不变。此外，显见$\mu=0$时无环，因为这时奇点不是在积分直线$x=0$上就是在抛物线解上。故不失一般性可设$\mu>0$。于是得到(17.10)式。

iii) 当抛物线解上无奇点或有两个初等奇点时，二次系统没有极限环。

这时在(17.9)中必有$e=0$，可用$|y-x^2|^a$形式的Dulac函数来证明无环性。

iv) 抛物线解上有奇数个奇点时，二次系统可以有极限环。

在文献[17.7]、[17.12]、[17.15]中都有具体的例子说明了二次系统有抛物线解时，有极限环或没有极限环。此处从略。

v) 有抛物线解的二次系统若有一细焦点，则不存在极限环，且焦点只能是一阶的[17.12], [17.13]。

vi) 有两抛物线解的二次系统没有极限环[17.13]。

例 17.1[17.13] $\dot{x}=xy+2ml,$

$$\dot{y}=(xy+2ml)(x+l)+(2y-1)\left(y-\frac{1}{2}x^2-lx-m\right)$$

有两个抛物线解：

$$y-\frac{1}{2}x^2-lx-m=0 \text{ 和 } -y-\frac{x^2}{4m}+lx-\frac{1}{2}=0.$$

在前者之上有奇点$(-2l,\ m)$；在后者之上有奇点$\left(2\mu,\ -\frac{1}{2}\right)$。

关于有抛物线解时极限环的唯一性，在文献[17.13]中已证明，当二次系统为$(\mathrm{I})_{l=0}$、$(\mathrm{I})_{m=0}$或$(\mathrm{II})_{a=0}$类方程时极限环是唯一的。一般情况最近已由文献[17.16]与[17.57]各自独立地证明了。由于[17.16]从[17.12]的方程(17.9)出发，而[17.12]只考虑了极限环位于抛物线内部的情况；[17.57]从[17.10]的方程

(17.10)出发，而[17.10]同时考虑了极限环在抛物线内部及外部的情况，所以下面简要介绍文献[17.57]的证法。

引理 17.1　系统 $(17.10)_+$（$(17.10)_-$）的极限环只能出现在奇点$M\left(-2\mu,\ \frac{1}{2}\right)$ $\left(M'\left(2\mu,\ -\frac{1}{2}\right)\right)$的外围。$(17.10)_+$有极限环的必要条件是：

$$\text{(i)}\ \mu(l-2\mu)>0;\quad \text{(ii)}\ \frac{1}{2}-2\mu^2+2l\mu-m>0;$$

$$\text{(iii)}\ 2l\mu-2m+\frac{3}{2}<0。\tag{17.15}$$

$(17.10)_-$有极限环的必要条件是：

$$\text{(i)}\ \mu(l+2\mu)>0;\quad \text{(ii)}\ \frac{1}{2}+2\mu^2+2l\mu+m>0;$$

$$\text{(iii)}\ l\mu\left(2l\mu+2m+\frac{3}{2}\right)<0。\tag{17.16}$$

为此只须考虑$M$或$M'$为焦点的条件即可得到条件(i)、(ii)。又可证当$M$（或$M'$）为不稳定，即条件(iii)不成立时，可以用形如$B(x,\ y)=x^{\lambda}\left(y-\frac{1}{2}x^2-lx-m\right)^{s}$的 Dulac 函数来证明不存在极限环。故(iii)成立。又由(ii)可看出，$M$（$M'$）必在抛物线内部（外部）。

下面就$(17.10)_+$来证明极限环的唯一性，对于$(17.10)_-$的证明是类似的。在$(17.10)_+$中作非奇异变换：

$$u=y-\frac{1}{2}x^2-lx-m,\ v=x。\tag{17.17}$$

则易见只须考虑$u>0$，$v<0$的区域即可。在(17.17)之下$(17.10)_+$变为：

$$\dot{v}=v\left(u+\frac{1}{2}v^2+lv+m\right)+\mu,$$

$$\dot{u}=u(2u+v^2+2lv+2m)-u。\tag{17.18}$$

再作变换：

$$x=v,\ y=\ln\frac{u}{v^2},\ v^3t=\tau。\tag{17.19}$$

则(17.18)化为(注意 $x<0$)：

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau} &= e^y + \frac{\frac{1}{2}x^3 + lx^2 + mx + \mu}{x^3} \triangleq e^y - F(x), \\
\frac{dy}{d\tau} &= -\frac{x+2\mu}{x^4} \triangleq -g(x).
\end{aligned}
\tag{17.20}
$$

这时$M$在(17.20)中的坐标为

$$
(-2\mu,\ y_0),\quad y_0 = \ln\frac{\frac{1}{2} - 2\mu^2 + 2l\mu - m}{4\mu^2}.
$$

再对(17.20)作平移，把原点移到$(-2\mu,\ y_0)$，则 (17.20)化为：

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau} &= e^{y_0}(e^y - 1) - [F(x-2\mu) - e^{y_0}], \\
\frac{dy}{d\tau} &= -g(x-2\mu).
\end{aligned}
\tag{17.21}
$$

记

$$
f(x) = F'(x),\ \text{则}[F(x-2\mu) - e^{y_0}]' = f(x-2\mu). \tag{17.22}
$$

又因$\varphi(y) = e^{y_0}(e^y - 1)$，故$\varphi'(y) = e^{y_0}e^y > 0$。由熟知的张芷芬唯一性定理，要证(17.21)在$O(0,\ 0)$外围至多有一极限环，只须证明：

$$
\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x-2\mu)}{g(x-2\mu)}\right] \geqslant 0 \quad (x<2\mu,\ x\neq 0), \tag{17.23}
$$

或

$$
\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] \geqslant 0 \quad (x<0,\ x\neq -2\mu). \tag{17.24}
$$

今由(17.20)可算出：

$$
\frac{d}{dx}\cdot\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x+2\mu)^2}[lx^2 + 4l\mu x + \mu(4m-3)]. \tag{17.25}
$$

而由(17.15)中的条件(iii)知道上式右边[ ]内的判别式为负，再由(17.15)中的条件(i)知有 $l>2\mu>0$。故(17.24)式成立。引理证毕。∎

现在再转到有三、四次代数曲线解的二次系统：

9) 有卵形三次曲线解的二次系统必为可积的，没有极限

环[17.18]。证明可由以后的定理 17.11 导出。

10) 有三次曲线解 $y^2=(x+1)(2x-1)^2$ (它以 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 作为二重点)的二次系统可以把此解的封闭部分作为分界线环[17.18]。

11) 有三次曲线解 $y^2=(2x+1)^2(x-1)$ $\left(\text{它有一孤立点}\left(-\frac{1}{2},0\right)\text{和一两端无限的实分支}\right)$ 的二次系统可有极限环[17.19],[17.20]。

12) 若二次系统有三次曲线弓形分界线环(内部不是中心),则此分界线环必由直线段和抛物线弧段所构成[17.21]。

13) 二次系统能以有孤立卵形分支的四次曲线

$$(y+cx^2)^2+x^2(x-a)(x-b)=0\quad(a\neq b,\ ab>0,\ abc\neq 0)$$

作为极限环,其条件见文献[17.22]、[17.23]。此曲线有孤立点和孤立闭分支。又当 $ab<0$ 时此曲线有 8 字形分支,可以证明在一定的条件下它可以成为分界线环[17.23]。

14) 曲线 $y^n+x^m=1$ 能成为二次系统的极限环,当且仅当 $n=m=2$。它能成为三次系统的极限环,当且仅当 $n=m=2$; $n=2$, $m=4$; 或 $n=4$, $m=2$(见文献[17.24])。

## 二、三次系统方面

先看一些特殊三次系统:

1) 特殊三次系统:

$$\dot{x}=\sum_{1\leq i+j\leq 3}a_{ij}x^iy^j,\quad \dot{y}=b_{10}x+b_{01}y \tag{17.26}$$

若有椭圆解,则至多有一极限环,即椭圆本身。若有两条实直线解,则无环,有双曲线解时亦无环。若有一对共轭复直线解,则最多只能有一个极限环[17.25],[17.26]。

2) 三次 Kolmogorov 系统:

$$\dot{x}=xF_2(x,y),\quad \dot{y}=yG_2(x,y) \tag{17.27}$$

若有二次代数曲线解不与坐标轴相切,则上式必为可积,没有极限环[17.27],[17.28]。这时三次系统可以化为

$$\dot{x}=x[K_1\Phi-K_3y\Phi_y],\quad \dot{y}=y[K_2\Phi+K_3x\Phi_x]。 \tag{17.28}$$

其中 $\Phi(x, y)=0$ 是二次代数曲线解。$K_1$、$K_2$、$K_3$ 为常数，如果 $\Phi=0$ 是有心二次曲线；是 $x$、$y$ 的一次式，如果 $\Phi=0$ 是抛物线（见定理17.10的推论）。

3) 若(17.27)有非退化有心二次曲线解与两坐标轴相切，则它可以存在极限环[17.29]。这时 $\Phi=0$ 可写成：

$$\Phi=d^2x^2+2bxy+e^2y^2+2fdx+2efy+f^2=0,$$

而(17.27)成为：

$$\dot{x}=x\Big[K_1\Phi-K_3y\Phi_y-K_4\left(x+\frac{f}{d}\right)\Phi_y+2K_5y\Big(d^2x+bfy+2df-\frac{b}{e}f^2\Big)-K_6(dx-ey+f)\Big],$$

$$\dot{y}=y\Big[K_2\Phi+K_3x\Phi_x+K_5\Big(y+\frac{f}{e}\Big)\Phi_x-2K_4x\Big(e^2y+bfx+2ef-\frac{b}{d}f^2\Big)-K_6(dx-ey-f)\Big]. \tag{17.29}$$

在文献[17.29]中还举出在一奇点外围存在两个极限环的例子。

关于有三次代数曲线解的一般三次系统的极限环问题还有文献[17.37]。关于有椭圆解的中心对称三次系统的极限环的研究还有文献[17.47]。其中可以出现四个极限环。

再看有积分直线的三次系统，在这方面近年来戴国仁和R.E. Kooij做了许多工作。

4) 有四条实积分直线的三次系统可以存在极限环（见文献[17.30]、[17.31]、[17.32]、[17.60]）。

5) 至少有五条实积分直线的三次系统不存在闭轨，但可以存在奇闭轨[17.2]、[17.33]。而有两对共轭复直线解和一条实直线解的三次系统却可能有极限环[17.54]。

例 17.2[17.2]
$$\dot{x}=(x-1)(x+2)(x-y),$$

$$\dot{y}=\frac{1}{2}(y+1)(y+3)(y-3x) \tag{17.30}$$

有五条直线解：

$$x=1,\quad x=-2,\quad y=-1,\quad y=-3,\quad y=2x+1.$$

其中 $x=1$, $y=-1$ 与 $y=2x+1$ 构成一个三角形分界线环，内部有唯一的奇点 $O(0,0)$，它是稳定的，故分界线环为内不稳定，$O$ 外无极限环。这可用 Dulac 函数

$$B(x,y)=[(x-1)(x+2)(y+1)(y+3)(y-2x-1)]^{-1}$$

来证明。这时 $\operatorname{div}(BP,BQ)=[(x+2)(y+3)(y-2x-1)]^{-1}$。

在文献[17.32]中把有四条实直线解的三次系统分成了六种情况。用图 17.1 表示之。

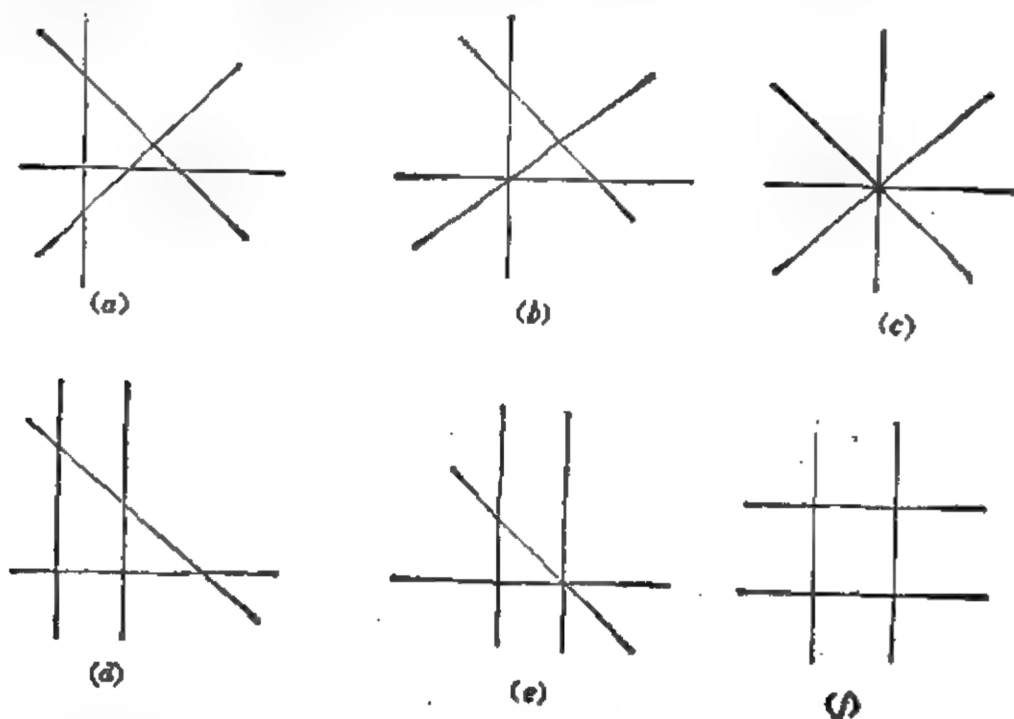


图 17.1

所得结果如下：

a) 四直线互不平行，没有三直线交于一点，则有积分因子 $\dfrac{1}{l_1l_2l_3l_4}$ [这里 $l_i=0$ ($i=1,2,3,4$) 是四直线的方程]，没有极限环。但若有一非鞍点而不在积分直线上，则必为中心。

b) 四直线互不平行，恰有三直线交于一点，则有 Dulac 函数 $\dfrac{1}{l_1l_2l_3l_4}$，无闭轨。

c) 四直线互不平行，且都过同一点，则奇点都在积分直线上，无闭轨(后面有对 $n$ 次系统的同样情况的证明)。

$d$) 恰有一对平行直线，无三直线交于一点，则以 $\frac{1}{l_1l_2l_3l_4}$ 为积分因子或 Dulac 函数，没有极限环，但可能有中心。

$e$) 恰有一对平行直线，又有三直线交于一点，则可能有极限环；但若有一细焦点，则无极限环。

$f$) 有两对平行直线解时可以有极限环(见文献[17.31])。

相应的图形即图 17.1($a$), ($b$), ($c$), ($d$), ($e$), ($f$)。

在文献[17.16]中进一步证明了在前述情况 $e$)与 $f$) 中极限环若存在，必定是唯一的，粗的(或双曲的)，证法与证明有抛物线解的二次系统极限环的唯一性与粗性类似。

在文献[17.34] 中进一步研究了四直线解中可能有一对或两对共轭复直线的情况。本节开始时已说明，一对共轭复直线有可能平行，也有可能交于一实点，故[17.34]所得的结果仍可用图表示(见图 17.2 与 17.3。其中虚线表示虚直线，黑圆点表示虚直线的实交点)。在证明图 17.2 与 17.3 中极限环唯一性时仍用到双连通域中的 Dulac 定理，并且有时所找的 Dulac 函数很复杂，是要靠计算机帮助的。

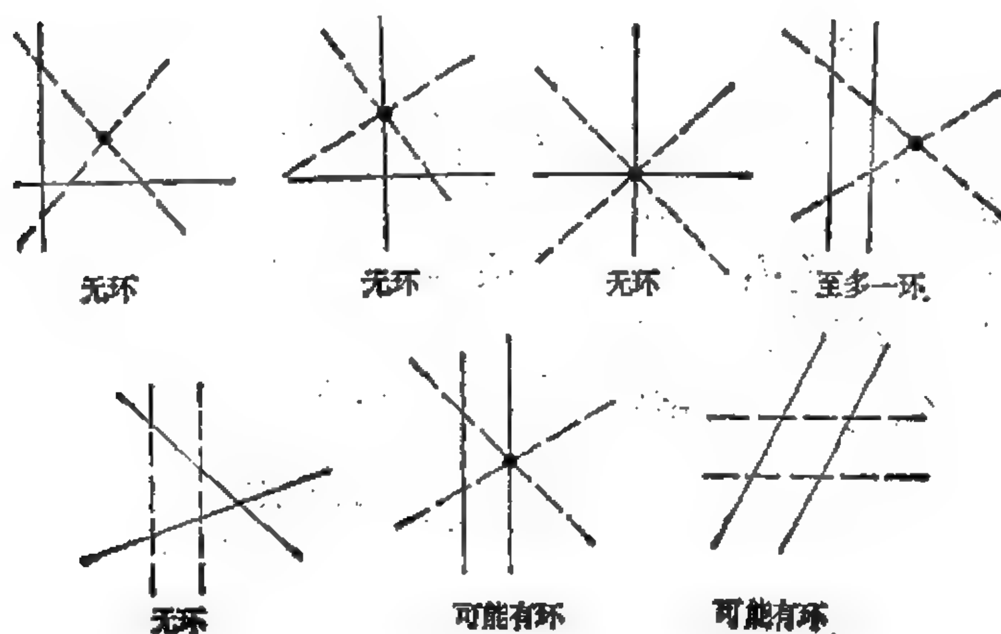



图 17.2

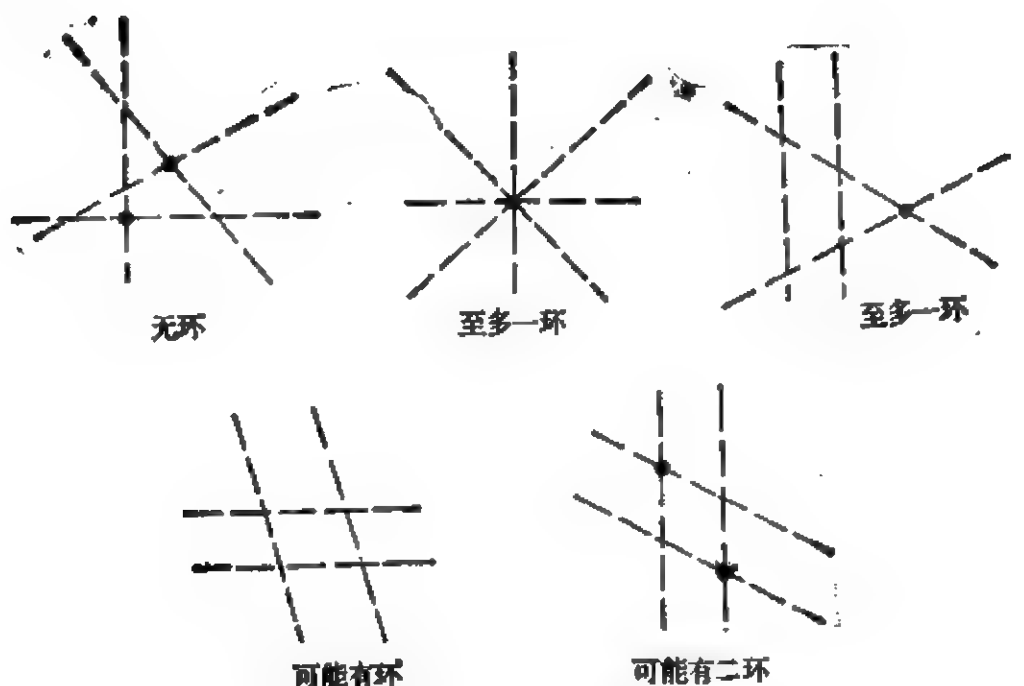



图 17.3

**例 17.3**[17.34]

$$\dot{x} = ax + bx^2 + cxy + \frac{dn+m}{2n}x^3 + \frac{fn+n+1}{n}x^2y + \frac{en+m}{n}xy^2 + y^3,$$
$$\dot{y} = ay + bxy + cy^2 - \frac{1}{n}x^3 + \frac{dn-m}{2n}x^2y + fxy^2 + ey^3 \tag{17.31}$$

有两对复共轭积分直线：

$$l_1 \cdot l_2 = x^2 + y^2, \quad l_3 \cdot l_4 = x^2 + mxy + ny^2.$$

它们都通过 $O(0, 0)$，取

$$B(x, y) = (x^2+y^2)^{n_1}\exp\left(-2n_2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)(x^2+mxy+ny^2)^{n_3} \times\exp\left(-2n_4\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4n-m^2}}{2x+my}y\right),$$

其中

$$n_1 = \frac{2emn + 2fn + 6n - 2fn^2 - 4n^2 - dmn - 3m^2 - 2}{4[(n-1)^2 + m^2]},$$

$$n_2=\frac{dn^2+2en-2en^2-2fmn-mn-dn-m}{4[(n-1)^2+m^2]},$$

$$n_3=\frac{2fn^2-2n^2-2emn+dmn-2fn+6n-3m^2-n}{4[(n-1)^2+m^2]},$$

$$n_4=\frac{1}{4\sqrt{4n-m^2}[(n-1)^2+m^2]}(2fmn^2+4en^2+2dn^2$$
$$+2fmn+4mn-2dn^3-2em^2n-dm^2n-4en-m^3).$$

则可算出 $\operatorname{div}(BP,\ BQ)=-aB$。若 $a\neq0$，则 div 在除 $O(0,\ 0)$ 以外的双连通域中定号。故若存在极限环必为唯一的。

**例 17.4**[17.34]

$$\begin{cases}\dot{x}=-2x+x^3+x^2y+xy^2-y^3=-2x+P_3(x,\ y),\\ \dot{y}=-2y+x^3+x^2y+xy^2+y^3=-2y+Q_3(x,\ y)\end{cases}\tag{17.32}$$

有唯一奇点 $O(0,\ 0)$。四条复直线解的方程为 $x^4+y^4=0$，因此都通过原点。(17.32)在赤道上无奇点。赤道的稳定性由

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{c(\theta)}{d(\theta)}d\theta$$

决定(见文献[17.35])。其中

$$c(\theta)=-\cos\theta P_3(\cos\theta,\ \sin\theta)-\sin\theta Q_3(\cos\theta,\ \sin\theta),$$
$$d(\theta)=-\sin\theta P_3(\cos\theta,\ \sin\theta)+\cos\theta Q_3(\cos\theta,\ \sin\theta).$$

容易算出 $I<0$。故赤道为稳定，但 $O(0,\ 0)$ 为稳定结点，故必存在唯一的不稳定极限环。

**例 17.5**[17.34]

$$\begin{cases}\dot{x}=-8x+(4+4\mu)y-\mu x^3+6x^2y-(3\mu+4)xy^2+2y^3,\\ \dot{y}=2\mu x+4y-4x^3+2x^2y-(2\mu+2)y^3\end{cases}\tag{17.33}$$

有两对复共轭积分直线：

$$l_1=x+1+i(y+1)=0,\quad l_2=(x+1)-i(y+1)=0,$$
$$l_3=x-1+i(y-1)=0,\quad l_4=x-1-i(y-1)=0.$$

故 $l_1\parallel l_3$，$l_2\parallel l_4$。$l_1$ 与 $l_2$ 有实交点 $(-1,\ -1)$，$l_3$ 与 $l_4$ 有实交点 $(1,\ 1)$。当 $\mu=0$ 时，两奇点都是不稳定一阶细焦点。因此当 $0<\mu\ll1$ 时，在每一奇点外围至少存在一个极限环。

**三、$n$ 次系统方面**

首先，文献[17.34]的上列结果在[17.36]中被推广到有 $n+1$ 条实或复积分直线的 $n$ 次系统。为此，我们以 $E_n^m(k)$ 表示这样的实 $n$ 次多项式系统，它有 $n+1$ 条实积分直线沿着 $m$ 个不同的方向，且三直线交于一点的事实出现了 $k$ 次。例如图 17.1 的六个图可依次用 $E_3^4(0)$，$E_3^4(1)$，$E_3^4(2)$，$E_3^3(0)$，$E_3^3(1)$，$E_3^2(0)$ 来记。于是有下列结论：

1) $E_n^{n+1}(0)$ 有积分因子 $\dfrac{1}{l_1l_2\cdots l_{n+1}}$，没有极限环；若有一非鞍点 $S\notin l_1l_2\cdots l_{n+1}=0$，则 $S$ 是中心。

2) $E_n^{n+1}(1)$ 有 Dulac 函数 $\dfrac{1}{l_1l_2\cdots l_{n+1}}$，没有闭轨。

3) $E_n^n(0)$ 有 Dulac 函数 $\dfrac{1}{l_1l_2\cdots l_{n+1}}$，没有闭轨。

4) $E_n^{n+1}(2)$、$E_n^n(1)$、$E_n^{n-1}(0)$ 都可以存在极限环。

5) $E_n^{n+1}(n-1)$ 的一切奇点都在 $l_1l_2\cdots l_{n+1}=0$ 上，无闭轨。

6) 有 $n+1$ 条实积分直线的齐 $n$ 次系统有积分因子 $[l_1l_2\cdots l_{n+1}]^{-1}$。

在这里，前三条的证明需要用到一个引理：

**引理 17.2**　设 $l_i=0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为 $n$ 条直线，它们确定 $n$ 个方向，且没有三条直线交于一点。则任何以这些直线为积分线的 $n$ 次系统必可写成如下的形式：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}&=\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{A_il_{iy}}{l_i}+b\right)\prod_{i=1}^{n}l_i,\\
\dot{y}&=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{A_il_{ix}}{l_i}+d\right)\prod_{i=1}^{n}l_i.
\end{aligned}
\tag{17.34}
$$

其中

$$
l_{ix}=\frac{\partial l_i}{\partial x},\qquad l_{iy}=\frac{\partial l_i}{\partial y},
$$

$b$ 与 $d$ 为常数，$A_i$ 是 $x$、$y$ 的一次式。

此引理是后面将要介绍的定理 17.6 的特例。关于第四条，文献[17.36]只就 $E_2^3(2)$ 给出两个例子。第五条的证明如下：

不失一般性，可设 $n+1$ 条积分直线为 $x=0$, $y=0$, $y-\lambda_i x=0$ $(i=1, 2, \cdots, n-1; \lambda_i\neq 0)$。于是 $E_n^{n+1}(n-1)$ 可写成：

$$\dot{x}=x(P_0+P_1+\cdots+P_{n-1})=P,$$
$$\dot{y}=y(Q_0+\cdots+Q_{n-1})=Q。\qquad(17.35)$$

其中 $P_j$ 与 $Q_j$ 是 $x$, $y$ 的齐 $j$ 次多项式。由 $y-\lambda_i x=0$ 是积分直线，可导出：

$$(Q-\lambda_i P)_{y=\lambda_i x}=0,\ \forall x\in R,\ (i=1, \cdots, n-1)。$$

上式等价于

$$\sum_{j=0}^{n-1}(Q_j(1, \lambda_i)-P_j(1, \lambda_i))x^j\equiv 0,\ \forall x\in R(i=1,\cdots,n-1)。$$

因此有

$$Q_j(1, \lambda_i)=P_j(1, \lambda_i)\quad(\text{对 } j=0, \cdots, n-1; i=1, \cdots, n-1)\qquad(17.36)$$

对 $j<n-1$, $P_j(1, z)-Q_j(1, z)$ 是一个次数小于 $n-1$ 的 $z$ 的多项式，但却有 $n-1$ 个零点 $z=\lambda_i$, $(i=1, \cdots, n-1)$，故有

$$P_j(1, z)=Q_j(1, z)\ \text{对}\ j<n-1,$$

从而

$$P_j(x, y)\equiv Q_j(x, y)\ \text{对}\ j<n-1。$$

于是(17.35)式可改写为：

$$\dot{x}=x(P_0+\cdots+P_{n-2}+P_{n-1})=x\overline{P},$$
$$\dot{y}=y(P_0+\cdots+P_{n-2}+Q_{n-1})=y\overline{Q}。\qquad(17.37)$$

不妨设 $P_{n-1}\not\equiv Q_{n-1}$，否则(17.37)可约化为线性系统，且有无数条通过 $O$ 的积分直线。(17.37) 的任一不位于 $x=0$ 与 $y=0$ 上的奇点必满足 $\overline{P}=\overline{Q}$，从而必使 $P_{n-1}-Q_{n-1}=0$。但由 $(17.36)_{j=n-1}$ 可知

$$P_{n-1}-Q_{n-1}=k\prod_{i=1}^{n-1}(y-\lambda_i x),\ (k\in R),$$

所以该奇点必位于某一积分直线 $y-\lambda_i x=0$ 上。

第六条的证明如下：

不失一般性，可设这 $n+1$ 条积分直线为：

$x=0$, $y=0$, $l_i=y-\lambda_i x=0$ $(i=1, 2, \cdots, n-1; \lambda_i\neq 0)$。

于是$n$次系统可写为：

$$\begin{cases}\dot{x}=xP=x\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^iy^{n-1-i},\\ \dot{y}=yQ=y\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^iy^{n-1-i}.\end{cases}\tag{17.38}$$

仿前可证：由$l_i=0$ $(i=1, \cdots, n-1)$是(17.38)的积分直线，可导出：

$$P(x, y)=Q(x, y)+(a_0-b_0)\prod_{i=0}^{n-1}(y-\lambda_ix).$$

从而(17.38)成为：

$$\begin{cases}\dot{x}=(a_0-b_0)x\prod_{i=0}^{n-1}(y-\lambda_ix)+xQ=\overline{P},\\ \dot{y}=yQ(x, y)=\overline{Q}.\end{cases}\tag{17.39}$$

今取$\mu(x, y)=\dfrac{1}{xyl_1l_2\cdots l_{n-1}}$，则易算出：

$$\operatorname{div}(\mu\overline{P}, \mu\overline{Q})=(xQ_x+yQ_y+(1-n)Q)\mu.$$

另一方面，由$Q=\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^iy^{n-1-i}$可导出：

$$xQ_x+yQ_y+(1-n)Q=0.$$

所以$\mu(x, y)$是(17.38)的积分因子。证毕。▌

下面再看可能有复共轭积分直线的实$n$次系统。代替$E_n^m(k)$我们现在改用记号$\overline{E}_n^m(k)$，于是有：

7) $\overline{E}_n^{n+1}(0)$有积分因子$\dfrac{1}{l_1l_2\cdots l_{n+1}}$，没有极限环。

8) $\overline{E}_n^{n+1}(1)$有Dulac函数$\dfrac{1}{l_1l_2\cdots l_{n+1}}$，若它有$k$对共轭复直线，且没有实直线通过复直线的实交点，则最多只有$k$个极限环。

9) $\overline{E}_n^n(0)$有Dulac函数$\dfrac{1}{l_1l_2\cdots l_{n+1}}$，若它有$k$对不平行的共轭复直线，则最多只有$k$个极限环。

10) $\overline{E}_n^{n+1}(n-1)$的一切奇点都在$l_1l_2\cdots l_{n+1}=0$上，若它至少有一条实积分直线，则无闭轨。

11) 齐 $n$ 次系统有积分因子 $\dfrac{1}{l_1l_2\cdots l_{n+1}}$。

这五条的证明与前面相当的五条的证明类似，故从略。

关于有不变代数曲线(不一定是直线)的实 $n$ 次系统的极限环和可积性，近年来有 O. Christopher 的很好的工作(见文献[17.38]、[17.39]、[17.40])，在介绍他的工作以前，我们先介绍一个古典的定理：

**定理 17.1**[17.41] 设 $m$ 次实多项式系统：

$$\dot{x}=P(x,\ y),\ \dot{y}=Q(x,\ y) \tag{17.40}$$

有 $q$ 个独立的代数积分 $f_i=0\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ q)$，它们都是不可约的。如果 $q>\dfrac{m(1+m)}{2}$，则(17.40)有形如 $\prod\limits_{i=1}^{q}f_i^{\lambda_i}$ 的首次积分。

证 设 $R_{m-1}[x,\ y]$ 是 $x,\ y$ 的次数 $\leqslant m-1$ 的齐次多项式所成的实向量空间，则

$$\dim_R R_{m-1}[x,\ y]=1+2+\cdots+m=\frac{m(1+m)}{2}.$$

另一方面，由假设 $f_i(x,\ y)=0$ 是(17.40)的不可约代数积分，故有 $df_i=K_if_i$，其中 $K_i\in R_{m-1}[x,\ y]$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ q)$。我们有 $q$ 个这种多项式 $K_i$。由于 $q>\dfrac{m(1+m)}{2}$，所以这些 $K_i$ 应为线性相关，即存在 $\lambda_i$ 使 $\sum\limits_{i=1}^{q}\lambda_iK_i\equiv 0$。由此可见

$$\left(\sum_{i=1}^{q}\lambda_i\frac{df_i}{f_i}\right)_{(17.40)}=0.$$

这表示 $\prod\limits_{i=1}^{q}f_i^{\lambda_i}$ 是(17.40)的首次积分。

在[17.42]中证明了：若 $q\geqslant\dfrac{m(m+1)}{2}+2$，则诸 $\lambda_i$ 可取为整数，这时(17.40)有一有理函数的首次积分。▌

这个定理所要求的独立的代数积分的数目太大。当 $m\to\infty$ 时，$q$ 与 $m^2$ 同阶。同样，在文献[17.43]中证明了如下定理：

**定理 17.2** 若(17.40)有不少于

$$p=\frac{(m-1)(m+2)}{2}=\frac{m(m+1)}{2}-1 \qquad (17.41)$$

条实的积分直线，则(17.40)没有极限环。

这里所要求的实积分直线的条数也太多。事实上，如果(17.40)的积分直线的条数是有限的，则不难看出此数应$\leqslant 3m$[1]。而当$m\geqslant 6$时，却有$p>3m$。像前述Kooij的工作一样，对$n$次系统的代数曲线解加上一些适当的条件以后，Christopher就可以由总次数与$n$同阶的若干条这种解来判定系统为可积或无环了。

下面分几个主题来介绍C.J.Christopher的工作：

(一) 不变代数曲线的性质

1) $n$次实多项式系统

$$\dot{x}=P(x,\ y),\quad \dot{y}=Q(x,\ y) \qquad (17.42)$$

的不变代数曲线是$C^2$中一些满足$C(x,\ y)=0$的点，其中$C$是$x$，$y$的多项式，满足方程

$$\dot{C}=C_xP+C_yQ=CL \qquad (17.43)$$

对某一次数$\leqslant n-1$的多项式$L$。此代数曲线的次数就是多项式$C$的次数，而$L$称为余因子。

当$C$是由一些不同的不可约因式构成时，上述定义与通常的定义是一致的(见文献[17.8])。

2) 实系统的复不变代数曲线必成对出现。

3) 若$C=0$为不变代数曲线，且$C=DE$，$D$为不可约多项式，则$D=0$也是不变代数曲线。

4) 若$C^N$是$N$次不变代数曲线$C$的最高次部分，则$C^N$的一切线性因式都是$xQ-yP$的最高次项的因子。

证 设$C^N=(ax+y)D^{N-1}$，则$aP^n+Q^n=0$在$ax+y=0$上，从而

$$\begin{aligned}[xQ^n-yP^n]_{y+ax=0}&=[xQ^n+axP^n]_{y+ax=0}\\&=x[Q^n+aP^n]_{y+ax=0}=0.\end{aligned}$$

---

1) 猜想实直线的最多条数为$2m+1$(当$m$为偶数)；为$2m+2$ (当$m$为奇数)。这事实在$m=2, 3, 4$时已在[17.59]中得到了严格证明，后面要介绍。

由此可见，若 $n=2$，而 $N=4$，则 $C^4$ 的最高次项必有重因子[例子见 I)。13)]。∎

5) 设 $C$ 是复代数曲线，$l$ 是复数，$\overline{C}$ 与 $\overline{l}$ 是它们的复共轭，则

$$C^l\cdot\overline{C}^{\overline{l}}=[(\mathrm{Re}C)^2+(\mathrm{Im}C)^2]^{\mathrm{Re}l}\exp\left\{-2\,\mathrm{Im}l\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}C}{\mathrm{Re}C}\right\}. \tag{17.44}$$

如果一点 $p$ 不在 $C$ 上，则上式右边在 $p$ 的小邻域中为单值，因为这时 $\mathrm{arctg}\,\dfrac{\mathrm{Im}C}{\mathrm{Re}C}$ 沿绕 $p$ 的闭曲线的环绕数为零。但在大范围这一点却办不到。

6) 对形如 $B=\prod_i C_i^{l_i}$ 的函数（诸 $C_i$ 为代数不变曲线），可写成 $B=\prod_{i=1}^{p}C_i^{l_i}\prod_{j=p+1}^{p+q}C_j^{l_j}\overline{C}_j^{\overline{l}_j}$，这时 $B$ 沿(17.42)的导数为：

$$\dot{B}=B\left\{\sum_{i=1}^{p}l_iL_i+\sum_{j=p+1}^{p+q}2(\mathrm{Re}l_j\mathrm{Re}L_j-\mathrm{Im}l_j\mathrm{Im}L_j)\right\}, \tag{17.45}$$

而

$$(BP)_x+(BQ)_y=\dot{B}+B(P_x+Q_y). \tag{17.46}$$

于是，证明(17.42)不存在极限环或存在中心，归结为找一些函数 $L_i$、$\mathrm{Re}L_j$、$\mathrm{Im}L_j$ 与 $P_x+Q_y$ 的线性结合(即确定 $l_i$、$l_j$) 使(17.46)式右边为常号或恒等于零。

7) 如果函数 $B=\exp(E/D)$ 满足 $\dot{B}=BL$，其中 $E$、$D$ 为多项式，$L$ 为 $n-1$ 次多项式，则称 $B$ 为退化不变曲线。这时 $D=0$ 必为不变代数曲线。因为由 $\dot{B}=BL$ 有：

$$(E_xD-ED_x)P+(E_yD-ED_y)Q=LD^2.$$

故由 $D=0$ 可导出 $E(D_xP+D_yQ)=0$，从而 $\dot{D}=0$。

(二) 反问题——已给一系代数曲线，求以它们为不变曲线的方程(17.42)的形状

1) Hilbert 的**零点定理** 若当诸多项式 $B_i$ 都等于零时，多项式 $A$ 也等于零，则必存在多项式 $M_i$ 以及正整数 $n$ 使得

$$A^n=\sum_i M_iB_i.$$

又若诸 $B_i$ 没有公共零点，则必有 $M_i$，使 $\sum_i M_iB_i=1$（见文献[17.44]）。

2) 代数曲线 $C=0$ 称为简单的，如果不存在点 $p$ 使

$$C(p)=C_x(p)=C_y(p)=0.$$

简单代数曲线 $C$ 称为半通有，如果 $C_x$ 与 $C_y$ 为互质；$C$ 称为通有，如果它的最高次项没有重因式。通有代数曲线必为半通有。

3) **定理 17.3** 设代数曲线 $C$ 为半通有，则一切以 $C$ 为不变代数曲线的多项式系统(17.42)必可写成

$$\dot{x}=AC-DC_y,\quad \dot{y}=BC+DC_x \tag{17.47}$$

的形式。

**证** 由 1) 知存在多项式 $E$、$F$、$G$，使

$$EC_x+FC_y+GC=1. \tag{17.48}$$

另一方面，因 $C$ 是(17.42)的不变代数曲线，故有多项式 $L$，使

$$C_xP+C_yQ-CL=0. \tag{17.49}$$

以 $L$、$G$ 分别乘(17.48)与(17.49)两式并相加，可得：

$$L=(EL+GP)C_x+(FL+GQ)C_y,$$

代入(17.49)，得到

$$[P-C(EL+GP)]C_x+[Q-C(FL+GQ)]C_y=0.$$

但 $C_x$ 与 $C_y$ 互质，故必存在一多项式 $D$，使

$$Q-C(FL+GQ)=DC_x,\quad P-C(EL+GP)=-DC_y,$$

从而

$$\begin{aligned}&P=AC-DC_y,\ 其中\ A=EL+GP.\\&Q=BC+DC_x,\ 其中\ B=FL+GQ.\ \blacksquare\end{aligned} \tag{17.50}$$

注意：虽然 $P$、$Q$ 的次数都不高于 $n$，但 $A$、$B$、$D$ 的次数却可能高于 $n$。下一定理将能限制它们的次数。

4) **定理 17.4** 设 $C$ 为 $N$ 次通有代数曲线，它是(17.42)的不变曲线，则当(17.42)按定理 3 被写成(17.47)的形式时，可以要求 $A$、$B$ 的次数不高于 $m-N$；$D$ 的次数不高于 $m-N+1$。又若 $C$ 的最高次项不含 $x$ 及 $y$ 作为因式，则可使

$$\partial A\leqslant\partial P-N,\ \partial B\leqslant\partial Q-N,\ \partial D\leqslant\min(\partial P,\ \partial Q)-N+1. \tag{17.51}$$

这里 $\partial$ 表示它后面的那个多项式的次数。

证 设 $C$ 的最高次项不含 $x$ 及 $y$ 作为因式，则 $C^N$ 与 $C_x^N$、$C_y^N$ 为互质。今设 $\partial A=m>\partial P-N$，则由 (17.47) 式可看出 $\partial D=m+1$。且考虑(17.47)的第一式右边的最高次项，可得：

$$A^N C^N = D^{N+1} C_y^N. \tag{17.52}$$

由于 $C^N$ 与 $C_y^N$ 无公因式，故必存在一个多项式 $K$，使：

$$A^N = KC_y^N,\ D^{N+1} = KC^N.$$

今以 $A-KC_y$ 与 $D-KC$ 分别代替 $A$ 与 $D$。易见 $P$ 仍可写成 (17.50) 中的形式，但显见这时 $A$ 与 $D$ 的次数已降低至少一次了。对 $Q$ 的表达式也可作同样的处理。这样一次一次下去，最后即得：

$$\dot{x} = AC - DC_y,\quad \dot{y} = BC + EC_x. \tag{17.53}$$

其中 $A$、$B$、$D$ 满足 (17.51) 式的要求，又 $\partial E=\partial Q-N+1$。以 (17.53) 中的 $P$、$Q$ 代入(17.49)式，可得：

$$C(AC_x + BC_y) + C_xC_y(E-D) = CL. \tag{17.54}$$

但 $C$ 与 $C_xC_y$ 为互质，故存在一个多项式 $R$，使

$$E = D + RC,\quad \partial R = \partial E - N.$$

代入(17.53)的第二方程右端，得：

$$BC + EC_x = (B + RC_x)C + DC_x.$$

若以新的 $B$ 表示 $B+RC_x$，则(17.53)即具(17.47)的形式了。▌

注意：当 $C^N$ 有因式 $xy$ 时，$C^N$ 与 $C_x^N$ 有公因式 $y$，$C^N$ 与 $C_y^N$ 有公因式 $x$。如果原来的 $C$ 具有这个性质，我们可以对(17.47) 施行转轴以达到 $C^N$ 不含 $x$ 及 $y$ 作为因式的目的。

**例 17.6** 椭圆和双曲线的方程可经转轴化为 $x^2\pm y^2+\cdots=0$ 的形式，故它们是通有代数曲线。以之为不变曲线的 $n$ 次系统，(17.42) 必可写成 (17.47) 的形式，其中 $\partial A=\partial B=n-2$，$\partial D=n-1$。对于二次系统有 $n=2$，故 $A$、$B$ 为常数，$D$ 为一次式。抛物线的最高次项必有重因式，它只是半通有，以 $y-x^2=0$ 为积分线的二次系统(17.9)不具(17.47)的形式。以后可以看到：如果要写成(17.47)的形式，必须把 $A$、$B$、$D$ 的次数提高一次才行。

5) 定理 17.5 设 $C=0$ 与 $D=0$ 是两条次数为 $N$ 与 $M$ 的半通有代数曲线，$C$ 与 $D$ 互质，且两曲线不在任何一点相切，则以 $C$、$D$ 为不变代数曲线的 $n$ 次系统(17.42)必可写成

$$\dot{x}=ACD-EC_yD-FCD_y,$$
$$\dot{y}=BCD+EC_xD+FCD_x \tag{17.55}$$

的形式。又若 $C$、$D$ 为通有，且它们的最高次项互质，则可如此选取 $A$、$B$、$E$、$F$，使得：

$$\partial A、\partial B\leqslant n-N-M,\quad \partial E、\partial F\leqslant n-N-M+1.$$

证明比定理 17.4 困难一些，定理中的各项条件都要用到，此处从略，见文献[17.38]。

6) 推广定理 17.5 到有许多条不变代数曲线的情况，可得：

定理 17.6 设有许多条代数曲线 $C_i=0$, $\partial C_i=N_i$, 都是半通有。每两条曲线为互质，没有 $\geqslant 3$ 条曲线交于同一点，且它们在交点处都不相切。则以它们为不变曲线的方程必可写成如下的形式[1)]：

$$\begin{cases}\dot{x}=(-\sum A_iC_{iy}/C_i+B)\prod_i C_i,\\ \dot{y}=(\sum A_iC_{ix}/C_i+D)\prod_i C_i.\end{cases} \tag{17.56}$$

又若这些曲线都是通有的，没有两曲线的最高次项有一公因式，则可使

$$\partial A_i\leqslant n-\sum N_i+1,\quad \partial B、\partial D\leqslant n-\sum N_i. \tag{17.57}$$

例 17.7 一个 Kolmogorov 系统($n$ 次)

$$\dot{x}=xP(x,y),\quad \dot{y}=yQ(x,y) \tag{17.58}$$

如果有半通有 $N$ 次不变曲线 $C=0$，它不过原点，又不与坐标轴相切，则(17.58)必可写成：

$$\dot{x}=x(AC-yDC_y),\quad \dot{y}=y(BC+xDC_x) \tag{17.59}$$

的形式。若 $C=0$ 为通有，又其最高次项不能被 $x$ 与 $y$ 除，则可使

$$\partial A、\partial B\leqslant n-N-1,\quad \partial D\leqslant n-N-1.$$

若三次 Kolmogorov 系统有双曲线或椭圆解 $C$，且它不过原点，也

1) 文献[17.55]中有比(17.56)更广泛的结果。

不和坐标轴相切，则方程必可写成：

$$\dot{x}=x(\alpha C-\gamma y C_y),\quad \dot{y}=y(\beta C+\gamma x C_x) \qquad (17.60)$$

的形式。其中 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 为常数。(17.60) 和 (17.28) 式是一样的。不难看出，这时 (17.60) 有积分因子 $\frac{1}{xyC}$。故 (17.60) 为可积的，没有极限环。但若双曲线或椭圆过原点，则 (17.58) 仍可能有极限环（见[17.58]）。

（三）由不变代数曲线求中心

**定理 17.7**　设一个多项式系统有形如 $B=\prod_i C_i^{l_i}$ 的首次积分。这里 $C_i$ 是不可约代数曲线，则此系统可写成：

$$\dot{x}=-\sum l_i K_i C_{iy}/G,\quad \dot{y}=\sum l_i K_i C_{ix}/G \qquad (17.61)$$

的形式。其中 $K_i=\prod_{j\neq i} C_j$。又可证明 $C_i=0$ 与 $G=0$ 都是此系统的不变代数曲线。若诸曲线 $C_i$ 满足定理 17.6 前半部的要求，则 $G\equiv$ 常数。

**证**　定理的前半部只须以 $\frac{B}{\prod C_i}$ 除

$$B_x P+B_y Q\equiv 0,$$

并注意 $P$ 与 $Q$ 为互质。$C_i=0$ 是不变代数曲线，可由 (17.43) 及 (17.61) 看出，这时余因子是 $L_i=\sum l_j K_{ij}<C_j,C_i>/G$，其中 $K_{ij}=\prod_{k\neq i,j} C_k$。为了证明 $G=0$ 是不变曲线，只须注意 (17.61) 的发散量

$$P_x+Q_y=-\frac{\dot{G}}{G}+\sum L_i.$$

故必 $\dot{G}=0$。又当 $C_i$ 都满足定理 17.6 前半部的要求时，方程可写为 (17.56) 的形式，或即：

$$\dot{x}=AK-\sum A_i K_i C_{iy},\quad \dot{y}=BK+\sum A_i K_i C_{ix}. \qquad (17.62)$$

其中 $K=\prod C_i$。但 (17.61) 右端的次数为 $\partial K-\partial G-1$。考虑到 (17.57)，可知应有 $\partial G=0$。这时方程 (17.61) 的次数比曲线的次数之和少 1。∎

**定理 17.8**　设有 $m$ 条不变代数曲线 $C_i(i=1,2,\cdots,m)$ 满足定理 17.6 后半部的要求，且使方程 (17.42) 存在一个积分因子

$B=\prod C_i^{l_i}$，那末或是存在一条不变代数曲线 $C_0$，使(17.42)有首次积分 $\varphi=C_0\prod C_i^{1-l_i}$；或是一切 $l_i$ 都是正整数，且存在一条退化曲线 $C_0=\exp\{D/\prod C_i^{l_i-1}\}$，而(17.42)有首次积分 $\varphi=C_0\prod C_i^{q_i}$。

证明略(见文献[17.38])。

(四) 几乎通有代数不变曲线

1) 一条 $n$ 次代数曲线称为几乎通有，如果它是半通有，且其最高次项的重因式除不尽它的 $n-1$ 次项。

**例 17.8** 抛物线和有孤立闭分支的三次曲线都是几乎通有曲线。

2) 一条代数曲线称为处于一般位置，若其中没有三条曲线交于一点，没有两曲线切于一点，没有两曲线其最高次项有公因式。

3) **定理 17.9** 若(17.42)有 $r$ 条几乎通有不变代数曲线 $C_i$，$\partial C_i=n_i$，它们处于一般位置，则必存在 $A$、$B$、$D_i$，使

$$P=-\sum D_iC_{iy}K_i+AK,\ Q=\sum D_iC_{ix}K_i+BK。\qquad(17.63)$$

$K$ 与 $K_i$ 见(17.62)，$\partial A$、$\partial B=n-\sum n_i+1$，$\partial D_i=n-\sum n_i+2$。

证明略(见文献[17.39])。

注意：本定理的条件比定理 17.6 后半部为弱。

4) 当 $n=2$，(17.42)有抛物线解 $y-x^2=0$ 时，在(17.63)中有 $i=1, K=y-x^2=C_1, K_1=1, C_{1y}=1$，$C_{1x}=-2x$，$\partial A$、$\partial B=1$，$\partial D_1=2$。与(17.51)式相比，可看出 $A$、$B$、$D$ 的次数都增加了一次。

5) **定理 17.10** 设 $n$ 次多项式系统有 $r$ 条几乎通有不变曲线 $C_i$，$\partial C_i=n_i$，它们处于一般位置，则 $\sum n_i\leqslant n+2$。若一切曲线皆为通有，则 $\sum n_i\leqslant n+1$。

**证** 由定理 17.9 看出，必有 $\sum n_i\leqslant n+2$；当等式成立时，$D_i$ 为常数，而 $A$、$B$ 都等于零。又由定理 17.6 看出，当一切曲线皆为通有时必有 $\sum n_i\leqslant n+1$；当等式成立时，(17.56)中的 $A_i$ 都是常数，而 $B$、$D$ 都等于零。由此可见若二次系统有四次代数曲线解，则它必非通有曲线。■

6) **例 17.9** 若一个 $n$ 次系统有 $e$ 条椭圆解，$h$ 条双曲线解，$p$ 条抛物线解，$l$ 条直线解，$c$ 条三次卵形线解，它们都处于一般

位置,则 $N=2(h+e+p)+l+3c\leqslant n+2$ (如果 $p+c>0$)。

$$N\leqslant n+1 \quad (\text{如果 } p=c=0)。$$

从而二次系统最多有两条抛物线解。最多有一条椭圆或双曲线解。

7) 易见当定理17.10中的等式成立时,方程为可积的。

8) **推论 17.1** 一个$m$次多项式系统最多有$m+1$条互不平行且无三条交于同一点的直线解。

**推论 17.2** 若一个三次系统有两条直线解,一条椭圆或双曲线解,且它们处于一般位置,则此三次系统可积(见文献[17.27])。

9) **定理 17.11** $n$次多项式系统若有一条$n$次通有不变代数曲线$C$,则无极限环,除非$C$本身是极限环。$n$次系统有$n+1$次几乎通有不变代数曲线者必为可积。(证明略,见[17.59])。

**特例** 二次系统有三次卵形曲线解者无极限环,且为可积(即文献[17.18]的结果)。

10) **定理 17.12** 对一个二次系统 $(17.42)_{n=2}$,若存在一个多项式$M$及实数$r$、$s$使

$$rP+sQ=(P_x+Q_y)M, \tag{17.64}$$

则不存在极限环。

**证** 当$P_x+Q_y$为常数时,定理显然成立。今设

$$P_x+Q_y=a(rx+sy+t),$$

则由(17.64)看出$P_x+Q_y=0$是积分直线,亦不存在极限环。

一般,$M$可表为:

$$M=a(P_x+Q_y)+b(rx+sy)+c$$

的形式,$a$、$b$、$c$是常数。若$b=0$,则

$$\frac{d}{dt}(rx+sy)=a(P_x+Q_y)^2 \quad (\text{当 } c=0);$$

$$\operatorname{div}\{e^{-\frac{rx+sy}{c}}(P,\ Q)\}=-\frac{a}{c}(P_x+Q_y)^2 \quad (\text{当 } c\neq 0)。$$

故仍无极限环。

若$b\neq 0$,则由

$$\frac{d}{dt}\left(rx+sy+\frac{c}{b}\right)=a(P_x+Q_y)^2 \text{ 在 } rx+sy+\frac{c}{b}=0 \text{ 上}$$

即 $rx+sy+\frac{c}{b}=0$ 是一无切直线。取 Dulac 函数

$$B=\left(rx+sy+\frac{c}{b}\right)^{-\frac{1}{b}},$$

可算出

$$(BP)_x+(BQ)_y=-\frac{a}{b}B(P_x+Q_y)^2\Big/\left(rx+sy+\frac{c}{b}\right),$$

故无极限环。∎

定理 17.12 是"有二细奇点的二次系统没有极限环"这一事实的推广。

此外，在[17.45]中还把引理17.2前面的第一条："$E_n^{n+1}(0)$ 有积分因子 $\frac{1}{l_1l_2\cdots l_{n+1}}$"推广成为以下定理：

**定理 17.13** 设一个 $n$ 次多项式系统有 $k$ 条不变代数曲线 $C_i$，它们处于一般位置，且它们的次数之和为 $n+1$，则方程有一积分因子 $\mu=\frac{1}{\prod C_i}$。

证明仍用定理 17.6。由于这里的不变代数曲线可能有复的，故不排除极限环的存在性。

**例 17.10**[17.45]

$$\begin{cases}\dot{x}=-2y(x^2+y^2)+(x-y)(x^2+2y^2-1)\\ \dot{y}=x(x^2+y^2)+(x+y)(x^2+2y^2-1)\end{cases}\tag{17.65}$$

有积分曲线

$$C_1=x^2+2y^2-1=0,\quad C_2=x+iy=0,\quad C_3=x-iy=0$$

和首次积分

$$(x^2+2y^2-1)(x^2+y^2)\exp\left(-2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=0.$$

但 $C_1=0$ 是(17.65)的单重极限环。

此外，在文献[17.40]中还证明了，若一多项式系统有一由不变代数曲线的乘积给出的首次积分，并且还有极限环，则此极限环必为代数曲线。

以下证明前面已提到过的[17.59]的结果：

**定理 17.14** 若三次(或四次)多项式系统只有有限条积分直线，则它最多只能有 8 条(或 9 条)积分直线。

**证** 二次系统最多有 5 条积分直线极易证明，不再细述。一般，我们称一个 $n$ 次系统是 $(l_1, l_2, \cdots, l_k)$ 型的，如果它在 $k$ 个方向有积分直线，在第 $i$ 个方向有 $l_i$ 条积分直线。下列关于 $n$ 次系统的积分直线的三个性质是熟知的：

1) 每条积分直线与其他积分直线至多有 $n$ 个交点(不计重数)；

2) 至多在 $n+1$ 个方向有积分直线；

3) 沿每个方向至多有 $n$ 条积分直线。 (17.66)

今设某一三次系统有 9 条积分直线，则它必属于下面三种情况之一：

$$(3, 2, 2, 2)\text{型}, (3, 3, 2, 1)\text{型}, (3, 3, 3)\text{型}。\quad (17.67)$$

它们都包含(3, 2, 2)型作为其一部分。由(17.66)知(3, 2, 2)型的 7 条积分直线必有如图 17.4 的结构。其中已经有 8 个奇点。因此不论在已有的方向再加一条积分直线，或是在第四个新方向再加一条积分直线都必出现多于 9 个奇点，这不可能。

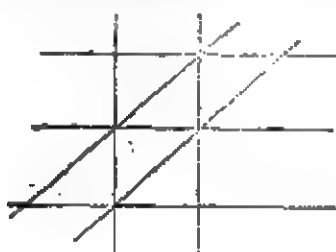


图 17.4

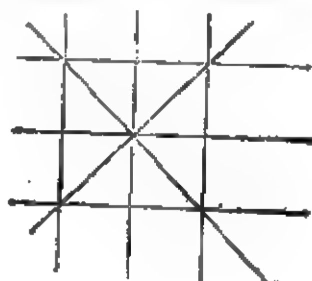


图 17.5

同样可证，如果三次系统有 8 条积分直线，则它必为 (3, 3, 1, 1)型，如图 17.5，实现这种情况的三次系统为：

$$\dot{x} = (x+1)x(x-1), \quad \dot{y} = (y+1)y(y-1)。$$

次设某四次系统有 10 条积分直线，则它们必属于下列情况之一：

(2, 2, 2, 2, 2)，(3, 2, 2, 2, 1)，(3, 3, 2, 1, 1)，(3, 3, 2,

2), (3, 3, 3, 1), (4, 2, 2, 1, 1), (4, 2, 2, 2), (4, 3, 1, 1, 1), (4, 3, 2, 1), (4, 3, 3), (4, 4, 1, 1), (4, 4, 2).

仿前，由性质(17.66)，可以把除(2, 2, 2, 2, 2) 型以外的其他 11 种都排除了. 关于(2, 2, 2, 2, 2)型，可以从 (2, 2, 1)型的三种可能的积分直线结构(如图 17.6)出发，得到 (2, 2, 2)型的积分直线结构有十种，不再在此一一画出。然后再考虑 (2, 2, 2, 2) 型，最后可得 (2, 2, 2, 2, 2) 型的积分直线结构必如图 17.7 所示。

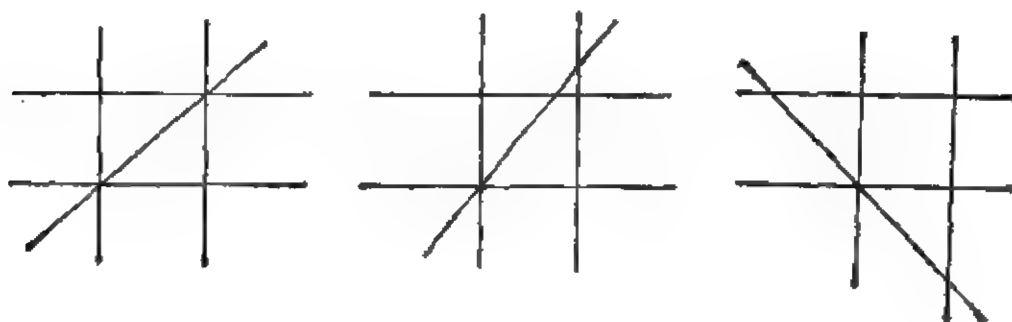


图 17.6

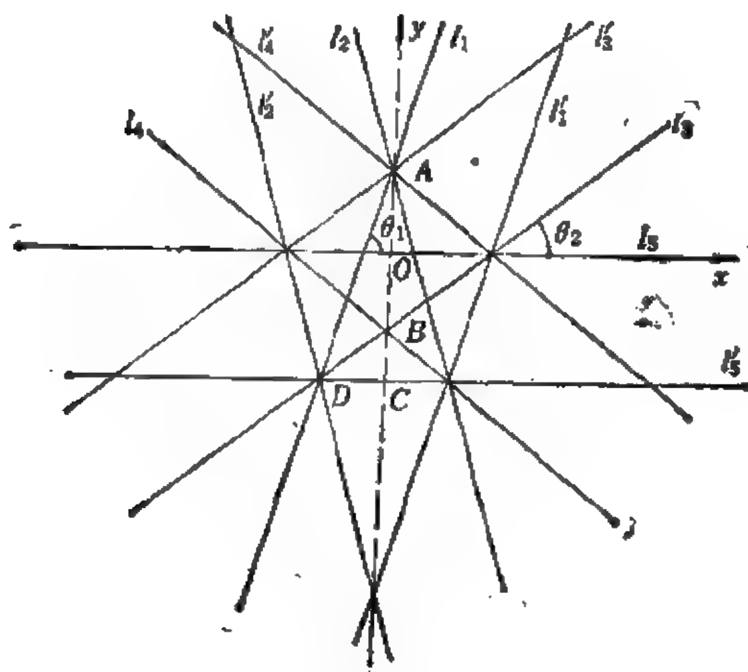



图 17.7

图 17.7 不可能用性质(17.66)来排外，下面改用引理 17.2 的(17.34)式来排除它。取 $l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_4$ 为引理 17.2 中的四条互不平行且没有哪三条交于一点的直线。通过坐标变换，可取 $l_5$ 为 $x$ 轴，$l_1$、$l_2$ 交于点 $A(0, 1)$，且关于 $y$ 轴对称。$l_3$、$l_4$ 亦关于 $y$ 轴对称，交于 $B(0, -1)$。记 $l_1(l_3)$ 与 $x$ 轴的夹角为 $\theta_1(\theta_2)$，又 $\alpha_1=\operatorname{tg}\theta_1$，$\alpha_2=\operatorname{tg}\theta_2$。记线段 $\overline{DC}$ 的长度为 $z_1$，则 $\overline{OC}$ 的长度为 $z_1\alpha_2+1$。记 $y_0=-z_1\alpha_2-1$，则 $C$ 的坐标为 $(0, y_0)$。10 条直线 $l_i$、$l'_i(i=1, 2, 3, 4, 5)$ 的方程为：

$l_1$: $C_1\equiv y-\alpha_1x-1=0$, $\quad l'_1$: $C'_1\equiv y-\alpha_1x+\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}=0$,

$l_2$: $C_2\equiv y+\alpha_1x-1=0$, $\quad l'_2$: $C'_2\equiv y+\alpha_1x+\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}=0$,

$l_3$: $C_3\equiv y-\alpha_2x+1=0$, $\quad l'_3$: $C'_3\equiv y-\alpha_2x-1=0$,

$l_4$: $C_4\equiv y+\alpha_2x+1=0$, $\quad l'_4$: $C'_4\equiv y+\alpha_2x-1=0$,

$l_5$: $y=0$, $\quad l'_5$: $y=y_0$.

由引理 17.2 知道四次系统的 $P_4(x, y)$ 与 $Q_4(x, y)$ 现在可以表为：

$$\begin{cases}P_4(x, y)=AC_1C_2C_3C_4-(a_1x+b_1y+d_1)C_2C_3C_4\\ \qquad -(a_2x+b_2y+d_2)C_1C_3C_4-(a_3x+b_3y+\\ \qquad d_3)C_1C_2C_4-(a_4x+b_4y+d_4)C_1C_2C_3,\\ Q_4(x, y)=DC_1C_2C_3C_4-\alpha_1(a_1x+b_1y+d_1)C_2C_3C_4\\ \qquad +\alpha_1(a_2x+b_2y+d_2)C_1C_3C_4-\alpha_2(a_3x+b_3y\\ \qquad +d_3)C_1C_2C_4+\alpha_2(a_4x+b_4y+d_4)C_1C_2C_3,\end{cases} \tag{17.68}$$

其中 $A$, $D$, $a_i$, $b_i$, $d_i(i=1, 2, 3, 4)$ 是待定常数。

由 $y=0$ 与 $y=y_0$ 是积分直线，可得 $Q(x, 0)\equiv0$, $Q(x, y_0)\equiv0$，从而有下列等式：

$$D+a_1+a_2+a_3+a_4=0, \tag{i}$$

$$\alpha_1\alpha_2(d_1+d_2+d_3+d_4)-\alpha_2(a_1-a_2)+\alpha_1(a_3-a_4)=0, \tag{ii}$$

$$\alpha_1^2(a_3+a_4)+\alpha_2^2(a_1+a_2)+\alpha_1\alpha_2^2(d_2-d_1)-\alpha_1^2\alpha_2(d_4-d_3)=0. \tag{iii}$$

$$\alpha_1(a_1-a_2)-\alpha_2(a_3-a_4)-\alpha_1^2(d_1+d_2)-\alpha_1^2(d_3+d_4)=0, \quad \text{(iv)}$$

$$D+\alpha_1(d_1-d_2)-\alpha_2(d_3-d_4)=0, \quad \text{(v)}$$

$$y_0(b_1+b_2+b_3+b_4)+d_1+d_2+d_3+d_4-z_1(a_1-a_2+a_3-a_4)=0, \quad \text{(vi)}$$

$$z_1D+(b_1-b_2+b_3-b_4)y_0+(d_1-d_2+d_3-d_4)=0. \quad \text{(vii)}$$

又由 $l_1'$ 是积分直线，得

$$[Q_4(x, y)-\alpha_1P_4(x, y)]_{y=\alpha_1x+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}=0,$$

比较最高次项的系数，可得：

$$a_2+a_3+a_4+D+\alpha_1(b_2+b_3+b_4-A)=0. \quad \text{(viii)}$$

类似地，由 $l_2'$、$l_3'$、$l_4'$ 是积分直线，可得：

$$a_1+a_3+a_4+D-\alpha_1(b_1+b_3+b_4-A)=0, \quad \text{(ix)}$$

$$a_1+a_2+a_4+D+\alpha_2(b_1+b_2+b_4-A)=0, \quad \text{(x)}$$

$$a_1+a_2+a_3+D-(b_1+b_2+b_3-A)\alpha_2=0. \quad \text{(xi)}$$

解方程组(i)～(xi)，可得：

$$a_1=-b_1\alpha_1, \ a_2=b_2\alpha_1, \ a_3=-b_3\alpha_2, \ a_4=b_4\alpha_2,$$

$$b_1=-d_1, \ b_2=-d_2, \ b_3=d_3, \ b_4=d_4,$$

$$b_1+b_2+b_3+b_4+A=0.$$

把这些关系一起代入(17.68)，可得

$$P_4(x, y)\equiv Q_4(x, y)\equiv 0.$$

因此不存在四次系统，它有有限的 10 条积分直线。定理证毕。∎

据作者说，用此法处理五次多项式系统的同一问题时，发现引理 17.2 已不够用，即必定会遇到三直线交于一点的情况下如何表达 $P_5(x, y)$ 与 $Q_5(x, y)$ 的问题，因此估计一般情况的解决有待于 Christopher 与 Kooij 的那些结果的进一步发展。

又可以举例说明：当四次系统有 9 条积分直线时，它们可以是 (4, 4, 1)型，(4, 3, 1, 1)型，(4, 2, 2, 1)型或(3, 3, 3) 型的（见文献[17.59]）。

关于多项式系统的代数解及代数极限环个数的研究最近又有

文献[17.61]与[17.53]。[17.61]中证明了不等式：

$$n(m-1)-2g+2\geqslant\sum_{i=1}^{k}l_i,$$

其中$m$是多项式系统的次数，$g$是$C$的亏格，$n$是$C$的次数，$l_i$是$C$通过其非光滑点$q_i$的不可约分支的条数。与[17.61]独立，[17.53]证明了以上不等式中有等式成立。由此[17.61]证明了：实$m$次平面多项式系统的代数极限环的个数不大于$\left(\frac{m^2+m+2}{2}\right)^2$，如果它们所对应的代数解的非光滑点只有通常的二重点与尖点。

关于具有多重代数不变曲线的多项式系统极限环的研究还有文献[17.46]。

此外，在[17.40]中C.Christopher还应用求不变代数曲线的办法确定某些三次系统有中心的条件以及三次系统细焦点阶数的相互影响，其法比前人常用的方法优越。

例如，在§15中曾提到文献[17.48]中证明了：若$O(0, 0)$是

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y+Fx^3+Gx^2y+(H-3P)xy^2+Ky^3,\\ \dot{y}&=-x+Lx^3+(M-H-3F)x^2y+(N-G)xy^2+Py^3\end{aligned}\tag{17.69}$$

的一阶细焦点，且存在另两个细焦点，则当$2K+N-2G\neq0$时，它们的阶数都不大于3。其法仍是把原点移到细焦点$(0, \pm y_0)$，$\left(y_0^2=-\frac{1}{K}\right)$上，然后逐个计算焦点量。

文献[17.40]则直接对(17.69)求不变代数曲线和首次积分。当$O$为一阶细焦点而另两个焦点的阶数大于3时，由[17.48]知道应有：$H=P=0, M=4F, 2G-N-2K=0, L+K=0$，故(17.69)可写成：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y+Fx^3+Gx^2y+Ky^3,\\ \dot{y}&=-x-Kx^3+Fx^2y+(G-2K)xy^2,\end{aligned}\tag{17.70}$$

(17.70)有不变共轭复直线$x\pm iy=0$。易证：

$$\left(\frac{P(x, y)}{(x^2+y^2)^2}\right)_x+\left(\frac{Q(x, y)}{(x^2+y^2)^2}\right)_y=0.$$

故$(0, \pm y_0)$是中心，这时(17.70)有首次积分：

$$\frac{1}{x^2+y^2}\exp\left\{\frac{1+2(G-K)x^2-Fxy}{x^2+y^2}\right\}$$
$$\times\exp\left(2F\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=\text{const}.$$

又如文献[17.49]研究三次系统：

$$\dot{x}=\lambda x+y+a_1x^2+(a_2+2b_1)xy+(a_3-a_1)y^2+xF,$$
$$\dot{y}=-x+\lambda y+b_1x^2+(b_2-2a_1)xy-b_1y^2+yF, \qquad (17.71)$$

其中 $F=a_4x^2+a_5xy+(a_6-a_4)y^2$。

作者假设 $O(0,0)$ 是阶数高于 5 的细焦点，则 $\lambda=0$，且诸 $a_i$ 应满足 6 组条件之一。作者证明了在其中四组条件之一成立时，$O$ 确是中心，但另两组条件之一成立时，$O$ 是否中心，没有解决。在[17.40]中用找不变代数曲线的办法解决了[17.49]中遗留的问题(参见本书 §8)。

研究(17.70)的中心的文章最近还有[17.63]。

此外，对方程

$$\dot{x}=y,$$
$$\dot{y}=-x+a_1x^2+a_2xy+a_3y^2+a_4x^3+a_5x^2y+a_6xy^2+a_7y^3, \qquad (17.72)$$

[17.40]得到了当 $a_7=0$ 时，[17.50]用其他方法所得到的一切使 $O(0,0)$ 成为中心的条件。又在 $a_7\neq0$ 时，还得到 [17.50] 未曾得到过的使 $O$ 成为中心的条件。

关于多项式系统的代数积分线的文章还有[17.51]、[17.52]、[17.53]、[17.55]、[17.63]以及 [17.1]§18 已提到的许多工作。特别是[17.55] 其中某些结果远比[17.38]深刻。可惜证明太难，故不在此作详细介绍了。

以上我们看到 R.E.Kooij 和C.Christopher用分析和代数方法总结、提高、推广了许多过去别人用定性方法证明的关于代数解和极限环或可积性之间的关系的结果。但是在多项式系统定性理论中还有许多关于奇点个数或性质影响极限环个数或分布的结果，如在 §2、9、10 中所见到的，这里再列举最主要的几条。

1) 有两个细奇点的二次系统不存在闭轨线。

2) 有星形结点的二次系统没有闭轨线。

3) 有三阶细焦点的二次系统没有闭轨线。

4) 有细鞍点的二次系统最多只能有一个极限环。

5) 有一个有限远奇点和一个无限远奇点的二次系统最多有一个极限环。

6) 有退化奇点的二次系统最多有一个极限环。

7) 有重数大于2的半初等有限奇点的二次系统最多有一个极限环。

8) 二次系统不能既有中心又有极限环。

9) 若二次系统有两个焦点，其中之一为细焦点，此外还存在第三个奇点，则极限环必集中分布；若细焦点为二阶，则无极限环。

我们希望上列这些结果也能得到代数与分析的证明，并且推广到高次多项式系统。

## 参考文献


[17.1] Ye Yanqian and others.Theory of Limit cycles, Trans. Math. Monographs 66, AMS.1986.

[17.2] 戴国仁，沃松林。$E_3$ 系统的积分直线与闭轨线。数学物理学报，v. 9 (1989), 251～261。

[17.3] Suo Guangjian and Chen Yongshau. The real quadratic system with two conjugate imaginary straight line solutions, Ann. of Diff. Eqs.2(2), 1986, 197～207.

[17.4] 沈伯骞。二次系统的椭圆分界线环。应用数学学报，1992, 15(2), 174～183.

[17.5] Cherkas L A.Methods for the estimating the number of limit cycles for autonomous systems, Diff.Urav.13(1977), 779～802.

[17.6] 沈伯骞。二次系统存在双曲线分界线环的充要条件。辽宁师大学报，1991, v.14, 1～9。

[17.7] 陈广卿。具有二次代数曲线解的二次系统之极限环(预印本)。

[17.8] Gasull A. On polynomial systems with invariant algebraic curves, Univ.Auton.de Barcelona, Dept.Math.no.7, 1990.

[17.9] Chen G Q. Real quadratic differential system having a parabola as an integral curve, Proc. of the 1983 Beijing Symp.on Diff. Geo. and Diff.Eqs.(1986).

[17.10] Chen S P.Limit cycles of a real quadratic differential system having a parabola as an integral curve, Kexue Tongbao, 30(1985), 401～405.

[17.11] 单国先,索光俭。有抛物线解的二次系统的极限环。河北师大学报 1985, 1, 11～16.

[17.12] Christopher C.Quadratic systems having a parabola as an integral curve, Proc.Roy.Soc.Edin.112A(1989), 113～134.

[17.13] 童新元。关于具有抛物线解的二次系统极限环的唯一性（北京师范大学,1991,预印本）。

[17.14] 庄瑜。具有抛物线解的二次系统的极限环.山东矿业学院学报,1991, v.10, 203～207.

[17.15] 沈伯骞。二次系统存在抛物线奇异环的充要条件。数学研究与评论, 1991, v.11(3), 425～432.

[17.16] Zegeling A and Kooij R E.Uniqueness of limit cycles in polynomial systems with algebraic invariants, Delft Univ.of Tech., Preprint, 1992.

[17.17] Zhang Pingguang.Study of non-existence of limit cycles around a weak focus of order two or three for quadratic systems, Chin. Sci.Bull.v.35, 1990, no.14, 1156～1161.

[17.18] 沈伯骞。二次系统的三次曲线极限环和分界线环的存在性问题。数学年刊, 1991, 12A(3), 382～389.

[17.19] 沈伯骞,刘德明。具有三次曲线解的二次系统的极限环的存在性。辽宁师大学报,1990, no.2, 1～9.

[17.20] 徐长江。以三次曲线为特殊积分的二次系统（浙江大学数学系，预印本,1989）。

[17.21] 沈伯骞。二次系统存在三次曲线弓形分界线环的充要条件。纯粹数学与应用数学，1990, v.6, 94～96.

[17.22] Yarbronskii A E.Limit cycles of a certain differential equations, Diff.Uravn.2(3), 1966, 335～344.

[17.23] Shen Boqian.A sufficient and necessary condition of the existence of quartic curve limit cycles and separatrix cycle in a certain quadratic system, Ann.of Diff.Eqs.7(3), 1991, 282～288.

[17.24] 徐世龙。关于代数极限环的注记，四川师大学报，1980.

[17.25] 李继彬。安徽大学学报,1980, no.1, 27～31.

[17.26] 沈伯骞,索光俭。具有两条实或虚直线解的系统 $\dot{x}=-ax-by+\sum_{i+j=3} a_{ij}x^iy^j$, $\dot{y}=cx+dy$.辽宁师大学报,1987, 1～[illegible].

[17.27] Huang Qiyu. Limit cycle for cubic system of Kolmogorov type with centered conic solution, Kexue Tongbao, v.32, no.12, 1987, 787～797.

[17.28] 黄启宇. 具有二次代数轨线的 Kolmogorov 型三次系统的极限环. 第二届全国常微定性理论学术会议资料, 1987.

[17.29] 张成. 具有非退化有心二次代数曲线解的 Kolmogorov 型三次系统的极限环. 辽宁师大数学系硕士论文(1990).

[17.30] Schuster P, etc. Biological Cybernetics, v.40(1981), 17～25.

[17.31] 戴国仁. 一类具有直线等倾线的 $E_3$ 系统. 四川大学学报, 1985, no.2, 16～25.

[17.32] Kooij R E. Some new properties of cubic systems, Delft Univ. Tech., Prepriat, 1991.

[17.33] 戴国仁, 冷忠建. $E_3$ 系统的分界线环与积分直线. 四川大学学报, 1987, v.24, 367～375.

[17.34] Kooij R E. Real cubic systems with four line invariants, Delft Univ. Tech., Research Report, 91～79, 1991.

[17.35] Blows T R, Rousseau C. Bifurcation at infinity in polynomial vector fields, Preprint, 1991.

[17.36] Kooij R E. Real polynomial systems of degree $n$ with $n+1$ line invariants, Delft Univ. Tech., Research Report. 91～86, 1991.

[17.37] 刘德明. 具有三次代数曲线解的三次系统的极限环. 辽宁师大数学系, 预印本, 1987.

[17.38] Christopher C J. Polynomial systems with invariant algebraic curves, Univ. College of Wales, Preprint, 1990.

[17.39] Christopher C J. Invariant algebraic curves in polynomial systems, bounds on their number and the non-existence of limit cycles, Univ, College of Wales, Preprint, 1989.

[17.40] Christopher C J. Invariant algebraic curves and conditions for a centre, Univ. College of Wales, Preprint, 1991.

[17.41] Darboux G. Mémoire sur les equations differentielles algebriques du premier order et du premier degré, Bull. des Sc. Math., 1878, pp. 60～96; 123～144; 151～200.

[17.42] Jouanolou J P. Equations de Phaff Algebriques Lect. Notes in Math. 708(1979).

[17.43] Suo Guangjian and Sun Jifang. The n-th degree differential system with $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ straight lnie solutions has no limit cycles, Proc. of the Conf. on ordinary differential equations and Control theory, Wuhan, 1987.

[17.44] Fulton W.Algebraic curves, W. A. Benjamin, New York, 1969.

[17.45] Kooij R E and Christopher C. Algebraic invariant curves and the integrability of polynomial systems, Preprint, 1992.

[17.46] Gasull A.Polynomial systems with enough invariant algebraic curves, Dynamical Systems, Proc.Spec. Prog. Nankai Inst. Math. 1990-1991, v.4(1993), 73～78, World Scientific, Singapore.

[17.47] 汤正权,燕庚茂。具有二次代数极限环线的中心对称的三次系统。预印本,1990.

[17.48] Lloyd N G, Blows T R, Kalenge M C. Some cubic systems with several limit cycles, Nonlinearity, 1(1988), 653～669.

[17.49] Yasmin N. Closed orbits of certain two-dimensional cubic systems, PhD Thesis, Univ.College of Wales, Aberystwyth, 1989.

[17.50] Kukles I S.Sur quelques cas de déstinction entre un foyer et un centre, Dokl.Akal.Nauk, SSSR, 42(1944), 208～211.

[17.51] Wilson J C.Algebraic periodic solution of $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0$, Contr.Diff.Eqs.3(1964), 1～20.

[17.52] Lins Neto A.Algebraic solutions of polynomial differential equations and foliations in dimension two, Lect. Notes in Math. 1345 (1988).

[17.53] Cerveau D and Lins Neto A.Holomorphic foliations in CP(2) having an invariant algebraic curve, Ann. Inst. Fourier, 41(1991), 883～903.

[17.54] 陈国维。具有两对共轭复不变直线和一条实不变直线的三次系统。(I),预印本,1992.

[17.55] Zoladek H. The solution of the centre-focus problem, Preprint, 1992.

[17.56] Dolov M B.Darboux integral in case of a focus, Diff.Uravn. 14(1978), no.7, 1173～1178.

[17.57] 谢向东,蔡燧林。具抛物线不变集的二次系统至多有一个极限环。科学通报,39(1994), 265～267.

[17.58] 张成。具有二次代数曲线解的 Kolmogorov 三次系统的极限环。南京大学学报,数学半年刊1993年增刊, 78～80.

[17.59] 章熙康。三次,四次多项式系统的积分直线的条数。同[17.58], 209～212.

[17.60] Щеглова Н Л. Центры и предельные циклы кубической системы с линейными интегралами, ДАН Беларуси, t.36(1992), no.7～8, 581～584.

[17.61] 江其保。多项式系统的代数极限环的个数。(博士论文,1993).

[17.62] 赵育林。一类具有中心及细焦点的三次系统。预印本，1993。

[17.63] Ушхо Д С. Чайка, И В. О предельных циклах одной автономной системы с алгебраическими правыми частями, Диф. урав, т. 27 (1991), 544～546。

## § 18. Abel 方程的周期解

在§10中已经讲到文献[18.1]中应用将二次系统化为Abel方程

$$\frac{d\rho}{d\theta}=A(\theta)\rho^3-B(\theta)\rho^2-C(\theta)\rho, \tag{18.1}$$

然后研究$(\rho, \theta)$半圆柱：

$$\rho\leqslant 0,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \quad (\theta=0\text{ 与 }\theta=2\pi\text{ 等同})$$

上的流的闭解的方法，得到关于有一个有限远奇点的二次系统与有界二次系统极限环的存在性及个数的许多结论。这同样的方法后来在文献[18.2]与[18.3]中又被用来研究具有齐$n$次非线性项的多项式系统：

$$\dot{x}=\lambda x+y+P_n(x, y), \quad \dot{y}=-x+\lambda y+Q_n(x, y), \ n\geqslant 2 \tag{18.2}$$

的极限环问题。当(18.2)被化成(18.1)时，有

$$A(\theta)=-(n-1)g(\lambda g+f),\ B=(n-1)(f+2\lambda g)-g',$$
$$C(\theta)=(n-1)\lambda。 \tag{18.3}$$

其中

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\cos\theta P_n(\cos\theta,\ \sin\theta)+\sin\theta Q_n(\cos\theta,\ \sin\theta),\\ g(\theta)&=\cos\theta Q_n(\cos\theta,\ \sin\theta)-\sin\theta P_n(\cos\theta,\ \sin\theta)。\end{aligned} \tag{18.4}$$

而 $\rho=r^{n-1}/(1-r^{n-1}g(\theta)), \quad x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta。$ (18.5)

值得提到的是，文献[18.3]中不但研究了$A(\theta)$为常号的情况，并且还研究了$B(\theta)$为常号的情况，也得到(18.2)最多只有两个包围$O(0, 0)$的极限环的结论。可惜对于二次系统$B(\theta)$是$\cos\theta$、$\sin\theta$的三次多项式不可能定号。关于$A(\theta)$、$B(\theta)$可能变号时的方程

(18.1) 的极限环问题，最近又有文献[18.13]，在一定条件下也得到最多两个环的结论。

本节介绍比(18.1)更广，且因变量为复值的方程：

$$\dot{z}=z^N+p_1(t)z^{N-1}+\cdots+p_N(t) \tag{18.6}$$

的周期解问题，这主要是英国学者 N.G.Lloyd 和他的学生们的工作(见文献[18.4]、[18.5]、[18.6]、[18.7]、[18.8])。考虑复值方程的好处是：当方程受小扰动时周期仍保持存在。例如，若在(18.6)式右端加上一项 $\varepsilon z^{N+1}$，只要 $\varepsilon$ 足够小，则方程的孤立周期解的个数不变。

在文献[18.4]中假设 $p_1(t)$, $\cdots$, $p_N(t)$ 是实变量 $t$ 的周期为 $\omega$ 的实连续函数，然后研究(18.6)的周期为 $\omega$ 及 $m\omega$ ($m$ 为正整数)的周期解和奇异周期解的性质，以及当 $N=2$、3 这两个特殊情况下周期解的个数。由于内容太多，不可能在本书中全部介绍。下面只引用[18.4]中的下列一些定义和结论，以便我们对[18.7]的内容作较详细的介绍时应用。

1) 以 $\mathscr{S}_N$ 记满足

$$p_i(t)=p_i(t+\omega)\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{18.7}$$

的一切 $N$ 函数组 $(p_1(t),\ \cdots,\ p_N(t))$ 所成的集合。对 $P=(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_N)$ 定义

$$\|P\|=\max\{|p_i(t)|;\ 1\leqslant i\leqslant N,\ 0\leqslant t\leqslant\omega\}, \tag{18.8}$$

则 $(\mathscr{S}_N,\ \|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间，仍以 $\mathscr{S}_N$ 记之。若 $M=(M_1,\ \cdots,\ M_N)$ 是一固定向量，则记 $\mathscr{S}_N$ 中一切满足 $|p_i(t)|\leqslant M_i$ 的 $P$ 所成的空间为 $\mathscr{S}_N(M)$。今后即以 $P$ 来代表方程(18.6)。

2) 显见(18.6)的初值问题对 $P\in\mathscr{S}_N$ 必有唯一的解。记满足 $z(t_0)=z_0$ 的解为 $z_P(t;\ t_0,\ z_0)$；若 $t_0=0$，则称此解是从 $z_0$ 出发的。

3) 定义：

$$q(P,\ c)=z_P(\omega;\ 0,\ c)-c,$$

显见，当且仅当 $z_P(t;0,\ c_0)$ 在 $0\leqslant t\leqslant\omega$ 上存在时，$q(P,\ c_0)$ 才有定义。当 $q(P,\ c_0)$ 有定义时，必存在 $\delta>0$，使当 $|c-c_0|<\delta$，

$0\leqslant t\leqslant\omega$ 时，$z_P(t;\ 0,\ c)$也有定义，且对 $c$ 为全纯。因此，当 $q$ 有定义时，它是 $c$ 的全纯函数。$q(P,\ c)=0$ 当且仅当 $P$ 有一个 $\omega$ 周期解，满足 $z(0)=c$。仿此可定义 $q_m(P,\ c)=z_P(m\omega,\ 0,\ c)-c$ 以及 $m\omega$ 周期解。$P$ 的一个 $m\omega$ 周期解 $\psi(t)$ 称为是孤立的，如果 $\psi(0)$ 是 $q_m(P,\ c)$的孤立零点。

4) 若 $p_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$不全为常数，则对无理数 $\beta$，$P$ 没有周期为 $\beta\omega$ 的非常数周期解。

这由文献[18.12]中的下述定理立刻可导出：

设 $x\in R^m$，$f(x,\ t+\omega)=f(x,\ t)$为连续且是 $t$ 的显函数，若 $\dot{x}=f(x,\ t)$有周期为 $\beta\omega$（$\beta$ 为无理数）的周期解 $\psi(t)$，则

$$\{\psi(t)\}\subset X,$$

$$X=\{x;\ f(x,\ t)=f(x,\ 0)\text{对一切 }t\}$$

是一不随 $t$ 而变的集合。

对方程(18.6)来说，$X$是满足

$$[p_1(t)-p_1(0)]z_0^{N-1}+\cdots+[p_N(t)-p_N(0)]=0$$

的 $z_0\in\mathbb{C}$ 的集合。当 $p_i$ 不全为常数时，必存在 $j$ 与 $t^*$，使 $p_j(t^*)\neq p_j(0)$。从而上述方程对 $t=t^*$ 来说，至多有 $N-1$ 个解，而 $X$ 是这 $N-1$ 个点的子集，从而任一周期为 $\beta\omega$（$\beta$ 为无理数）的解是一个常数。

5) 对每一 $m$，函数 $q_m(P,\ c)$对$(P,\ c)$为连续，当它有定义的时候（证略）。

6) 设 $(P_n)$ 与 $(c_n)$ 为 $\mathscr{P}_N(M)$ 与 $\mathbb{C}$ 中的序列，$P_n\to P\in\mathscr{P}_N(M)$，$c_n\to c$（当 $n\to\infty$）。又 $q_m(P_n,\ c_n)=0$（对一切 $n$），则或是 $q_m(P,\ c)=0$（即周期解的极限仍为周期解），或是 $z_P(t;0,\ c)$ 不能延拓到整个区间$[0,\ m\omega]$，在后一情况，称 $z_P(t;0,\ c)$ 为奇异 $m\omega$ 周期解。

7) $P$ 的一个孤立 $m\omega$ 周期解 $u(t)$ 的重数是指 $u(0)$ 作为 $q_m(P,\ c)$的零点的重数。说得详细些，设当 $|c-u(0)|$ 足够小且 $0\leqslant t\leqslant m\omega$ 时有展开式：

$$z_P(t;0,\ c)=a_0(t)+a_1(t)(c-c_0)$$

$$+\cdots+a_n(t)(c-c_0)^n+\cdots, \tag{18.9}$$

其中 $c_0=u(0)$, $a_0(t)=u(t)$, $a_0(0)=c_0$, $a_1(0)=1$, $a_j(0)=0$ 对 $j\geqslant 2$, 则有:

$$q_m(P,\ c)=a_0(m\omega)-a_0(0)+(c-c_0)\{a_1(m\omega)-a_1(0)\}+\cdots,$$

而 $u(0)$ 是 $q_m(P,\ c)$ 的 $k$ 重零点,当且仅当

$$a_j(m\omega)=a_j(0)\quad(\text{对}\quad j=0,\ 1,\ \cdots,\ k-1),\ \text{而}$$

$$a_k(m\omega)\neq a_k(0).$$

8) 设 $P$ 有一重数为 $k$ 的孤立 $m\omega$ 周期解 $u(t)$, 则可找到任意小的 $\delta>0$, 使对一切满足 $\|P^*-P\|<\delta$ 的 $P^*$, 它都有 $k$ 个单重 $m\omega$ 周期解 $u_1$, $u_2$, $\cdots$, $u_k$, 满足 $|u_j(0)-u(0)|<\delta$ (对 $j=1$, $2$, $\cdots$, $k$)。(证明略)。

9) 若 $u(t)$ 是 $P$ 的 $k$ 重 $m\omega$ 周期解, 又 $m|m'$, 则 $u(t)$ 至少是 $P$ 的 $k$ 重 $m'\omega$ 周期解。

10) 在极坐标($z=r\,e^{i\varphi}$) 之下, $P$ 可写成:

$$\begin{cases} \dot r=r^N\cos\ (N-1)\varphi+\cdots+p_{N-2}(t)r^2\cos\varphi+p_{N-1}(t)r \\ \qquad +p_N(t)\cos\varphi, \\ r\dot\varphi=r^N\sin(N-1)\varphi+\cdots+p_{N-2}(t)r^2\sin\varphi-p_N(t)\sin\varphi. \end{cases} \tag{18.10}$$

根据对方程 (18.10) 右方的估计不难证明: 对 $N$、$M$ 存在满足: $a=\max\{6,\ 6M_1,\ \cdots,\ 6M_N\}$, $\rho\geqslant 1$ 使当 $r>\rho$ 时有 $\dfrac{\pi}{4}>\dfrac{a(N-1)}{r}$,

$$\sin\{(N-1)a/r\}>\frac{5}{6}\,\frac{(N-1)a}{r},\quad \sum_{i=2}^{N}M_ir^{N-i}<\frac{1}{6}\,ar^{N-1},$$

$$\sum_{i=1}^{N}M_ir^{N-i}<\frac{1}{4}\,r^N \tag{18.11}$$

的很大的实数 $\rho$ 与 $a$, 而 $z$ 平面上的圆 $r=\rho$ 之外的无限区域被分为 $4N-4$ 个区域($N=4$ 时如图 18.1 所示):

$$G_k=\left\{z;\ r>\rho,\ \frac{k\pi}{N-1}-\frac{a}{r}<\varphi<\frac{k\pi}{N-1}+\frac{a}{r}\right\}$$

$$(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2N-3),$$

$$H_k=\left\{z;\ r>\rho,\ \frac{k\pi}{N-1}+\frac{\alpha}{r}\leqslant\varphi\leqslant\frac{(k+1)\pi}{N-1}-\frac{\alpha}{r}\right\},\quad(18.12)$$

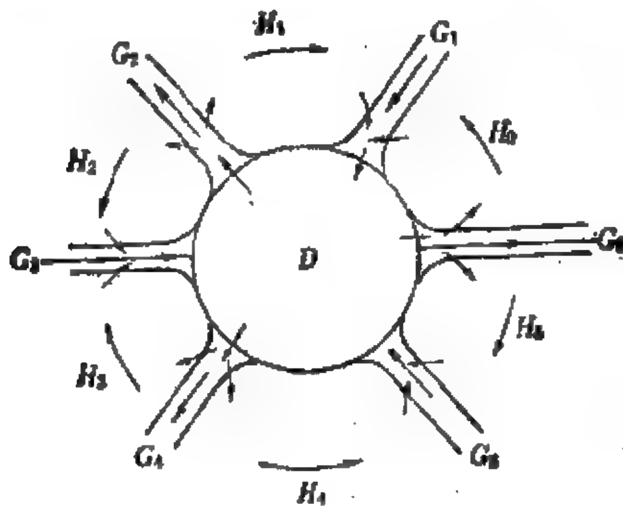



图 18.1

并且可证明在 $G_k$($k$ 为偶数)中有

$$\dot{r}>\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\right)r^N\quad(18.13)$$

成立；在 $G_k$($k$ 为奇数)中有

$$\dot{r}<-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\right)r^N\quad(18.14)$$

成立；在 $H_k$($k$ 为偶数)中有

$$r\dot{\varphi}>\frac{1}{2}\alpha r^{N-1}\quad(18.15)$$

成立；在 $H_k$($k$ 为奇数)中有

$$r\dot{\varphi}<-\frac{1}{2}\alpha r^{N-1}\quad(18.16)$$

成立。由此可知：对 $G_{2j}$，轨线仅能通过圆 $r=\rho$ 而进入它，同样，轨线仅能通过圆 $r=\rho$ 而离开 $G_{2j+1}$。进一步仔细估计，可证明 $H_k$ 中的轨线当 $t$ 增加或减少时，都不能在 $H_k$ 中跑向无限远。任一轨线在 $H_k$ 中只能停留有限时间，后来必进入某一 $G_{2j+1}$(当 $t$ 增加)；或进入 $G_{2j}$(当 $t$ 减少)。

由于任一解当 $t\geqslant t_0$ 保持在 $G_{2j}$ 中时，有

$$\dot r > \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\right) r^N \quad (当\ t \geqslant t_0).$$

记 $r_0 = r(t_0)$，则由以上不等式积分可看出：若记

$$\varepsilon = \varepsilon(r_0) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\right)(N-1) r_0^{N-1}},$$

那末这个解必在 $t_0 + \varepsilon$ 以前就跑向无穷远，亦即它不能在 $[t_0, t_0+\varepsilon)$ 整个区间上有定义。同样，若一解当 $t \leqslant t_0$ 时保持在 $G_{2l+1}$ 中，则它不能在 $(t_0-\varepsilon, t_0]$ 整个区间上有定义。

又由图 18.1 可见：(18.10) 的每一个解必在 $t$ 增加或 $t$ 减少时进入 $r \leqslant \rho$，又它只能在 $G_{2l}$ 中按正向跑向无限远，或在 $G_{2l+1}$ 中按负向跑向无限远。

**例 18.1** 设 $P$ 为：

$$\dot z = z^2 + 1，或即 \begin{cases} \dot x = x^2 - y^2 + 1 \\ \dot y = 2xy, \end{cases} \tag{18.17}$$

则满足 $z(0) = z_0$ 的解是

$$z(t) = \frac{\sin t + z_0 \cos t}{\cos t - z_0 \sin t}, \tag{18.18}$$

其轨线图如图 18.2 所示。

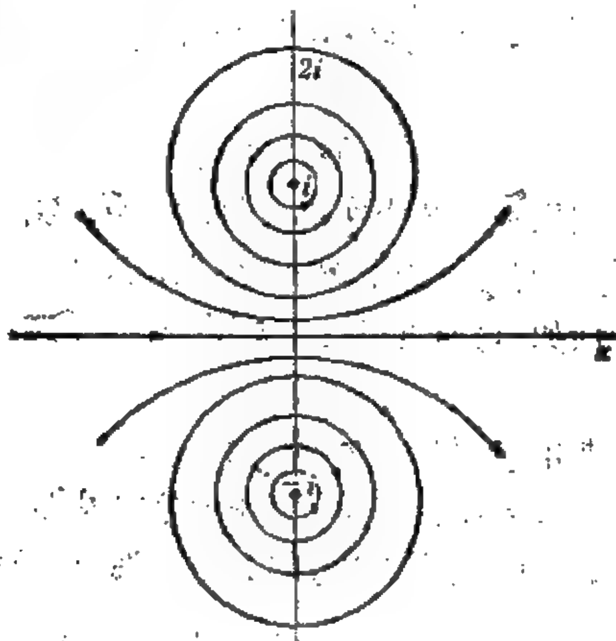



图 18.2

由任何 $z_0(\mathrm{Im} z_0 \neq 0)$ 确定的解都有周期 $\pi$，$(0, \pm i)$ 是两个奇点。取 $c_n = \frac{i}{n}$，$P_n \equiv P$，则 $c_n \to 0$，$z_P(t, 0, 0)$ 位于 $x$ 轴上，它不是周期解，而是前面定义的奇异周期解，只在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上定义。

11) 对 $(p_1, p_2, p_3) \in \mathscr{S}_3$，方程

$$\dot{z} = z^3 + p_1(t)z^2 + p_2(t)z + p_3(t) \tag{18.19}$$

恰有三个周期解，它们的周期都是 $\omega$。(证明略)

注意：当 $z$ 为实数时，只能证明(18.19)最多有三个 $\omega$ 周期解(见文献[18.9])。

12) 对 $(p_1, p_2) \in \mathscr{S}_2$，方程(Riccati)

$$\dot{z} = z^2 + p_1(t)z + p_2(t) \tag{18.20}$$

最多有两个周期为 $\omega$ 的周期解[1]。

13) 对 $N \geqslant 4$，$\mathscr{S}_N$ 中存在这样的方程，它至少有 $N+2$ 个 $\omega$ 周期解。(证明略)

14) 对 $P \in \mathscr{S}_N$，当 $N$ 为奇数(偶数)时，$P$ 有奇数(偶数)个 $\omega$ 周期解；当 $m > 1$，$P$ 的 $m\omega$ 周期解必为偶数个。

下面介绍文献[18.7]中对方程

$$\dot{z} = \alpha(t)z^3 + \beta(t)z^2 + \gamma(t)z \tag{18.21}$$

的边值问题

$$z(\omega) = z(0) \tag{18.22}$$

的研究成果。这里 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 为实值函数，$z \in C$。我们仍称(18.21)的满足(18.22)的解为 $\omega$ 周期解，而 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 只要在 $[0, \omega]$ 中有定义就可以了。例如，它们可以是 $\cos t$ 与 $\sin t$ 的多项式，也可以是 $t$ 的多项式。

在研究周期解问题时，(18.21)并不比

$$\dot{z} = \alpha(t)z^3 + \beta(t)z^2 + \gamma(t)z + \delta(t) \tag{18.23}$$

更特殊。因为若 $\varphi(t)$ 是(18.23)的一个周期解，则代换 $z \to z - \varphi(t)$

1) 方程(18.20)可借变换 $z = -\dot{u}/u$ 化为二阶线性方程 $\ddot{u} - p_1(t)\dot{u} + p_2(t) = 0$，然后利用 Floquet 理论可导出有关周期解的个数及周期的更详细的结论。

就把(18.23)变为(18.21)了，这时$\alpha(t)$保持不变。又若$\varphi(t)$是实的，则变换后的方程(18.21)中的$\beta(t)$、$\gamma(t)$也都是实的。

就方程(18.21)看，正实轴与负实轴都是轨线；而$z=0$或为孤立周期解，或包含在一个由周期解所成的开集之中，这由$q_P$是全纯函数可知。

**定义 18.1** 称$z=0$是一中心，如果存在$O$的开邻域$U$，使$z_P(t;0,c)$对一切$c\in U$都是周期的。

**定义 18.2** 设$\varphi(t)$是(18.21)的满足(18.22)的解，$\varphi$的重数是$\varphi(0)$作为$q_P$的零点时的重数。

在讨论周期解的个数时，$k$重解作为$k$个解来看待。

**定理 18.1** 1) 设对$P\in\mathscr{P}_3$来说，$z=0$是$k$重周期解，又$V$是0的一开邻域，则必存在$\varepsilon>0$，使当$\|P-\hat{P}\|<\varepsilon$时，$\hat{P}$恰有$k$个初始点位于$V$中的周期解。

2) 设$P$一共有$k$个周期解，则当$\|P-\hat{P}\|$足够小时，$\hat{P}$至少有$k$个周期解。

**证** 设$\varepsilon=\min\limits_{c\in\partial V}|q_P(c)|$当$\|P-\hat{P}\|$足够小时，有

$$|q_{\hat{P}}(c)-q_P(c)|<\varepsilon \quad (对\ c\in\partial V),$$

于是由 Rouché 定理即得 1) 的结论。

对$P$的每一周期解应用 1)，然后取诸$\varepsilon$中的最小者，便知 2) 成立。 ▮

**附注** 解的重数定义和定理18.1显然也适用于方程(18.23)。又$\hat{P}$的$k$个解不一定都是实的。

现在研究(18.21)的解$z=0$的重数。在(18.9)式中取$c_0=0$，得

$$z_P(t;0,c)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)c^n, \tag{18.24}$$

其中

$$a_1(0)=1,\ a_n(0)=0\ (当\ n>1), \tag{18.25}$$

从而

$$q_P(c)=(a_1(\omega)-1)c+\sum_{n=2}^{\infty}a_n(\omega)c^n.$$

当 $a_1(\omega)=1$，$a_2(\omega)=\cdots=a_{\mu-1}(\omega)=0$ 而 $a_\mu(\omega)\neq 0$ 时，$z=0$ 是 (18.21) 的 $\mu$ 重解。若对一切 $k>1$ 有 $a_k(\omega)=0$，则 $z=0$ 是中心。

以(18.24)代入(18.21)式两端，比较 $c$ 的同次幂的系数，并引用 (18.25)，就可由一系线性微分方程来逐个地确定 $a_1(t)$，$a_2(t)$，$\cdots$。显见 $\dot{a}_1(t)=a_1(t)\gamma(t)$，又 $a_1(0)=1$，故得

$$a_1(t)=e^{\int_0^\omega \gamma(s)ds}. \tag{18.26}$$

因此，如果

$$\int_0^\omega \gamma(s)ds=0, \tag{18.27}$$

则 $a_1(\omega)=1$，从而 $\mu>1$。以后就假设(18.27)式总成立，那末可以利用代换

$$\zeta=ze^{-\int_0^t \gamma(s)ds}, \tag{18.28}$$

把(18.21)变为：

$$\dot{\zeta}=\bar{\alpha}(t)\zeta^3+\bar{\beta}(t)\zeta^2, \tag{18.29}$$

其中

$$\bar{\alpha}(t)=\alpha(t)e^{2\int_0^t \gamma(s)ds},\quad \bar{\beta}(t)=\beta(t)e^{\int_0^t \gamma(s)ds}.$$

当 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ 是 $t$ 的周期函数时，$\bar{\alpha}(t)$、$\bar{\beta}(t)$ 也是周期函数。又当 $z=0$ 是(18.21)的 $\mu$ 重解时，$\zeta=0$ 也是(18.29)的 $\mu$ 重解。这样，我们以后不妨设(18.21)中的 $\gamma(t)=0$ 而改为考虑方程：

$$\dot{z}=\alpha(t)z^3+\beta(t)z^2. \tag{18.30}$$

对(18.30)有 $a_1(t)\equiv 1$，而 $a_n(t)$ 由方程：

$$\dot{a}_n=\alpha\sum_{\substack{i+j+k=n\\ i,j,k\geq 1}}a_ia_ja_k+\beta\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j\geq 1}}a_ia_j \tag{18.31}$$

及 $a_n(0)=0$ 来决定。

如果用 $\bar{\xi}(t)$ 来记不定积分 $\int_0^t \xi(s)ds$，则由 (18.31) 式不难证明(18.24)式中的前六个系数如下：

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1,\\
a_2 &= \bar{\beta},\\
a_3 &= \bar{\beta}^2 + \bar{\alpha},\\
a_4 &= \bar{\beta}^3 + 2\bar{\beta}\bar{\alpha} + \overline{\bar{\beta}\alpha},\\
a_5 &= \bar{\beta}^4 + 3\bar{\beta}^2\bar{\alpha} + \overline{\bar{\beta}^2\alpha} + 2\bar{\beta}\,\overline{\bar{\beta}\alpha} + \frac{3}{2}\,\bar{\alpha}^2,\\
a_6 &= \bar{\beta}^5 + 4\bar{\beta}^3\bar{\alpha} + \overline{\bar{\beta}^3\alpha} + 3\bar{\beta}^2\,\overline{\bar{\beta}\alpha} + 2\bar{\beta}\,\overline{\bar{\beta}^2\alpha} + \frac{9}{2}\,\bar{\beta}\bar{\alpha}^2\\
&\quad + 3\overline{\bar{\beta}\alpha}\,\bar{\alpha} - \frac{1}{2}\,\overline{\bar{\beta}\alpha^2}.
\end{aligned}
\tag{18.32}
$$

在文献[18.7]中还算出 $a_7$、$a_8$，其表达式更繁，这里从略。

由(18.32)以及 $k$ 重解的定义不难得到：

**定理 18.2** (18.30)的解 $z=0$ 有重数 $k$ $(2\leqslant k\leqslant 8)$，当且仅当 $\eta_n=0$ 对 $2\leqslant n\leqslant k-1$，而 $\eta_k\neq 0$。这里：

$$
\begin{gathered}
\eta_2=\int_0^\omega \beta,\quad \eta_3=\int_0^\omega \alpha,\quad \eta_4=\int_0^\omega \alpha\bar{\beta},\quad \eta_5=\int_0^\omega \alpha\bar{\beta}^2,\\
\eta_6=\int_0^\omega\left(\alpha\bar{\beta}^3-\frac{1}{2}\,\bar{\alpha}^2\beta\right),\quad \eta_7=\int_0^\omega(\alpha\bar{\beta}^4+2\alpha\bar{\alpha}\bar{\beta}^2),\\
\eta_8=\int_0^\omega\left(\alpha\bar{\beta}^5+3\alpha\bar{\alpha}\bar{\beta}^3+\alpha\bar{\beta}^2\,\overline{\bar{\beta}\alpha}-\frac{1}{2}\,\bar{\alpha}^3\beta\right).
\end{gathered}
\tag{18.33}
$$

要从 $k$ 重零解分支出非零周期解，可以像实自治系统从 $k$ 阶细焦点分支出极限环那样由适当变动方程中的系数来实现。如果我们能变动(18.30)的系数，但保持(18.30)的形式不变，使由 $\eta_2=\eta_3=\cdots=\eta_{k-1}=0$，$\eta_k\neq 0$ 变为 $\eta_2=\eta_3=\cdots=\eta_{k-2}=0$，$\eta_{k-1}\neq 0$，则在 $z=0$ 邻近将只出现一个周期解 $\psi(t)$。由于复周期解必定成对出现，所以 $\psi(t)$ 一定是实的。如此一步一步做下去，一般来说，最后可以使 $z=0$ 变为(18.30)的二重周期解，而在它的邻近可以得到(18.30)的 $k-2$ 个不同的非零实周期解。但在特殊情况，如果存在这样的 $j$，使当 $\eta_{j-1}=0$ 时，便可导出 $\eta_j=0$，则用上述方法便只能得到少于 $k-2$ 个的非零实周期解。这现象在由高阶细焦点分支出极限环时，也有可能会遇到的。

**定理 18.3** 若$\alpha(t)$常号且不恒等于零，则(18.21)最多只有三个周期解，且其中至少有一个是实的[1]。

**证** 由假设知$\int_0^\omega \alpha(t)\,dt \neq 0$。我们先来证明(18.21)的任一周期解的重数最高是3，因而必定是孤立的。假设$\varphi(t)$是(18.21)的一个周期解。令$z_1 = z - \varphi(t)$，则由(18.21)可得：

$$\dot{z}_1 = \alpha(t) z_1^3 + \beta_1(t) z_1^2 + \gamma_1(t) z_1. \tag{18.34}$$

其中$\beta_1 = \beta + 3\alpha\varphi$，$\gamma_1 = \gamma + 2\beta\varphi + 3\alpha\varphi^2$。由前知若

$$\Gamma = \int_0^\omega \gamma_1(t)\,dt \neq 0,$$

则$z_1 = 0$是(18.34)的单重周期解。反之，若$\Gamma = 0$，则可再作代换

$$\zeta_1 = z_1 e^{-\int_0^t \gamma_1(s)ds},$$

而$\zeta_1$满足方程

$$\dot{\zeta}_1 = A(t)\zeta_1^3 + B(t)\zeta_1^2. \tag{18.35}$$

其中$A(t) = \alpha(t) e^{2\int_0^t \gamma_1(s)ds}$。由于$\alpha(t)$常号且不恒等于零，故$\int_0^\omega A(t)\,dt \neq 0$。对(18.35)应用定理 18.2 可见$\eta_3 \neq 0$，即$z_1 = 0$是(18.35)的至多为三重的周期解，因而$\varphi(t)$是(18.21)的至多为三重的周期解。

对(18.34)可以取$\varepsilon$，使$\varepsilon\alpha(t) \geqslant 0$，且$0 < |\varepsilon| \ll 1$，则方程

$$\dot{z} = (\alpha(t) + \varepsilon) z^3 + \beta(t) z^2 + \gamma(t) z \tag{18.36}$$

与(18.21)在$z = 0$的邻域中有相同个数的周期解。但由于$|\alpha(t) + \varepsilon| > 0$，故可把(18.36)化成(18.19)的形式，从而由前面的 1) 知道它恰有三个周期解，因此 (18.34) 不能有多于三个的周期解。

为了证明至少有一个实的周期解，只须注意函数$q$在实轴上的性质：

1) 这是 §10 定理 10.1 的推广。

$g(c)>0$ 当 $c\geq 0$ 且足够大；$g(c)<0$ 当 $c<0$ 且 $|c|$ 足够大。故 $g$ 必有一实零点，即(18.34)必有一实的周期解。

注意：定理 18.3 的结论对方程(18.23)也成立。

**例 18.2** 方程

$$\dot{z}=z^3\sin^4 t-2z^2\sin t\cos t-z \tag{18.37}$$

不能有三个周期解(周期为 $\pi$)。

因若(18.37)有三个周期解，由定理 18.2 知道，它们都是孤立的。不妨设它们都位于一个有界开集 $D$ 中。于是只要 $|\lambda|>0$ 足够小，方程

$$\dot{z}=z^3(\lambda^2+\sin^2 t)^2-2z^2\sin t\cos t-z \tag{18.38}$$

在 $D$ 中也至少有三个周期解。由于 $\lambda^2+\sin^2 t\geqslant\lambda^2>0$，故(18.38)恰有三个周期解，因而它们都应位于 $D$ 中。但另一方面，易见 $z_1(t)=(\lambda^2+\sin^2 t)^{-1}$ 是(18.38)的一个周期解。当 $|\lambda|$ 足够小时，$z_1(t)$ 显然不能整个位于 $D$ 中。这一矛盾也就证明了(18.37)不能有三个周期解。

为了进一步研究某些形如(18.30)的方程的零解 $z=0$ 的重数，我们需要以下有关中心的定理：

**定理 18.4** 设存在一可微函数 $\sigma(t)$，满足 $\sigma(\omega)=\sigma(0)$，以及在 $I=\sigma([0,\omega])$ 上定义的连续函数 $f$ 与 $g$ 使

$$\alpha(t)=f(\sigma(t))\dot{\sigma},\quad \beta(t)=g(\sigma(t))\dot{\sigma}, \tag{18.39}$$

则 $z=0$ 是(18.30)的中心。

**证** 我们可以利用(18.31)式及归纳法来证明每一个 $a_n$ 都是 $\sigma$ 的连续函数。由(18.32)式显见，

$$a_2(t)=\int_{\sigma(0)}^{\sigma(t)}g(\sigma)d\sigma=G(\sigma(t))-G(\sigma(0)),$$

故 $a_2(\omega)=0$。一般，如果已证 $a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}$ 都是 $\sigma$ 的连续函数，则 $\dot{a}_n$ 必具形式 $h(\sigma(t))\dot{\sigma}$ 对某一连续函数 $h$。故若记 $H=\int h$，则有

$$a_n(\omega)=H(\sigma(\omega))-H(\sigma(0))=0.$$

这样，$a_n(\omega)=0$（对一切 $n>1$），因此 $z=0$ 是(18.30)的中心。∎

**推论 18.1** 若 $\int_0^\omega \beta(t)dt=0$，且 $\alpha$ 是 $\beta$ 的常数倍，则 $z=0$ 是(18.30)的中心。

**证** 记 $\sigma(t)=\int_0^t \beta(s)ds$，则 $\sigma(\omega)=\sigma(0)$。若 $\alpha(t)=\nu\beta(t)$，则可取 $g(\sigma)=1$，$f(\sigma)=\nu$，即知(18.39)式成立。由定理 18.4，即得证。∎

**推论 18.2** 若 $\alpha$ 与 $\beta$ 中有一个恒等于零，另一个在 $(0,\omega)$ 上的平均值等于零，则 $z=0$ 是(18.30)的中心。

**证** 若 $\alpha\equiv 0$，则取 $\sigma=\int\beta$，$g=1$，$f=0$；若 $\beta\equiv 0$，则取 $\sigma=\int\alpha$，$f\equiv 1$，$g\equiv 0$。∎

**推论 18.3** 若 $\alpha$ 与 $\beta$ 是周期为 $\omega$ 的连续可微奇函数，则 $z=0$ 是(18.30)的中心。

**证** 由傅里叶级数的理论知道，存在连续函数 $\alpha_1$ 与 $\beta_1$ 使

$$\alpha(t)=\sin\lambda t\cdot\alpha_1(\cos\lambda t),\quad \beta(t)=\sin\lambda t\cdot\beta_1(\cos\lambda t),$$

其中 $\lambda=\dfrac{2\pi}{\omega}$。于是可取 $\sigma(t)=\cos\lambda t$，$f=\dfrac{\alpha_1}{\lambda}$，$g=\dfrac{\beta_1}{\lambda}$，然后应用定理 18.4，即得证。∎

**推论 18.4** 设 $\alpha$、$\beta$ 是周期为 $\omega$ 的连续可微函数，又存在 $\theta\in[0,\omega]$ 使 $\alpha(\theta-t)=-\alpha(t)$，$\beta(\theta-t)=-\beta(t)$，则 $z=0$ 是(18.30)的中心。

**证** 令 $\tau=t-\dfrac{\theta}{2}$，再应用推论 18.3，即得证。∎

下面利用定理 18.2 和定理 18.4 来研究当 $\alpha(t)$、$\beta(t)$ 是 $t$ 的多项式时(18.30)的零解 $z=0$ 的性质。

**定理 18.5** 设在[0, 1]中取(18.30)右端的系数为：

$$\alpha(t)=dt^i+et^j+ft^k,\quad \beta(t)=at^i+bt^j+ct^k,\tag{18.40}$$

其中 $0\leqslant i<j<k$ 为正整数，则 $z=0$ 最多只能是 4 重周期解，否则，它便是中心。

证 记

$$u=\frac{a}{i+1}+\frac{b}{j+1}+\frac{c}{k+1},\quad v=\frac{d}{i+1}+\frac{e}{j+1}+\frac{f}{k+1}.$$

由定理 18.1 看出 $\eta_2=u$, $\eta_3=v$。故若 $u\neq0$, 则 $z=0$ 是 2 重解。若 $u=0$ 而 $v\neq0$, 则 $z=0$ 是 3 重解。又可算出：当 $u=v=0$ 时，有 $\eta_4=g(bf-ce)$，其中 $g$ 是一常数，$\neq0$。因此，若 $bf\neq ce$, 则 $z=0$ 是 4 重解。最后，设 $u=v=bf-ce=0$。若 $c\neq0$, 则 $f\beta(t)=c\alpha(t)$, 故由推论 18.1 知 $z=0$ 是中心。若 $c=0$, 则有 $b=0$ 或 $f=0$。当 $b=0$ 时，由于 $u=0$, $c=0$, 故有 $a=0$, 从而 $\beta(t)\equiv0$, 由推论 18.2 知 $z=0$ 是中心。若 $f=0$, 则或是 $\beta\equiv0$ (当 $b=0$) 或是 $e\beta(t)=b\alpha(t)$，故当 $b=0$ 时，由推论 18.2；当 $b\neq0$ 时，由推论 18.1 可知 $z=0$ 仍是中心。∎

今以 $\mathscr{C}_{\delta_1,\delta_2}$ 记形如(18.30)的方程，(18.30) 中 $\alpha$ 与 $\beta$ 分别是 $t$ 的 $\delta_1$ 和 $\delta_2$ 次多项式。以 $\mu_{\max}(\mathscr{C}_{\delta_1,\delta_2})$ 记零解 $z=0$ 的最高重数。在文献[18.7]中用与证明定理 18.5 同样方法证明了以下定理：

**定理 18.6** $\mu_{\max}(\mathscr{C}_{3,2})=8$, 设

$$\beta(t)=a+bt+ct^2,\ \alpha(t)=d+et+ft^2+gt^3,\tag{18.41}$$

则当 $c\neq0$, 且

$$a=\frac{1}{6}c,\ b=-c,\ d=-\frac{1}{78}c^2,\ e=\frac{3}{26}c^2,$$

$$f=-\frac{7}{26}c^2,\ g=\frac{7}{39}c^2\tag{18.42}$$

时，有 $\mu_{\max}(\mathscr{C}_{3,2})=8$；当 $c=0$ 时，$z=0$ 为中心。

如果从满足条件(18.41)、(18.42)的方程 (18.30) 出发，经过系数的小扰动，则可得到六个不同的非零实周期解，即如下定理：

**定理 18.7** 设

$$\begin{aligned}A(t)&=c^2\left[d+et-\left(\frac{7}{26}+\varepsilon_1\right)t^2+\left(\frac{7}{39}+\varepsilon_2\right)t^3\right],\\ B(t)&=c\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\varepsilon_3+\varepsilon_5-(1-\varepsilon_3)t+t^2\right].\end{aligned}\tag{18.43}$$

其中

$$d=-\frac{1}{78}-\frac{\varepsilon_1}{6}+\frac{5\varepsilon_2}{28}+\frac{(2\varepsilon_1-3\varepsilon_2)\varepsilon_3}{4c}-\frac{\varepsilon_4}{2}+\varepsilon_5,$$

$$e=\frac{3}{26}+\varepsilon_1-\frac{6\varepsilon_2}{7}+\frac{(3\varepsilon_2-2\varepsilon_1)\varepsilon_3}{2c}+\varepsilon_4,$$

则当 $0<\varepsilon_6\ll\varepsilon_5\ll\varepsilon_4\ll\varepsilon_3\ll\varepsilon_2\ll1$ 时，方程

$$\dot{z}=A(t)z^3+B(t)z^2 \tag{18.44}$$

有六个不同的非零实周期解。

对方程(18.44)来说，$z=0$ 仍是二重解。故可再把它进行扰动，即知：当 $\gamma$、$\delta$ 适当选取，且绝对值足够小时，方程

$$\dot{z}=A(t)z^3+B(t)z^2+\gamma z+\delta$$

可以存在八个不同的非零实周期解。

仿此，当 $\delta_2=1$ 时，设记 $m_k=\mu_{\max}(\mathscr{C}_{k,1})$，在文献[18.7] 中对方程(18.30)证明了：

$$m_1=3,\ m_2=m_3=4,\ m_4=m_5=5,\ m_6\geqslant7.$$

然后由 $\mu=7$ 的 $\mathscr{C}_{6,1}$ 中的方程作小扰动，可证明以下定理：

**定理 18.8** 已给 $a$、$f$、$g$，$ag\neq0$，在方程

$$\dot{z}=A(t)z^3+B(t)z^2+\sigma_1z+\sigma_2 \tag{18.45}$$

中取

$$A(t)=-u_1+\varepsilon_4+bt+ct^2+dt^3+et^4+ft^5+gt^6,$$

$$B(t)=at-\frac{1}{2}(a+\varepsilon_5),$$

式中

$$u_1=\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4}+\frac{e}{5}+\frac{f}{6}+\frac{g}{7},$$

$$b=(44416f+11133g-58295a^2)/28050,$$

$$d=(374f+822g-495a^2)/165+\varepsilon_1,$$

$$c=-(21d+24e+25f+25g)/14-\frac{3}{2}\varepsilon_1-\frac{12}{7}\varepsilon_2+\varepsilon_3,$$

$$e=-(55f+90g)/22+\varepsilon_2.$$

则当

$$0<|\sigma_2|\ll|\sigma_1|\ll|\varepsilon_5|\ll|\varepsilon_4|\ll\cdots\ll|\varepsilon_1|$$

时,(18.45)有七个不同的非零实周期解。

这一定理给文献[18.9]§ 3 中所提出的问题以肯定的答复,即"$\mathscr{C}_{2n,1}$ 中的方程能有多于 $n+3$ 个非零实周期解",因为定理 18.8 说明了 $\mathscr{C}_{6,1}$ 能有 7 个这种周期解。

令人更感兴趣的是 $\alpha(t)$ 与 $\beta(t)$ 为 $\cos t$, $\sin t$ 的多项式的情况。在本节开始时已提到:方程 (18.2) 可借极坐标变换和变换(18.5)化成(18.1)的形式,其中 $A(\theta)$ 与 $B(\theta)$ 分别是 $\cos t$、$\sin t$ 的齐 $2(n+1)$ 次和 $n+1$ 次多项式。注意:现在应取 $\omega=2\pi$。当(18.1)中的 $\rho$ 被看成复变量 $z$ 时,不但复周期解成对出现,而且实周期解也成对出现。这是因为 $A(\pi+\theta)=A(\theta)$, $B(\pi+\theta)=-B(\theta)$, $C(\theta)=$ 常数。因此,当 $\varphi(\theta)$ 是一实周期解时,$-\varphi(\theta+\pi)$ 也是一个实周期解,且重数也相同。注意:当 $0<|\lambda|\ll 1$ 时,$\rho=0$ 是(18.1)的一重周期解,可知 $\rho=0$ 作为 (18.1) 的周期解其重数 $\mu_{\max}$ 必为奇数,且由系数的小扰动最多,只能得到 $\frac{1}{2}(\mu_{\max}-1)$ 个正的实周期解,它相当于(18.2)的极限环。

应用与前面所述类似的方法,假设(18.30)中的 $\alpha(t)$、$\beta(t)$ 分别是 $\cos t$、$\sin t$ 的 $2k$ 次与 $k$ 次齐次多项式,在[18.7]中证明了:当 $k=1, 2, 3$ 时,$\mu_{\max}=5, 5, \geqslant 7$。从而

$$\frac{1}{2}(\mu_{\max}-1)=2, 2, \geqslant 3. \tag{18.46}$$

但对于由二次多项式系统化来的方程 (18.30) 由原点最多只能分支出三个极限环,即这时应有 $\mu_{\max}=7$。一个有趣的问题是:当 $k=3$ 时 $\mu_{\max}=$? 在文献 [18.7] 中没有能解决这个问题,因为在定理18.2 中作者只算到 $\eta_8$。

奇怪的是:如果研究 $\alpha$、$\beta$ 都是 $\cos t$、$\sin t$ 的齐 $k$ 次多项式的方程(18.30),则在[18.7]中算出了:当 $k=1, 2, 3$ 时,

$$\mu_{\max}=4, 4, \geqslant 8. \tag{18.47}$$

由此我们有理由猜想,在(18.46)中若 $k=3$,可能会有:

$$\frac{1}{2}(\mu_{\max}-1)\geqslant 4 \quad 或 \quad \mu_{\max}\geqslant 9.$$

我们前面已看到定理 18.4 是一个很好的判定中心存在的定理。下面再用它导出一个判别方程(18.2)是否存在中心的定理。

定理 18.9 记 $\Delta(x, y)=\dfrac{\partial P_n}{\partial x}+\dfrac{\partial Q_n}{\partial y}$, $n$ 为奇数,如果存在一常数 $k\neq n+1$, 使

$$\Delta(x, y)=k(xP_n+yQ_n) \tag{18.48}$$

在 $x^2+y^2=1$ 上成立,则 $O(0, 0)$ 是

$$\dot{x}=y+P_n(x, y), \quad \dot{y}=-x+Q_n(x, y) \tag{18.49}$$

的中心。如果 $k=n+1$, 又

$$\int_0^{2\pi}\Delta(\cos t, \sin t)dt=0, \tag{18.50}$$

则 $O$ 也是(18.49)的中心。

证 记

$$P_n(x, y)=\sum_{i=0}^{n}p_ix^{n-i}y^i, \quad Q_n(x, y)=\sum_{i=0}^{n}q_ix^{n-i}y^i.$$

已知在和(18.49)对应的方程(18.30)中有

$$\alpha=-(n-1)fg, \quad \beta=g'-(n-1)f,$$

$$\text{而}\quad \begin{aligned} g(t)&=\sum_{i=0}^{n}(q_i\cos^{n-i+1}t\sin^it-p_i\cos^{n-i}t\sin^{i+1}t),\\ f(t)&=\sum_{i=0}^{n}(p_i\cos^{n-i+1}t\sin^it+q_i\cos^{n-i}t\sin^{i+1}t). \end{aligned} \tag{18.51}$$

不难算出:

$$\begin{aligned} g'(t)&=\Delta(\cos t, \sin t)-(n+1)f(t)\\ &=kf(t)-(n+1)f(t)=(k-n-1)f(t). \end{aligned} \tag{18.52}$$

故若 $k\neq n+1$, 则

$$\alpha(t)=\frac{1-n}{k-n-1}g(t)g'(t), \quad \beta(t)=\frac{k-2n}{k-n+1}g'(t).$$

在定理 18.4 中取 $\sigma=g$ 即得定理的证明。

其次,若 $k=n+1$, 则 $g(t)=c$ 为常数,故

$$\alpha=-c(n-1)f(t), \quad \beta=-(n-1)f(t).$$

由(18.52)，注意：$n$ 为奇数，可知

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\int_0^{2\pi} \Delta(\cos t,\ \sin t)\,dt = 0.$$

这时可在定理 18.4 中取 $\sigma = \int f$[1]，它满足 $\sigma(2\pi) = \sigma(0)$。定理证毕。 ▮

由于(18.48)式在 $x^2+y^2=1$ 上成立等价于：

$$(x^2+y^2)\left(\frac{\partial P_n}{\partial x} + \frac{\partial Q_n}{\partial y}\right) = k(xP_n + yQ_n) \tag{18.53}$$

对一切 $x$, $y$ 成立，故上式可用来确定 $P_n$ 与 $Q_n$ 的系数之间的一些关系式以保证 $O$ 是(18.49)的中心。

例如对二次系统：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + Ax^2 + (B+2D)xy + Cy^2, \\ \dot{y} &= -x + Dx^2 + (B-2A)xy - Dy^2, \end{aligned} \tag{18.54}$$

由(18.53)可得：

$$E - kA = (1-k)B - 3kD = 2kA + (1-k)E - kC = B + kD = 0.$$

消去 $k$，可得三组使 $O$ 成为(18.54)的中心的充分条件：

1) $B = E = 0$；

2) $A + C = E - 4A = B + 4D = 0$；

3) $B = D = 3A - E - C = 0,\ A \neq 0$。

当然，1) 就相当于 $P_n \equiv Q_n \equiv 0$ 或 $k=0$，而 2) 与 3) 则比熟知的条件为强。

由定理 18.4 还可推出下面推广了的对称原理：

**定理 18.10**　设对于方程(18.49)存在常数 $a$, $b$, $a^2+b^2=1$，使

$$\begin{aligned} P_n(x,\ y) &= -bP_n(bx+ay,\ ax-by) - aQ_n(bx+ay,\ ax-by), \\ Q_n(x,\ y) &= -aP_n(bx+ay,\ ax-by) + bQ_n(bx+ay,\ ax-by). \end{aligned} \tag{18.55}$$

---

1) 定理 18.4 中 (18.39)内的 $f$、$g$ 不是这里的 $f$、$g$，现在取前者为 $c(1-n)$，$1-n$。

则必存在 $\theta$，使在对应的方程(18.30)中有

$$\alpha(\theta-t)=-\alpha(t),\ \beta(\theta-t)=-\beta(t). \tag{18.56}$$

故由定理 18.4 的推论 18.4 知道 $O$ 是(18.49)的中心。

**证** 取 $\theta$ 使 $a=\sin\theta$, $b=\cos\theta$. 记

$$\xi=a\sin t+b\cos t=\cos(\theta-t),\quad \eta=a\cos t-b\sin t=\sin(\theta-t),$$

则由(18.55)有：

$$\begin{aligned}f(\theta-t)&=\xi P_n(\xi,\eta)+\eta Q_n(\xi,\eta)\\&=\cos t[bP_n(\xi,\eta)+aQ_n(\xi,\eta)]\\&\quad+\sin t[aP_n(\xi,\eta)-bQ_n(\xi,\eta)]\\&=-\cos tP_n(\cos t,\sin t)-\sin tQ_n(\cos t,\sin t)\\&=-f(t),\end{aligned}$$

类似地可证 $g(\theta-t)=g(t)$。从而

$$\begin{aligned}\alpha(\theta-t)&=-(n-1)f(\theta-t)g(\theta-t)=(n-1)f(t)g(t)\\&=-\alpha(t),\\\beta(\theta-t)&=-g'(\theta-t)-(n-1)f(\theta-t)\\&=g'(t)+(n-1)f(t)=-\beta(t).\end{aligned}$$

即(18.56)式成立，定理证毕。▌

仿定理 18.9 与定理 18.10，对于方程：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y+(x^2+y^2)^mP_n(x,y),\\\dot{y}&=-x+(x^2+y^2)^mQ_n(x,y),\end{aligned} \tag{18.57}$$

可以证明有以下定理成立：

**定理 18.11** 设定理 18.9 中的条件成立，则对一切正整数 $m$, $O(0,0)$ 是(18.57)的中心。又若存在 $\theta$，使

$$f(\theta-t)=-f(t),\quad g(\theta-t)=g(t),$$

则 $O$ 是(18.57)的中心，这里 $f$、$g$ 仍由(18.4)式确定。(证明略)

在文献[18.8]中作者们研究了方程：

$$\dot{z}=z^4+\alpha(t)z^3+\beta(t)z^2+\gamma(t)z. \tag{18.58}$$

如前，当 $z=0$ 是重数高于 1 的解时，不妨改为研究

$$\dot{z}=z^4+\alpha(t)z^3+\beta(t)z^2. \tag{18.59}$$

当 $\alpha$、$\beta$ 都是 $t$ 的 $k$ 次多项式时，(18.59)曾在文献[18.10]中

被研究过.其中猜想:"$z=0$最多只能是 $k+3$ 重零点".文献[18.8]中宣布这个猜想对 $k=2, 3, 4$ 都是不对的，但 $k=3, 4$ 时的证明未见给出。

当 $\alpha$、$\beta$ 为 $\cos t$、$\sin t$ 的齐 $k$ 次多项式时，[18.8]中证明了：若 $k=1, 2$ 或 3，则 $z=0$ 的重数是 6, 6, 或 $\geqslant 8$。此外，对

$$\dot{z}=z^4+\alpha(t)z^3+\beta(t)z^2+\sigma z \tag{18.60}$$

(其中 $\alpha$、$\beta$ 是 $\sin t$、$\cos t$ 的非齐二次多项式，含五个小参数 $\varepsilon_1$，…，$\varepsilon_5$；$\sigma$ 也是小参数)，在[18.8]中证明了(18.60)可以有八个不同的实周期解。这比(18.21)式前的第13条所得的结果更好。注意：早在文献[18.11]中 Pliss 曾猜想方程(18.60)可能会有多于4个的周期解。[18.8]中所用的方法与[18.7]中基本上一样，故此处对其证明细节从略。

由本节所介绍的这些内容可以看出，研究有实周期的复值解是一个很有意义的课题，值得读者在这一领域作进一步的探索。

## 参 考 文 献


[18.1] Coll B, Gasull A and Llibre J. Some theorems on the existence, uniqueness and non-existence of limit cycles for quadratic systems, J. Diff.Eqs.67(1987), 372～399.

[18.2] Carbonell M and Llibre J. Limit cycles of a class of polynomial systems, Proc.Roy.Soc.Eding.109A(1988), 187～199.

[18.3] Gasull A and Llibre J. Limit cycles for a class of Abel equations(to appear in SIAM J.Math.Anal.)

[18.4] Lloyd N G.The number of periodic solutions of the equation $\dot{z}=z^N+p_1(t)z^{N-1}+\cdots+p_N(t)$, Proc.Lond.Math.Soc.27(1973), 667～700.

[18.5] Lloyd N G. On a class of differential equations of Riccati type, J.Lond.Math.Soc.(2), 10(1975), 1～10.

[18.6] Lloyd N G. Small amplitude limit cycles of polynomial differential equations, Ord. Diff.Eqs.and Oper., Lect.Notes in Math.v.1032(1982), 346～357.

[18.7] Alwash M A M and Lloyd N G. Non-autonomous equations related to polynomial two-dimensional systems, Proc. Roy. Soc. Eding. 105A(1987), 129～152.

[18.8] Alwash M A M and Lloyd N G. Periodic solutions of a quartic nonautonomous equation, Nonl. Anal, Theo, Meth. Appl. v. 11 (1987), no. 7, 809~820.

[18.9] Lins Neto A. On the number of solutions of the equation $\frac{dx}{dt}=\sum_{i=0}^{n} a_i(t)x^i$, $0\leqslant t\leqslant 1$, for which $x(0)=x(1)$, Invent. Math. v. 59 (1980), 67~76.

[18.10] Shahshahani S. Periodic solutions of polynomial first order differential equations, Nonlinear Analysis 5, (1981), 157~165.

[18.11] Pliss V A. Nonlocal Problems in the theory of nonlinear oscillations, Acad. Press, New York, 1966.

[18.12] Massera J L. Observacions sobre las solucions periodicas de ecuaciones diferenciales, Publ. Inst. Mat. y Ectod. Fac. Ing. Montevideo 2 (1950), 43~51.

[18.13] 谢向东、秦遂林。Abel 方程极限环的个数及应用(预印本,1993)。

# §19. 二次系统的无限大分界线环

关于实$n$次多项式系统的极限环有一个古老而著名的难题，即Hilbert第16问题的后半部："对于一切$n$次实多项式系统：

$$\dot{x}=P_n(x, y),\quad \dot{y}=Q_n(x, y) \qquad (*)$$

是否存在一个只依赖于$n$的正整数$N(n)$，使$(*)$的极限环的个数$\leqslant N(n)$？"H.Dulac在1923年的长篇论文[19.1]中证明了：对于一个确定的方程(1)，它的极限环个数总是有限的。1984年Yu. S.Il'yashenko[19.2]对文献[19.1]中的一个主要结论给出了反例。从而使Dulac的结论成为悬案。在文献[19.2]中又证明了：每一$R^2$中的解析向量场(以多项式系统作为特例)的分界线环假设其上的奇点都是双曲鞍点，则此分界线环的内部邻近如果不是充满着闭轨的话，最多只能存在有限个极限环。"奇点都是双曲鞍点"的条件后来在文献[19.3]和[19.4]中被取消了。这样，人们总算证明了：对于任一给定的$n$次实多项式系统$(*)$，它的极限环个数必定是有限的。但[19.2]、[19.3]、[19.4]都是在复域中论证的，而且后两文章很长而又难读。当然，以上的结论距离Hilbert第16问题的解决还很远。有待人们作更多的努力。

如果转而研究$n=2$即实二次多项式系统，那末近年来还有更多的工作。在[19.5]中证明了：二次系统的极限环个数是通有地有限的。在[19.6]中证明了：二次系统在平面有界闭域中最多只能有有限个极限环。如前所述，这问题归结为证明："分界线环内部邻近最多只能存在有限个极限环"。[19.6]把有界分界环分为三类：其上含有三个奇点，两个奇点或一个奇点，分别进行研究。实际上，在含三个奇点的情况[19.11]早已证明了：分界环必

为三角形，内部有一族闭轨和一个中心[1)]。在只含一个奇点的情况，Dulac 原来的证明是对的，[19.6] 中只是另外给出一个较为简单的证明而已，因此[19.6]的功绩仅在于证明了：其上含两个奇点(由 §7 知道它们或是两个都是鞍点，或是一为鞍点，一为鞍结点) 的有界分界线环 $\Gamma$ 内部邻近若不是充满闭轨的话，则最多只能有有限个极限环。证明方法主要是研究发散量沿着极限环的积分，证明它是定号的。证明过程中必须用到 $\Gamma$ 上有一段是直线。但是在[19.11]中早已经证明了：$\Gamma$ 上必有一部分是直线解，而此时极限环若存在，必定是唯一的(见本书 §9)。所以我们也不拟再介绍[19.6]的证明细节了。但在这里我们仍要提出一个值得思考的问题，即：能否用[19.6]的方法证明：当分界线环上只含两个奇点，但它们都是无限远奇点时，如果它的内部邻近不是充满着闭轨，则最多只能有一个极限环。读者在看完这一节以后当会看出这一猜想是有一定道理的。文献[19.7]、[19.8]、[19.9]、[19.10]、[19.20] 研究的都是二次系统无限分界线环内部邻近极限环个数的有限性问题。虽然其中有的文章要依靠文献[19.2]的定理，有的则证明不够清楚，但和[19.6]合在一起可以说已经能给二次系统极限环个数的有限性一个实域证明了。由于篇幅太多，故亦从略。有兴趣的读者可以去读原文。

本节主要介绍文献[19.13]和 [19.14]，其目的是：除了想给二次系统无限分界线环内部邻近极限环个数的有限性以另一实域证明以外，还希望探讨是不是可以得到更好的结果，即：能不能证明当存在无限大分界线环时，极限环最多只能有一个？我们的研究方法和[19.7]不同，且充分利用了已知的关于二次系统不存在极限环或极限环唯一的许多结果。

由 §2 已证的那些性质可知，二次系统若存在无限大分界线

---

1) 注意，若其中一奇点趋于无限远，则过此奇点的二直线成为平行直线，而三角形内部的中心亦趋于无限远。例如 $\dot{x}=x(1-x)$，$\dot{y}=y(-1+2x)$ 有由 $\{x=0, y>0\}$、$\{x=1, y>0\}$ 和 $\{0<x<1, y=0\}$ 构成的分界环，其内部有以 $(0, 1, 0)$ 为顶点的椭圆域。

环，则它们只能是如图 19.1 所示的那五种：

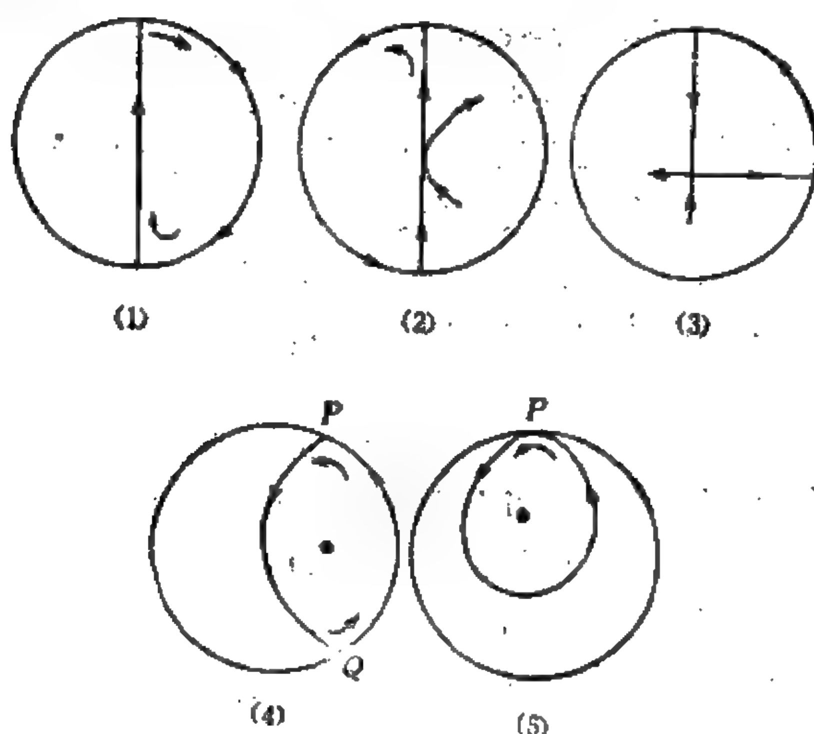



图 19.1

但图 19.1 的(1)、(2)、(3)三种情况下都必存在至少一条积分直线，因而极限环若存在，必为唯一。可以不必讨论。对于图19.1的(4)，$P$ 与 $Q$ 或都是鞍点，或一为鞍点一为鞍结点，或都是鞍结点。又赤道上的劣弧 $\widehat{PQ}$ 应不再含有其他奇点，否则，沿着这个无限分界环就不存在返回映射，即其内部邻近不可能存在极限环。这样，假设在 $P$、$Q$ 两点的特征根分别为 $(\lambda_1^{(1)}、\lambda_2^{(1)})$ 和 $(\lambda_1^{(2)},\ \lambda_2^{(2)})$，则当 $\lambda_1^{(1)}>0,\ \lambda_2^{(1)}<0$ 时，应有 $\lambda_1^{(2)}\leqslant 0,\ \lambda_2^{(2)}\geqslant 0$，这时如果

$$\lambda_1^{(1)}\lambda_2^{(2)}\neq\lambda_2^{(1)}\lambda_1^{(2)},\qquad(19.1)$$

则可由熟知的判别法(见文献[19.15]§3)确定分界线环的内稳定性，故在其小邻域内不存在极限环。但若 (19.1) 中等式成立(称为临界情况)，则分界线环内部邻近是否存在极限环？如果存在的话，是否只有有限个？这些问题都有待进一步去分析研究了。仿此，图 19.1(5) 可以作为图 19.1(4) 的特殊情况来看待，当然这时 (19.1) 中必有等式成立。又在研究这问题时，显然可设二次系统

在有限远处至少存在一个指标为 $+1$ 的初等奇点。否则，它也不会有极限环。故不妨设二次系统有方程：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\\ \dot{y} &= x(1+ax-y)\ (a<0).\end{aligned}\tag{19.2}$$

这里已设 $\delta\neq0$，并已把它取为 $-1$。(19.2) 属于所谓(Ⅲ)类方程。对于(Ⅰ)及(Ⅱ)类方程以后再研究。

我们的主要问题是：在什么时候(19.2)存在临界情况下的无限大分界线环 (infinite separatrix cycle in the critical case, 简记为 ISCCC)？

**定义**　两个无穷远奇点 $P$ 与 $Q$ (有可能 $P=Q$) 称为*弱无穷远奇点对* (weak infinite critical points pair, 简记为 WICPP)，如果(19.2)在这两点处的特征根使(19.1)中等式成立（即它们有可能成为 ISCCC 上的两个奇点）。

下面先研究(19.2)存在 WICPP 所应满足的条件。把(19.2)化成齐次坐标，得到：

$$\begin{cases}z\dot{x}-x\dot{z}=-yz+\delta xz+lx^2+mxy+ny^2,\\ z\dot{y}-y\dot{z}=xz+ax^2-xy.\end{cases}\tag{19.3}$$

令 $x=1$，$\dfrac{dt}{d\tau}=z$，得到：

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{d\tau}=z(-l-\delta z-my+yz-ny^2),\\[2ex] \dfrac{dy}{d\tau}=a+z-(l+1)y-\delta yz-my^2+y^2z-ny^3.\end{cases}\tag{19.4}$$

所以无穷远奇点 $A_i(1,y_i,0)$ 的 $y$ 坐标应满足三次方程：

$$ny^3+my^2+(1+l)y-a=0.\tag{19.5}$$

当 $n=0$ 时，(19.5)有一无穷大根，其对应的奇点是 $(0,1,0)$。

易见(19.4)在奇点 $(1,y_i,0)$ 的两特征根为：

$$\lambda_1^{(i)}=-l-my_i-ny_i^2,\quad \lambda_2^{(i)}=-1-l-2my_i-3ny_i^2.\tag{19.6}$$

注意：(4)在奇点 $(-1,-y_i,0)$ 的两特征根为 $-\lambda_1^{(i)}$ 与 $-\lambda_2^{(i)}$。又公式(19.6)对奇点 $(0,1,0)$ 不适用。

今后不妨设 $A_1(1,\ y_1,\ 0)$ 与 $A_2(1,\ y_2,\ 0)$ (或 $A_2'(-1,\ -y_2,\ 0)$) 构成 WICPP，在前一情况 $A_1$ 与 $A_2$ 相邻，即在赤道上的劣弧 $\widehat{A_1A_2}$ 上别无奇点；在后一情况 $A_1$ 与 $A_2'$ 相邻。由前知应有以下条件成立：

$$\frac{\lambda_1^{(1)}}{\lambda_2^{(1)}}=\frac{\lambda_1^{(2)}}{\lambda_2^{(2)}}\ (=k)。\tag{19.7}$$

更准确地说，当 $\lambda_1^{(1)}\lambda_1^{(2)}<0$ 时，$A_1$ 与 $A_2$ 相邻，当 $\lambda_1^{(1)}\lambda_1^{(2)}>0$ 时，$A_1$ 与 $A_2'$ 相邻，且构成 WICPP。

当 $k\neq0$ 为有限数时，应有 $k<0$。因若 $k>0$，则 $A_1$ 与 $A_2$ 都是结点，不可能成为 WICPP。

以 (19.6) 代入 (19.7)，可得两个关系式：

$$\frac{l+my_1+ny_1^2}{1+l+2my_1+3ny_1^2}=\frac{l+my_2+ny_2^2}{1+l+2my_2+3ny_2^2}=k,\tag{19.8}$$

$$(y_1-y_2)\left[mny_1y_2+n(2l-1)(y_1+y_2)+m(l-1)\right]=0。\tag{19.9}$$

由 (19.8) 可知 $y_1$ 与 $y_2$ 应是同一个二次方程：

$$n(1-3k)y^2+m(1-2k)y+l(1-k)-k=0\tag{19.10}$$

的两个根。当 $k=0$ 时，(19.10) 退化为：

$$ny^2+my+l=0;\tag{19.11}$$

当 $k=-\infty$ 时，(19.10) 退化为：

$$3ny^2+2my+l+1=0。\tag{19.12}$$

类似地，在 $(x,\ 1,\ z)$ 坐标系下 (19.3) 成为：

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{d\tau}=z(x-ax^2-xz),\\[2ex]\dfrac{dx}{d\tau}=n-z+mx+\delta xz+(l+1)x^2-x^2z-ax^3。\end{cases}\tag{19.13}$$

奇点 $(x_i,\ 1,\ 0)$ 的 $x$ 坐标应满足方程：

$$ax^3-(l+1)x^2-mx-n=0。\tag{19.14}$$

当 $a=0$ 时，(19.14) 有一无穷大根，其对应的奇点是 $(1,\ 0,\ 0)$。

(19.13) 在 $(x_i,\ 1,\ 0)$ 的两个特征根为：

$$\rho_1^{(i)}=-ax_i^2+x_i,\quad \rho_2^{(i)}=-3ax_i^2+2(l+1)x_i+m。\tag{19.15}$$

如前，$(x_1, 1, 0)$与$(x_2, 1, 0)$（或$(-x_2, -1, 0)$）成为WICPP的条件是：

$$\frac{x_1 - ax_1^3}{-3ax_1^2 + 2(l+1)x_1 + m} = \frac{x_2 - ax_2^3}{-3ax_2^2 + 2(l+1)x_2 + m} = g, \tag{19.16}$$

$$(x_1 - x_2)[a(2l-1)x_1x_2 + ma(x_1 + x_2) - m] = 0. \tag{19.17}$$

令$x_i = \frac{1}{y_i}$，则由(19.15)可得：

$$\rho_1^{(i)} = \frac{y_i - a}{y_i^3}, \quad \rho_2^{(i)} = \frac{my_i^2 + 2(l+1)y_i - 3a}{y_i^2}. \tag{19.18}$$

由(19.16)可得：

$$\frac{y_1 - a}{my_1^2 + 2(l+1)y_1 - 3a} = \frac{y_2 - a}{my_2^2 + 2(l+1)y_2 - 3a} = g. \tag{19.19}$$

由(19.17)可得：

$$(y_1 - y_2)[a(2l-1) + ma(y_1 + y_2) - my_1y_2] = 0. \tag{19.20}$$

由(19.19)可知$y_1$与$y_2$应同是二次方程：

$$mgy^2 + [(2l+2)g - 1]y + a(1-3g) = 0 \tag{19.21}$$

的根。当$g = 0$时，(19.21)退化为

$$y - a = 0; \tag{19.22}$$

当$g = -\infty$时，(19.21)退化为

$$my^2 + (2l+2)y - 3a = 0. \tag{19.23}$$

当$A_1$与$A_2$（或$A_2'$）构成WICPP时，(19.10)与(19.21)应是同一个方程，故必有：

$$\frac{n(1-3k)}{mg} = \frac{n(1-2k)}{2(l+1)g - 1} = \frac{l(1-k) - k}{a(1-3g)}. \tag{19.24}$$

由此可解出：

$$\begin{cases} k = \dfrac{an(1-2l) + am^2 + ml}{3an(1-2l) + 2am^2 + ml + m}, \\ g = \dfrac{n(am + 2l - 1)}{3amn + 2n(1+l)(2l-1) - m^2(l-1)}. \end{cases} \tag{19.25}$$

另一方面，由$y_1$或$y_2$是(19.5)的根，不难由$k$的表达式

(19.8) 和 $g$ 的表达式(19.19)看出，应有 $k=g$。故由(19.25)式可导出方程(19.2)有 WICPP 的必要条件是：

$$m^3na^2+m^4a(1-l)-3m^2nal(1-2l)+n^2a(1-2l)^2+mn(1+l)(1-2l)^2+m^3l(1-l)=0. \tag{19.26}$$

又以(19.25)代入(19.10)可得 $y_1$ 与 $y_2$ 所应满足的二次方程为：

$$mn(ma+2l-1)y^2-m[m(1-l)+na(1-2l)]y+a[m^2(1-l)+n(1-2l)^2]=0. \tag{19.27}$$

**注 19.1**　由(19.9)与(19.20)可知 $u=y_1+y_2$，$v=y_1y_2$ 应同时满足两个方程：

$$\begin{aligned} mnv+n(2l-1)u+m(l-1)&=0,\\ mv-mau-a(2l-1)&=0. \end{aligned} \tag{19.28}$$

由此解出 $u$ 与 $v$，一起代入(19.5)的根与系数的关系式：

$$\frac{a}{nv}+\frac{m}{n}+u=0.$$

所得结果仍是(19.26)式。

**注 19.2**　有趣的是，在条件(19.26)之下可以证明(19.5)的第三个解是：

$$y_3=\frac{na(2l-1)-m(ma+l)}{n(ma+2l-1)}. \tag{19.29}$$

**注 19.3**　由于(19.26)中不含 $\delta$，而 $\delta$ 变动时，(19.2)的分界线要转动。故知(19.2)存在 WICPP 时不一定存在 ISOCO。

**注 19.4**　在文献[19.12]中讨论无限分界线环内部邻近是否只存在有限个极限环的问题时，最后归结为研究方程：

$$\begin{aligned} \dot{x}&=1+xy,\\ \dot{y}&=Q_2(x,y)=\delta+\alpha x+\beta y+l'x^2+m'xy+n'y^2 \end{aligned} \tag{19.30}$$

在条件：

$$l'<0,\ 0<n'<1,\ D=l'(n'-1)(2n'+1)^2-m'^2(n'+1)n'=0 \tag{19.31}$$

之下的同一问题。易见这里的条件 $D=0$ 相当于 $a=0$ 时的条件(19.26)。但 $D=0$ 并不是(19.26)的特殊情况，只是因为(19.30)

的第一个方程中不出现 $x^2$ 项，所以对应的方程(19.26)就有了简单得多的形式。

总结以上结果可得如下定理：

**定理 19.1** 设 $A_1(1, y_1, 0)$ 与 $A_2(1, y_2, 0)$ 是 (19.2) 的两个无穷远奇点，且 (19.2) 中 $an \neq 0$。则 $A_1$ 与 $A_2$ (或 $A_2'$) 构成 WIOPP 的充要条件是(19.26)式成立，这时 $y_1$、$y_2$ 应是二次方程 (19.27) 的两个根。

下面的问题是要在 WIOPP 存在的条件下研究 ISOOO 是否存在。先看两个特殊情况：

I) $g = k = 0$

由(19.11)与(19.22)看出这时 $y_1$ 与 $y_2$ 应是

$$y - a = 0 \quad 与 \quad l + my + ny^2 = 0 \tag{19.32}$$

的根，即：

$$y_1 = y_2 = a \ (从而\ A_1 = A_2), \quad l + ma + na^2 = 0。\tag{19.33}$$

现在如果 $3na^2 + 2ma + l + 1 = 0$，则 $a$ 是 (19.5) 的重根，与 (19.33) 的第二方程联立，可解出：

$$m = \frac{1 - 2l}{a}, \quad n = \frac{l - 1}{a^2}。\tag{19.34}$$

这一情况留待以后再讨论。

若 $3na^2 + 2ma + l + 1 \neq 0$，则 $a$ 是(19.5)的单根。但 (19.33) 的第二方程说明(19.2)的两等倾线交于无限远奇点 $P(1, a, 0)$，故 $P$ 是一 Bendixson 型的鞍结点，因为对于它有 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 \neq 0$。显见这时不可能存在图 19.1(5) 所示的分界线环。

**注 19.5** 如果这时 (19.5) 有另外两个无穷远单奇点 $Q_1$ 与 $Q_2$，则它们的两个特征根都不等于零。故 $P$ 与 $Q_i$ 也不能构成 WIOPP；如果 $Q_1 = Q_2$ 为一个二重奇点，则对它有 $\lambda_1 \neq 0$，$\lambda_2 = 0$，故 $P$ 和它仍不能构成 WIOPP。

II) $g = k = -\infty$

由(19.12)与(19.23)看出，现在应有：

$$\frac{3n}{m}=\frac{2m}{2l+2}=\frac{l+1}{-3a},\tag{19.35}$$

从而

$$m=-\frac{(l+1)^2}{3a},\quad n=\frac{(l+1)^3}{27a^2}.\tag{19.36}$$

而(19.2)成为：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y+\delta x+lx^2-\frac{(l+1)^2}{3a}xy+\frac{(l+1)^3}{27a^2}y^2,\\ \dot{y}&=x(1+ax-y).\end{aligned}\tag{19.37}$$

(19.37) 有唯一的无穷远奇点 $A\left(1,\ \frac{3a}{1+l},\ 0\right)$[1]，$\frac{3a}{1+l}$ 是(19.5)的三重根。$A$ 点的两个特征根是

$$\lambda_1=\frac{2-l}{3},\quad \lambda_2=0.$$

当 $l\neq 2$ 时，$A$ 是 Bendixson 型奇点，图 19.1(5) 型的分界环不可能存在。若 $l=2$，则 (19.37) 成为：

$$\dot{x}=-y+\delta x+\frac{(2ax-y)(ax-y)}{a^2},\quad \dot{y}=x(1+ax-y).\tag{19.38}$$

对于它，$P_x+Q_y=\delta+3x-\frac{3}{a}y$ 的一次项除得尽 $P$ 与 $Q$ 的二次项部分。故由 §9 定理 9.10 知道 (19.38) 最多只能有一个极限环。我们的主要问题已得到解决。至于过 $A$ 的图 19.1(5) 型的分界环是否可能存在，其稳定性如何，则待进一步分析。

在研究 $0>k>-\infty$ 的一般情况以前，我们先用一个具体的例子来说明如何由旋转向量场理论来获得一个 ISOOO，它具有图 19.1(4) 的形状。

由文献[19.16] 知二次系统以双曲线 $xy=1$ 为积分线的充要条件是：它可以写成如下的形式：

$$\begin{cases}\dot{x}=\alpha_1(xy-1)+\beta_1+\beta_2x+\beta_3x^2,\\ \dot{y}=\alpha_2(xy-1)-\beta_3-\beta_2y-\beta_1y^2.\end{cases}\tag{19.39}$$

1) 借此可验证这时 (19.29) 中的 $v_3=\frac{3a}{1+l}$。

为使 $xy=1$ 是一个 ISOCO，它不能经过有限远奇点，故必须 $\beta_2^2-4\beta_1\beta_3<0$。(19.39) 的无穷远奇点和相应的特征根是：

$$
\begin{aligned}
&A_1(1,\ 0,\ 0),\ \lambda_1^{(1)}=-\beta_3,\ \lambda_2^{(1)}=\alpha_2-\beta_3;\\
&A_2(0,\ 1,\ 0),\ \lambda_1^{(2)}=\beta_1,\ \lambda_2^{(2)}=\alpha_1+\beta_1;
\end{aligned}
\tag{19.40}
$$

$$
A_3\left(1,\ \frac{\alpha_2-\beta_3}{\alpha_1+\beta_1},\ 0\right),\ \lambda_1^{(3)}=\frac{-\beta_1\beta_3-\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\beta_1},
$$

$$
\lambda_2^{(3)}=-\alpha_2+\beta_3.
$$

今设

$$
\beta_3>\beta_1>0,\ \alpha_2-\beta_3>0,\ \alpha_1+\beta_1<0,\ \alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_3=0. \tag{19.41}
$$

则 $A_1$ 与 $A_2$ 为鞍点，且

$$
\frac{\lambda_1^{(1)}}{\lambda_2^{(1)}}=\frac{\lambda_1^{(2)}}{\lambda_2^{(2)}}<0. \tag{19.42}
$$

故 $A_1$ 与 $A_2$ 构成一 WIOPP，且因 $\frac{\alpha_2-\beta_3}{\alpha_1+\beta_1}<0$，故 $A_3$ 不在赤道的 $\widehat{A_1A_2}$ 劣弧上。这样，$xy=1$ 的上支，$\widehat{A_1A_2}$ 与 $A_1$、$A_2$ 一起构成一 ISOCC $\Gamma$。但现在 (19.39) 有一条积分直线：

$$
\overline{A_3A_3'}:\ y=\frac{\alpha_2-\beta_3}{\alpha_1+\beta_1}\left(x+\frac{\beta_2}{\beta_3}\right). \tag{19.43}
$$

而 (19.39) 可经线性变换化为 $(\mathrm{I\!I})_{a=m=s=0}$ 类方程，因此是可积的[1]。即 $\Gamma$ 是中心区域的边界，不是通常理解的奇闭轨线。

为了得到一个有 ISOCO 的二次系统 (19.39)，我们应适当选取 (19.39) 中的 $\alpha_i$ 与 $\beta_i$，使 $A_1$ ($xy=1$ 的一端点) 与 $A_3$ (它位于赤道上的 $\widehat{A_1A_2}$ 劣弧上，但不在 $xy=1$ 上) 构成一 WIOPP，然后作一半平面旋转向量场族，使当参数变动时，无穷远奇点不动，但过 $A_1$ 与 $A_3$ 的分界线则旋转而相互接近，最后彼此重合而与赤道上的 $\widehat{A_1A_3}$ 一起形成一 ISOCO。

**例 19.1** 考察[2]

1) 或由文献[19.15]中 §12 的 (12.21) 式知之。因为当 $\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_3=0$ 时，对 (19.39) 有 $W_1=W_2=W_3=0$。

2) 与 (19.39) 比较，(19.44) 中 $\alpha_1=-1$，$\alpha_2=3$，$\beta_1=2$，$\beta_2=\beta_3=1$，它们不满足 $\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_3=0$ 的条件，而直线 (19.43) 现在也不是 (19.44) 的积分直线。

$$\dot{x}=1-xy+2+x+x^2,\ \dot{y}=3(xy-1)-1-y-2y^2, \tag{19.44}$$

它的有限远奇点都是焦点，无穷远奇点为：

$$\begin{aligned}&A_1(1,\ 0,\ 0)\text{——鞍点；}\ \lambda_1^{(1)}=-1,\ \lambda_2^{(1)}=2;\\&A_2(0,\ 1,\ 0)\text{——不稳定结点；}\ \lambda_1^{(2)}=2,\ \lambda_2^{(2)}=1;\\&A_3(1,\ 2,\ 0)\text{——鞍点；}\ \lambda^{(3)}=1,\ \lambda_2^{(3)}=-2.\end{aligned} \tag{19.45}$$

故 $A_1$ 与 $A_3$($A_1'$ 与 $A_3'$) 构成 WIOPP, 但 $A_1$ 与 $A_2$($A_1'$ 与 $A_2'$) 在双曲线 $xy=1$ 的同一支上。又有限远奇点

$B_1\left(\frac{3}{2}(1+\sqrt{5}),\ 2(1+\sqrt{5})\right)$位于 $xy=1$ 的上支的右方；

$B_2\left(\frac{3}{2}(1-\sqrt{5}),\ 2(1-\sqrt{5})\right)$位于 $xy=1$ 的下支的左方。

对 (19.44) 作线性变换：

$$\begin{aligned}x&=\frac{3}{8}\Big[4(1+\sqrt{5})+\frac{4}{11}\sqrt{90+26\sqrt{5}}\,x'\\&\qquad-\frac{4}{11}(13+9\sqrt{5})y'\Big],\\y&=\frac{1}{2}\Big[4(1+\sqrt{5})-\frac{4}{11}\sqrt{90+26\sqrt{5}}\,x'\\&\qquad-\frac{4}{11}(13+9\sqrt{5})\,y'\Big],\end{aligned} \tag{19.46}$$

$$t=\frac{-2}{\sqrt{90+26\sqrt{5}}}\,t'.$$

仍记 $x'$, $y'$, $t'$ 为 $x$, $y$, $t$, 可得 II 类方程：

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+\dfrac{5(1+\sqrt{5})}{\sqrt{90+26\sqrt{5}}}x-\dfrac{12}{11}x^2-\dfrac{5\sqrt{45+13\sqrt{5}}}{11\sqrt{10}}xy\\\qquad+\dfrac{13+9\sqrt{5}}{22\sqrt{5}}y^2=F_1(x,\ y),\\\dot{y}=x\left(1-\dfrac{5\sqrt{10}}{11\sqrt{45+13\sqrt{5}}}x-y\right)=F_2(x,\ y).\end{cases} \tag{19.47}$$

(19.47) 有有限远奇点 $O(0,\ 0)$ 与 $N\left(0,\ \dfrac{22\sqrt{5}}{13+9\sqrt{5}}\right)$ 和无

穷远奇点：

$$P\left(1,\frac{5\sqrt{10}}{\sqrt{45+13\sqrt{5}}},0\right)——鞍点，\lambda_1^{(P)}=\frac{12}{11},\ \lambda_2^{(P)}=-\frac{24}{11},$$

$$Q\left(1,\frac{-\sqrt{10}}{\sqrt{45+13\sqrt{5}}},0\right)——鞍点，\lambda_1^{(Q)}=\frac{6}{11},\ \lambda_2^{(Q)}=-\frac{12}{11},\tag{19.48}$$

$$R\left(1,\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{45+13\sqrt{5}}},0\right)——不稳定结点.$$

全局相图如图 19.2。$P$ 与 $Q'$，$Q$ 与 $P'$ 分别构成 WICPP。

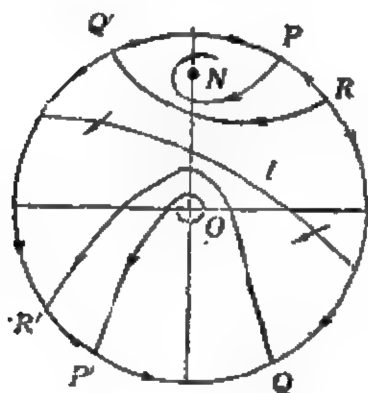


图 19.2

今引进以 $\delta$ 为参数的半平面旋转向量场族：

$$\dot{x}=F_1(x,y)+\delta x,$$
$$\dot{y}=F_2(x,y),\tag{19.49}$$

即当 $\delta$ 变动时，(19.49) 在直线

$$l:1-\frac{5\sqrt{10}}{11\sqrt{45+13\sqrt{5}}}x-y=0$$

的两侧半平面中分别构成旋转向量场族。当 $\delta$ 增大时，在 $l$ 的上(下)方向量场逆(顺)时针方向旋转，且一切无限远奇点都保持不动。故从 $P$ 出来的分界线与进入 $Q'$ 的分界线相互靠近，从而存在 $-\delta_0>0$，使当 $\delta=\delta_0$ 时，两分界线重合。这时就在上半平面得到一个无限分界线环。由(19.48) 中的特征根可以看出它是—ISCCC。不难看出，这样得到的 ISCCC 是内不稳定的。仿此，必存在 $-\delta_1<0$，使当 $\delta=\delta_1$ 时，(19.49) 在 $l$ 的下方有一内稳定的 ISCCC。注意：当 $\delta$ 变动时，$l$ 上可能会出现新的奇点。但它们不可能在如上所得到的 ISCCC 上。

对 $0>k>-\infty$，在很复杂的条件(19.26)或(19.31)之下，我们暂不讨论。下面我们先在两个简单而有趣的条件：

$$n\neq0,\quad m[ma-1+2l]=0\tag{19.50}$$

下来研究(19.2)的 ISOOO 的存在性问题。

因为已设 $a\neq 0$, 故若又有 $n\neq 0$, 则(19.5)没有零根和无穷大根。然后由 (19.50) 的第二式与 (19.27) 立刻看出：为了存在 WIOPP, 必须

$$
\begin{aligned}
&m[m(1-l)+na(1-2l)]=0,\\
&m^2(1-l)+n(1-2l)^2=0. \qquad (19.51)
\end{aligned}
$$

现在可以分成两种情况来讨论：

1) 若 $m\neq 0$, 则由(19.51) 有：

$$
m=\frac{1-2l}{a}, \quad n=\frac{l-1}{a^2}; \qquad (19.52)
$$

2) 若 $m=0$, 则必 $l=\dfrac{1}{2}$。

下面分别进行讨论：

I) $an\neq 0$, $m=\dfrac{1-2l}{a}$, $n=\dfrac{l-1}{a^2}$ [1]。

这时方程(19.2)成为：

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+\frac{1-2l}{a}xy+\frac{l-1}{a^2}y^2,\\
&\dot{y}=x(1+ax-y). \qquad (19.53)
\end{aligned}
$$

(19.53)有两个无穷远奇点：

$$
P(1,\ a,\ 0),\quad \lambda_1^{(P)}=\lambda_2^{(P)}=0;
$$

$$
Q\left(1,\ \frac{a}{l-1},\ 0\right),\ \lambda_1^{(Q)}=2-l,\ \lambda_2^{(Q)}=\frac{(l-2)^2}{1-l}.
$$

故 $P$ 为高阶奇点；当 $1<l<2$ 时, $Q$ 为鞍点；当 $l>2$ 或 $l<1$ 时, $Q$ 为结点；当 $l=2$ 时, $Q=P$；当 $l=1$ 时, $Q=(0,\ 1,\ 0)$, $\lambda_1^{(Q)}=1$, $\lambda_2^{(Q)}=\infty$ $\left(\text{或 } \rho_1^{(Q)}=0,\ \rho_2^{(Q)}=-\dfrac{1}{a}\right)$。所以只须研究是否存在形如

---

1) 这时 $g$ 的表达式(19.25) 成为 $\frac{0}{0}$, $k$ 的表达式也是 $\frac{0}{0}$。

图 19.1(5) 的 ISCCC，其上有奇点$P$以及形如图 19.1(4) 的 ISCCC，其上有奇点$P$与$Q$。但与 (19.37) 一样，对 (19.53) 也有

$$P_x+Q_y=\delta+(2l-1)x+\frac{1-2l}{a}y.$$

它的一次项可以除尽$P$、$Q$的二次项，故极限环若存在必为唯一。在文献[19.13]中还证明了如下的事实：包向有限远非鞍点$O(0, 0)$或$N\left(0, \frac{a^2}{l-1}\right)$（当$0<n<1$）的分界线必来自有限远鞍点，故 ISCCC 不可能存在。由于极限环的唯一性已经有保证，上述事实的证明在此从略。

Ⅳ) $an\neq0$, $m=0$, $l=\frac{1}{2}$, 从而$n=-\frac{1}{2a^2}$。

这时 (19.2) 成为：

$$\dot{x}=-y+\delta x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2a^2}y^2,\ \dot{y}=x(1+ax-y). \tag{19.54}$$

而$P_x+Q_y=\delta$，故 (19.54) 或是有中心（当$\delta=0$）或是无闭轨与奇闭轨（当$\delta\neq0$），ISCCC 的问题可不必讨论。

下面再讨论$n=0$的情况。

Ⅴ) $a\neq0$, $n=0$

这时至少存在一个无穷远奇点$B_1(0, 1, 0)$，其特征根为$\rho_1^{(1)}=0$, $\rho_2^{(1)}=m$。如果还存在其它无穷远奇点$B_2(x_2, 1, 0)$与$B_3(x_3, 1, 0)$，则$x_2$、$x_3$应是

$$ax^2-(l+1)x-m=0 \tag{19.55}$$

的根。当$m\neq0$时，$x_2x_3\neq0$，$B_2$、$B_3$可改写成$B_2(1, y_2, 0)$，$B_3(1, y_3, 0)$的形式，于是由 (19.9) 式可知$B_i$与$B_j$能形成 WICPP 的条件是：

$$l-1=0\ 或\ x_i=x_j\left(现在只能是\ x_2=x_3=\frac{l+1}{2a}\right). \tag{19.56}$$

1) $m\neq0$, $l-1\neq0$, $l+1\neq0$

则$B_2=B_3=\left(\frac{l+1}{2a}, 1, 0\right)$，相应的特征根为：

$$\rho_1 = \frac{l+1}{2a} - \frac{(l+1)^2}{4a} = \frac{(l+1)(-l+1)}{4a} \neq 0,$$

$$\rho_2 = \frac{(l+1)^2 + 4am}{4a} = 0.$$

故 $B_1$ 或 $B_2$ 不能成为WIOPP, $B_1$ 与 $B_2$ 一起也不能成为WIOPP, 因为前者是 $\rho_1=0$ 而后者是 $\rho_2=0$。

2) $m\neq 0$, $l-1\neq 0$, $l+1=0$

由(19.55)知 $x_2\neq x_3$, 这与(19.56)矛盾，即 WIOPP不存在。

3) $m\neq 0$, $l=1$。这时(19.2)成为：

$$\dot{x} = -y+\delta x+x^2+mxy,\ \dot{y}=x(1+ax-y). \tag{19.57}$$

若 $1+ma<0$, 则不存在其他无穷远奇点，而 $B_1$ 是有一个特征根为零的鞍结点，它不可能成为形如图 19.1(б) 中的 ISCCC 上的奇点。若 $1+ma>0$, 则还存在另两个无穷远奇点

$$B_{2,3}\left(\frac{1\pm\sqrt{1+ma}}{a},\ 1,\ 0\right),$$

它们分别是初等鞍点和结点，故 WIOPP 仍不存在[1]。若 $1+ma=0$, 则(19.2)成为：

$$\dot{x} = -y+\delta x+x^2-\frac{xy}{a},\ \dot{y}=x(1+ax-y). \tag{19.58}$$

它的发散量 $P_x+Q_y=\delta+x-\dfrac{y}{a}$ 的一次项除尽 $P$ 与 $Q$ 的二次项，故极限环若存在必为唯一。在文献[19.13]中证明了这时包向 $O$ 的分界线只能来自有限远鞍点：$S\left(\dfrac{-a}{a^2-a\delta+1},\ \dfrac{1-a\delta}{a^2-a\delta+1}\right)$, 故 ISCCC 也不存在。

4) $m=0$。 这时(19.2)成为：

$$\dot{x} = -y+\delta x+lx^2,\quad \dot{y}=x(1+ax-y). \tag{19.59}$$

它的极限环的唯一性是已知的(见§9)，但可研究 ISCCC 的存在

---

1) 当 $\delta=0$ 时(19.57)在 $O(0,0)$的一阶焦点量 $W_1=m-a$; 当 $m=a$ 时，$W_1=0$, $W_2=-4a^3(1+a^2)\neq 0$。故可适当取 $m$ 与 $\delta$, 使(19.57)在 $O$ 外围至少有两个极限环。

性。当 $l\neq-1$ 时,(19.59)有一个初等无穷远奇点 $B_3\left(-\frac{l+1}{a}, 1, 0\right)$，其特征根为

$$\rho_1^{(3)}=-\frac{l(l+1)}{a},\quad \rho_2^{(3)}=-\frac{(l+1)^2}{a}\neq 0.$$

还有一重奇点 $B_1=B_2=(0, 1, 0)$，特征根为 $\rho_1=\rho_2=0$. $B_3$ 当 $0>l>-1$ 时是鞍点；当 $l=0$ 时是鞍结点；当 $l>0$ 或 $l<-1$ 时是结点。故当 $-1<l\leqslant 0$ 时 $B_1$ 或 $B_1$ 与 $B_3$ 有可能形成 WIOPP。但是 $B_3$ 单独不能成为 WIOPP。

当 $l=-1$ 时 $B_1=B_2=B_3$，这时可能存在形如图 19.1 5) 的 ISOOO。在文献[19.17]中证明了二次系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=ax+y+c+\beta(y-x^2),\\ \dot{y}&=2x(ax+y+c)+\alpha(y-x^2)\end{aligned}\tag{19.60}$$

在条件 $a^2-4c<0$, $\beta+1<0$, $\alpha\geqslant 0$, $\alpha+a\beta\neq 0$ 之下有一抛物线解 $y=x^2$ 和位于它上方的唯一有限远奇点

$$A\left(\frac{\alpha}{2\beta}, \frac{\alpha^2-2a\alpha-4c\beta}{4\beta(1+\beta)}\right).$$

(19.60)可经线性变换化成(19.59)的形式，而 $A$ 的象是 $O(0, 0)$。因此，$y=x^2$ 是 (19.60) 的 ISOOO，它只经过 $B_1=B_2$。由§17 知道这时或无极限环，或有唯一极限环[1]。

---

1) 在文献[19.7]中有两个情况出现抛物线解。其一是：

$$\dot{x}=-y+ax^2+\frac{\bar{a}}{2a}x,\quad \dot{y}=x+\frac{\bar{a}}{2a}y+\bar{a}x^2+axy$$

有抛物线解 $y=\frac{a}{2}x^2-\frac{\bar{a}}{2a}x-\frac{4a^2+\bar{a}^2}{8a^3}$；另一是：

$$\dot{x}=-y+\frac{\bar{a}}{3a-\bar{b}}x+ax^2,\quad \dot{y}=x+\frac{\bar{a}}{3a-\bar{b}}y+\bar{a}x^2+\bar{b}xy$$

有抛物线解 $y=\frac{2a-\bar{b}}{2}x^2-\frac{\bar{a}}{3a-\bar{b}}x-\frac{(3a-\bar{b})^2+\bar{a}^2}{2a(3a-\bar{b})^2}$。前者是后者当 $\bar{b}=a$ 时的特例。以上两方程都可经移轴化为(19.60)的形式。

此外，(19.59) 当 $d=\frac{a}{2l+1}$ 时，有抛物线解 $y=\frac{2l+1}{2}x^2-\frac{1}{2l}$，当 $l>0$ 时，$O(0, 0)$ 在抛物线内部。

更一般的，若在(19.59)中有

$$a<0,\ l<0,\ \delta=0,\ (\delta-a)^2+4l<0. \tag{19.61}$$

则(19.59)只有一个有限远奇点$O(0,0)$，它是一阶稳定细焦点。当$|l|\gg 1$时，例如，能使$(2-a)^2+4l<0$，则在$O$仍为焦点时，它总是(19.59)的唯一有限远奇点。现在让$\delta$从0增大，则由$O$改变稳定性而产生的稳定极限环将不断扩大，最后成为过$B_1=B_2$的ISCCO。这时$B_3$是稳定结点，它不可能在ISCCO上面。

总结以上的分析可知，对(Ⅱ)类方程，ISCCO只可能在下列三种情况下出现：

1) 经过两个初等（或双曲）无穷远鞍点的ISCCO，见例19.1。

2) 经过一有两个零特征根的无穷远奇点的ISCCO，例如抛物线解，或(19.38)的ISCCO，如果它存在。

3) 经过一个无穷远初等鞍点和一个有两零特征根的无穷远奇点的ISCCO（如系统(19.59)当$0>l>-1$）。

关于写成形式(19.2)的（Ⅱ）类方程的ISCCO问题要研究一般情况，即(19.26)式成立的情况，可以先考虑仅由两个无限远初等鞍点构成的WICPP，对于这种二次系统，文献[19.7]与[19.20]证明此时方程可写为：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=mx+ny+x(ax+by)=P(x,y),\\ \dot{y}&=\bar{m}x+\bar{n}y-y(bx+ay)=Q(x,y),\end{aligned} \tag{19.62}$$

其中$a<0,\ b+a>0$。易证(19.62)的三个初等无穷远奇点为：

$$\begin{aligned}&A(0,1,0):\ \lambda_1^{(A)}=a<0,\ \lambda_2^{(A)}=a+b>0,\ \text{为鞍点；}\\ &B(1,0,0):\ \lambda_1^{(B)}=-a-b<0,\ \lambda_2^{(B)}=-a>0,\ \text{为鞍点；}\\ &C(-1,1,0):\ \lambda_1^{(C)}=-a-b<0,\ \lambda_2^{(C)}=a-b<0,\ \text{为稳定结点。}\end{aligned} \tag{19.63}$$

故$A$与$B$构成WICPP。(19.62)的有限远奇点的指标之和应是$+2$，故或是有两个指标为$+1$的奇点[1]，或是有三个指标为$+1$，

1) 例如$\dot{x}=x-y+x(-x+2y)$，$\dot{y}=x+y-y(2x-y)$，只有两个焦点$O(0,0)$和$(2.3,0.83)$。若改为$\dot{x}=-y+x(-x+2y)$，$\dot{y}=x-y(2x-y)$，则奇点$O$与$(1,1)$都是中心，且有积分直线$y=1-x$。

一个指标为$-1$的奇点。下面看一种不存在ISCCC的情况：

设

$$m,\ n,\ \bar{m},\ \bar{n}\text{ 皆为正，且 } m\bar{n}-n\bar{m}>0. \qquad (19.64)$$

则$O(0,\ 0)$有指标$+1$。$P(x,\ y)=0$有渐近线：

$$l_1: x=-\frac{n}{b};\quad l_2: y+\frac{a}{b}x=\frac{an-bm}{b^2}\ (<0). \qquad (19.65)$$

$Q(x,\ y)=0$有渐近线：

$$l_3: y=\frac{\bar{m}}{b};\quad l_4: x+\frac{a}{b}y=\frac{b\bar{n}-a\bar{m}}{b^2}\ (>0).$$

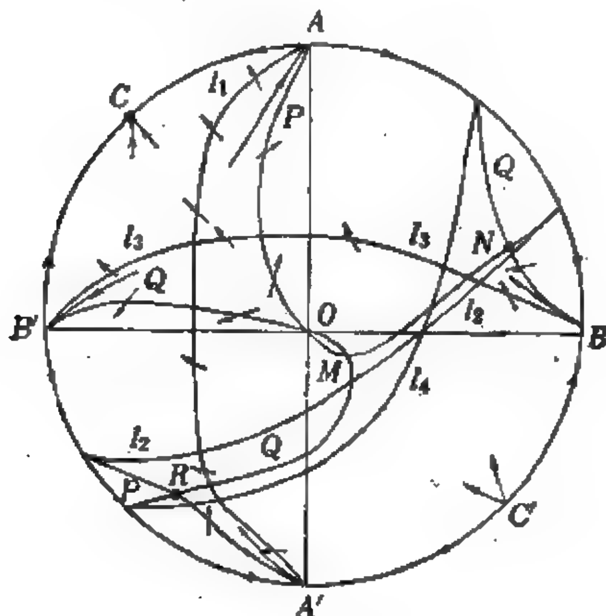



图 19.3

故可画出等倾线及无切直线如图19.3。其中$M$为鞍点，$O$、$N$、$R$为非鞍点。注意：$l_1$、$l_3$以及$P=0$、$Q=0$上轨线的穿过方向可知：进入$A$的分界线不可能和从$B$点跑出的分界线重合，故无包围$N$在其内部的ISCCC。同样，从$A'$跑出的分界线不可能和进入$B'$的分界线重合。故无包围$O$或$R$在其内部的ISCCC。这说明了：在条件(19.64)之下，(19.62)没有ISCCC，虽然它有WICPP。关于方程(19.62)，在后面还要研究。

**注 19.6** 若求(19.62)有双曲线解$xy=1$的条件，可得：

$$\bar{m}=n=0,\ m+\bar{n}=0,\ a=b。$$

由此可知：要求$A$与$B$皆为双曲鞍点且构成WICPP，与要求$xy=1$为积分线不能并存，即当(19.63)成立时，(19.62)不能有双曲线解$xy=1$。

又若保持$\bar{m}>0$，而改取$n<0$，则可见进入$A$的分界线应来自$y$轴右方，这时就有可能出现过$A$、$B$的ISCCC。由此可见：若存在ISCCC，则它在有限远处不能与$P(x, y)=0$及$Q(x, y)=0$相交。这一事实也在文献[19.12]中得到证明。

下面研究(I)类方程的ISCCC的问题。这时不妨设$a=-1$，于是有方程：

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\quad \dot{y}=x(1-x)。\tag{19.66}$$

情况1) $n\neq 0$

易见当$(1-m)^2-4n(l+\delta)>0$时，(19.66)有四个有限远奇点，其中两个是鞍点，两个是非鞍点；

当$(1-m)^2-4n(l+\delta)=0$时，$x=1$上两奇点重合成一个鞍结点；

当$(1-m)^2-4n(l+\delta)<0$时，(19.66)只有$y$轴上的两奇点，另二奇点成为复的，但不是跑向无穷远。

在三种情况下，有限远奇点的指标之和都是零。

其次，将(19.66)化到坐标$(1, y, z)$，得到：

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{d\tau}=-l-\delta z-my+yz-ny^2,\\[2mm] \dfrac{dy}{d\tau}=-1+z-ly-\delta yz-my^2+y^2z-ny^3。\end{cases}\tag{19.67}$$

无穷远奇点$(1, y_i, 0)$的$y$坐标满足方程

$$ny^3+my^2+ly+1=y(ny^2+my+l)+1=0。\tag{19.68}$$

(19.67)在$(1, y_i, 0)$的特征根是：

$$\lambda_1^{(i)}=-l-my_i-ny_i^2,$$

$$\lambda_2^{(i)}=-l-2my_i-3ny_i^2\quad (i=1, 2, 3)\tag{19.69}$$

由(19.68)可看出：$\lambda_1^{(i)}\neq 0$ 对任何 $i$。另外，无穷远奇点的指标之和应是 $+1$，所以如果(19.66)有三个无穷远奇点，则必有一个初等鞍点，两个初等结点；若有两个无穷远奇点，则必有一个鞍结点，一个初等结点；若只有一个无穷远奇点，则它是初等结点或三重奇点，由于指标为 $+1$，故也是结点。在最后一情况应有 $n=\frac{l^3}{27}$，$m=\frac{l^2}{3}$。若 $l\neq 0$，则 $y_1=y_2=y_3=-\frac{3}{l}$，$\lambda_1=-\frac{l}{3}$，$\lambda_2=0$；若 $l=0$，则 $n=m=0$。(19.66)为可积系统。由此可见，不论在哪种情况，(19.66)都不存在 ISOCO。

情况 2) $n=0$。

这时 (19.66) 总有一个无穷远奇点 $C(0, 1, 0)$，其特征根为 $\rho_1^{(1)}=0$，$\rho_2^{(1)}=m$。先看 $m\neq 0$ 的情况：

i) 当 $l^2-4m<0$ 时，(19.66)除 $C$ 外别无其他无穷远奇点，而 $C$ 现在是 Bendixson 型奇点，它不可能是一个 WIOPP。

ii) 当 $l^2-4m>0$ 时，(19.62) 除 $C$ 外还有两个无穷远奇点 $A\left(\frac{-l+\sqrt{l^2-4m}}{2}, 1, 0\right)$ 和 $B\left(\frac{-l-\sqrt{l^2-4m}}{2}, 1, 0\right)$。不难证明：当 $m<0$ 时，$A$ 与 $B$ 都是初等结点，当 $m>0$ 时，一个是初等鞍点，一个是初等结点。因此(19.66)不存在由一无穷远奇点或两无穷远奇点构成的 WIOPP。

iii) 当 $l^2-4m=0$ 时，$A=B=\left(\frac{-l}{2}, 1, 0\right)$，对它有 $\rho_1\neq 0$，$\rho_2=0$，故 $C$ 与 $A$ 一起不可能构成 WIOPP。

其次若 $m=0$，则 $A=C=(0, 1, 0)$，对它有 $\rho_1=\rho_2=0$，而对奇点 $B(-l, 1, 0)$，则有 $\rho_1=\rho_2=l^2$，当 $l=0$ 时，$B=A=C$。现在(19.66)成为：

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2,\quad \dot{y}=x(1-x)\text{。}\tag{19.70}$$

$P_x+Q_y=\delta+2lx$，它的一次项能除尽 $P$、$Q$ 的二次项，故极限环若存在，必为唯一。实际上，这时 (19.70) 的有限远奇点除 $O(0, 0)$ 外只有一个初等鞍点 $S(1, l+\delta)$，包向 $O$ 的分界线来自 $S$，故不存在 ISOCO。

总结以上的分析可得：

**定理 19.2** (Ⅱ)类方程不能有ISOOO。

最后研究(Ⅰ)类方程

$$\dot{x} = -y + \delta x + lx^2 + mxy + ny^2,\quad \dot{y} = x. \tag{19.71}$$

虽然 (19.71) 的极限环的唯一性是已知的事实，但它的无穷远奇点的性质比较特殊，且有可能存在ISOOO。

情况 1) $n \neq 0$

(19.71)有两个有限远奇点 $O(0, 0)$ 与 $N\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$，在 $(1, y, z)$ 坐标之下(19.71)成为：

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{d\tau} = -lz - \delta z^2 - myz + yz^2 - ny^2 z, \\ \dfrac{dy}{d\tau} = z - ly - \delta yz - my^2 + zy^2 - ny^3. \end{cases} \tag{19.72}$$

无穷远奇点的 $y$ 坐标满足方程

$$y(ny^2 + my + l) = 0. \tag{19.73}$$

当 $m^2 - 4nl > 0$ 而 $l \neq 0$ 时，有三个无穷远奇点：

$$A\left(1, \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4nl}}{2n}, 0\right),$$

$$\lambda_1^{(A)} = 0,\ \lambda_2^{(A)} = \sqrt{m^2 - 4nl}\ (m - \sqrt{m^2 - 4nl})/2n \neq 0;$$

$$B\left(1, \frac{-m - \sqrt{m^2 - 4nl}}{2n}, 0\right),$$

$$\lambda_1^{(B)} = 0,\ \lambda_2^{(B)} = \sqrt{m^2 - 4nl}\ (-m - \sqrt{m^2 - 4nl})/2n \neq 0;$$

$$C(1, 0, 0),\ \lambda_1^{(C)} = -l,\ \lambda_2^{(C)} = -l. \tag{19.74}$$

由§12图12.9可知，只须讨论 $nl < 0$ 的情况即可，这时显然有 $m^2 - 4nl > 0$。又由 (19.74) 看出 $\lambda_2^{(A)}\lambda_2^{(B)} > 0$，故 $A$ 与 $B'$ 构成一WIOPP。这就是§12图12.9(6) 的情况。由此易见可以变动 $\delta$ 使从 $B'$ 跑出的分界线与进入 $A$ 的分界线重合而得一ISOOO。这里 $A$、$B'$ 都是鞍结点。

情况 2) $n = 0$

§12 图 12.9(4) 说明(19.71)当 $ml>0$, $\delta<0$ 时，有可能出现含 $A(0, 1, 0)$ 与 $B\left(-1, \frac{l}{m}, 0\right)$ 的 ISCCC。$A$、$B$ 都是Bendixson型奇点，但 $A$ 是鞍点，$B$ 是鞍结点。

与(Ⅱ)类方程比较，可知 (I) 类方程的 ISCCC 是在另外两情况出现：

4) 经过两个鞍结点的 ISCCC。

5) 经过一鞍结点和一Bendixson 型高阶鞍点的 ISCCC[1)]。值得注意的是：由§12 图 12.9 可看出，(I) 类方程不可能有两个无穷远双曲鞍点。

在所有上列五种情况中，除情况1)以外，极限环若存在必为唯一的。

下面介绍文献[19.14]的结果：由于我们要讨论极限环的集中分布是否可能的问题，故不妨设二次系统具有形式：

$$\dot{x} = -y + \delta x + lx^2 + mxy + y^2,$$
$$\dot{y} = x(1 + ax + by) \quad (b < -1,\ a > 0). \tag{19.75}$$

这时 $O(0, 0)$ 与 $N(0, 1)$ 为焦点或结点。(19.75) 的其他有限远奇点的坐标满足方程：

$$(lb^2 + a^2 - abm)x^2 + [a(b+2) + b(b\delta - m)]x + 1 + b = 0,$$
$$y = \frac{1 + ax}{-b}. \tag{19.76}$$

如果(19.75)有两个初等无穷远鞍点，则其无穷远奇点的指标之和应为 $-1$。因为这时必定还有第三个初等非鞍点。于是，有限远奇点的指标之和应为 $+2$，这只有当(19.76)没有实根或是 $1+ax+by=0$ 上两奇点位于 $y$ 轴的同一端(从而四个有限远奇点构成凹四边形的顶点)时才是可能的。故由 $1+b<0$ 可导出

$$lb^2 + a(a - mb) < 0. \tag{19.77}$$

(19.75) 在 $(x, 1, z)$ 坐标系之下的方程为：

---

1) 在文献[19.7]与[19.20] 中证明了具有两个非双曲型无穷远奇点的二次系统必可化为(I)类方程，因而最多只能有一个极限环。

$$\frac{dz}{d\tau}=-z(xz+ax^2+bx),$$

$$\frac{dx}{d\tau}=-ax^3+(l-b)x^2+mx+1+z(-x^2+\delta x-1)。\tag{19.78}$$

无穷远奇点$(x_i, 1, 0)$的$x$坐标满足方程：

$$\varphi(x)=ax^3+(b-l)x^2-mx-1=0。\tag{19.79}$$

假设(19.79)有三个实根。易见若$m\geqslant 0$，则(19.79)的三个根为：$x_3<x_2<0<x_1$，且有$\varphi'(x_3)>0$，$\varphi'(x_2)<0$，$\varphi'(x_1)>0$，又由(19.77)看出$\varphi\left(-\frac{b}{a}\right)=-lb^2-a(a-mb)>0$。因为$-\frac{b}{a}>0$，故必有$x_1<-\frac{b}{a}$，从而$ax_1^2+bx_1=ax_1\left(x_1+\frac{b}{a}\right)<0$。仿此可证$ax_2^2+bx_2>0$，$ax_3^2+bx_3>0$。仿(19.15)式易见此时$A_1(x_1, 1, 0)$与$A_2(x_2, 1, 0)$为鞍点，$A_3(x_3, 1, 0)$为结点。

如果$m<0$，则除了上述情况外，还可能出现三个$x_i$都是正的情况，但这时分析无切直线

$$y=\frac{x}{x_i}-\frac{x_i^2-\delta x_i+1}{x_i(2lx_i-2ax_i^2-bx_i+m)}\quad(i=1, 2)\tag{19.80}$$

（见§6(6.24)式，它通过$A_i(x_i, 1, 0)$）上轨线的走向可以看出(19.75)不可能存在形如图19.1(4)的无限分界环。

**引理 19.1** 若(19.75)有由两个无穷远初等鞍点$A_1$与$A_2$形成的WIOPP，则必须

$$(b+2l)+mx_3(l-ax_3)=0,\quad x_3<0。\tag{19.81}$$

**证** 仿前(19.17)式可知这时$x_1$, $x_2$应满足关系式：

$$a(b+2l)x_1x_2+ma(x_1+x_2)+mb=0。\tag{19.82}$$

但由(19.79)知应有

$$ax_1x_2=\frac{1}{x_3}<0,\quad a(x_1+x_2)=l-b-ax_3,$$

代入(19.82)式即得(19.81)式。 ▮

**定理 19.3** 若二次系统(19.75)有由两个初等无穷远鞍点$A_1$与$A_2$形成的WIOPP，则它的极限环必集中分布。

**证** 由引理 19.1 知(19.80)式成立。取 $\lambda=x_3$，作代换：

1) $\bar{x}=x-\lambda y,\quad \bar{y}=y$;

2) $\xi=(\delta-\lambda)\bar{x}+(l-a\lambda)\bar{x}^2+h(\bar{x})\bar{y},\ x=\bar{x}$;

3) $u=\dfrac{\xi}{|h(x)|^r},\quad x=x,\quad d\tau=|h(x)|^r dt$; (19.83)

4) $y=u+F(x),\quad x=x,\quad t=\tau$。

其中

$$r=\frac{2l\lambda-a\lambda^2+m}{2l\lambda-2a\lambda^2-b\lambda+m},\quad F(x)=\int_0^x f(x)dx,$$

$$g(x)=\frac{x(x+\lambda)\bar{g}(x)}{\lambda h(x)|h(x)|^{2r}},\quad f(x)=\frac{\bar{f}(x)}{\lambda h(x)|h(x)|^r},$$

$$\bar{g}(x)=-(\lambda^2-\delta\lambda+1)+(2l\lambda-2a\lambda^2-a+m-\delta b)x$$
$$-\left[b(l-a\lambda)+\frac{a}{\lambda}\right]x^2, \tag{19.84}$$

$$\bar{f}(x)=\lambda\delta(\lambda^2-\delta\lambda+1)+[(b+2l)\lambda$$
$+2m\delta\lambda+2$ [illegible] $-b\lambda^2\delta-m\lambda^2]x$
$$=\delta(\lambda^2-\delta\lambda+1)(x+\lambda)-(m+\delta)[(b+1)\lambda^2$$
$$-(m+\delta)\lambda-1]x\text{[1]},$$

$$h(x)=-(\lambda^2-\delta\lambda+1)+(2l\lambda-2a\lambda^2-b\lambda+m)x.$$

则(19.75)式变为：

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x),\quad \frac{dy}{dt}=-g(x). \tag{19.85}$$

由于已设 $O(0,0)$ 与 $N(0,1)$ 是(19.75)的焦点，故 $|\delta|<2$ 又 $(m+\delta)^2+4(b+1)<0$，从而有：

$$\lambda^2-\delta\lambda+1>0,\ (b+1)\lambda^2-(m+\delta)\lambda-1<0. \tag{19.86}$$

由于 $\lambda$ 满足方程(19.79)，且 $\lambda=x_3<0$，故

$$x_0=\frac{\lambda^2-\delta\lambda+1}{2l\lambda-2a\lambda^2-b\lambda+m}$$
$$=\frac{\lambda(\lambda^2-\delta\lambda+1)}{(b+1)\lambda^2-(m+\delta)\lambda-1-(\lambda^2-\delta\lambda+1)}>0,$$

---

1) 在 $\bar{f}(x)$ 的表达式中用到 (19.81) 式。对一般的二次系统 $\bar{f}(x)$ 应是 $x$ 的二次式，见 § 21 的 (21.24) 式。

而

$$x_0+\lambda=\frac{\lambda[(b+1)\lambda^2-(m+\delta)\lambda-1]}{(b+1)\lambda^2-(m+\delta)\lambda-1-(\lambda^2-\delta\lambda+1)}<0. \tag{19.87}$$

因此(19.85)的两个焦点 $O(0, 0)$ 与 $\bar{N}(-\lambda, F(-\lambda))$ 分别位于 $x<x_0$ 及 $x>x_0$ 半平面中. 由(19.84)中 $f(x)$ 及 $\bar{f}(x)$ 的表达式知 $f(x)$ 不可能在 $x<x_0$ 与 $x>x_0$ 半平面中都有零点, 从而 (19.85) 不能在 $O$ 与 $\bar{N}$ 外围同时存在极限环. 定理证毕. ∎

注意：无切直线(19.80)在代换(19.83)之下变为(19.85)的无切直线 $x=x_0$.

**定理 19.4** 若二次系统(19.75)有由两个无穷远的初等鞍点 $A_1$ 与 $A_2$ 形成的 WIOPP, 则它的细焦点的最高阶数为 2.

**证** 不失一般性, 只须证明：若 $O(0, 0)$ 是(19.75)的细焦点, 且有：

$$\delta=0,\ m(l+1)-a(b+2l)=0,\ m=5a, \tag{19.88}$$

则 $O$ 必为 (19.75) 的中心. 由假设知这时 (19.81) 式成立. 以 $b+2l=\frac{m(l+1)}{a}$ 代入(19.81)式, 化简可得：

$$(ax_3+1)(-ax_3+l+1)=0, \tag{19.89}$$

从而 $x_3=-\frac{1}{a}$ 或 $x_3=\frac{l+1}{a}$.

若以 $x=x_3=-\frac{1}{a}$ 及 $m=5a$, $b=3l+5$ 代入(19.79)可得：

$$2a^2+(l+2)=0. \tag{19.90}$$

由熟知的二次系统各阶焦点量的表达式可知(19.88)与(19.90)导致 $W_1=W_2=W_3=0$, 故 $O$ 为中心.

若以 $x=x_3=\frac{l+1}{a}$ 及 $m=5a$, $b=3l+5$ 代入(19.79), 可得：

$$a^2=\frac{(l+1)^2(3l+6)}{5l+6},$$

再和 $b=3l+5$ 一起代入 $(l+1)^2(b+1)-a^2(b+2l+1)$, 可见其值为零. 故仍有 $W_1=W_2=W_3=0$. 定理证毕. ∎

注 19.7 在[19.21]第五章§2曾提到：对于有三阶细焦点及两无限远鞍点的二次系统有 $A-1=W_3H$，其中 $A-1$ 即判别两无限鞍点是否形成 WIOPP 的判定量，$W_3$ 是 $O(0,0)$ 的三阶焦点量，$H\neq 0$。由此亦可导出：若 $A-1=0$，即两无限远鞍点形成 WICPP，则 $W_3=0$，故此时 $O$ 应是中心。只是在文献[19.21]中没有给出上述公式的证明(但最近已在[19.22]中补证了)。

在文献[19.14]中证明了：当(19.75)满足定理 19.4 的条件，且确有一个二阶细焦点时，必不存在极限环(此处从略)。

最后，请注意一件有趣的事，即方程(19.62)右端与§10中(10.73)式都有这样的特点：$P(x,y)$ 中不含 $y^2$ 项，$Q(x,y)$ 中不含 $x^2$ 项。且(19.62)式更为特殊，即 $P(x,y)$ 中的 $x^2$ 项的系数和 $Q(x,y)$ 中 $y^2$ 的系数只差一个正负号，$P(x,y)$ 中 $xy$ 的系数和 $Q(x,y)$ 中 $xy$ 的系数也只差一个正负号。

现在如果 $O(0,0)$ 是(19.62)的细焦点，则其线性部分的特征方程应有纯虚根，即应有

$$m+\bar{n}=0,\ m\bar{n}-n\bar{m}>0. \tag{19.91}$$

将(19.62)改写为：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=mx+ny+ax^2+bxy,\\ \dot{y}&=lx-my-bxy-ay^2\quad(m^2+ln<0).\end{aligned} \tag{19.92}$$

不考虑线性项，按文献[19.15]§12的公式可算出 $W_1=0$。在转轴变换：

$$\begin{cases}x=u\cos\theta-v\sin\theta\\ y=u\sin\theta+v\cos\theta\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}u=x\cos\theta+y\sin\theta\\ v=-x\sin\theta+y\cos\theta\end{cases}$$

之下(19.92)变为：

$$\begin{aligned}\dot{u}=&[m(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+(l+n)\sin\theta\cos\theta]u\\ &+[n\cos^2\theta-2m\sin\theta\cos\theta-l\sin^2\theta]v+h.o.t,\\ \dot{v}=&(-2m\sin\theta\cos\theta+l\cos^2\theta-n\sin^2\theta)u\\ &+[-m(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-(l+n)\sin\theta\cos\theta]v+h.o.t.\end{aligned} \tag{19.93}$$

若取

$$m\cos 2\theta+(l+n)\sin\theta\cos\theta=0,\quad 即\quad \tan 2\theta=-\frac{2m}{l+n},\tag{19.94}$$

则 (19.93) 的 $\dot{u}$ 中没有 $u$ 的线性项，$\dot{v}$ 中没有 $v$ 的线性项。又(19.93)两方程中的二次项分别为：

$$\begin{aligned}&(\cos\theta-\sin\theta)\left[a(\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)+b\sin\theta\cos\theta\right]u^2\\&\quad-(\cos\theta+\sin\theta)\left[2a\cos\theta\sin\theta-b(\cos\theta-\sin\theta)^2\right]uv\\&\quad-(a+b)\sin\theta\cos\theta(\cos\theta-\sin\theta)v^2\\&=a_{20}u^2+a_{11}uv+a_{02}v^2\quad(第一方程),\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}&-(a+b)(\sin\theta+\cos\theta)\cos\theta\sin\theta\cdot u^2\\&+(\sin\theta-\cos\theta)\left[2a\sin\theta\cos\theta+b(\sin\theta+\cos\theta)^2\right]uv\\&+(\sin\theta+\cos\theta)\left[-a(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\right.\\&\left.+b\sin\theta\cos\theta\right]v^2\\&=b_{20}u^2+b_{11}uv+b_{02}v^2\quad(第二方程)。\end{aligned}$$

由此可算出对方程(19.93)仍有：

$$W_1=0.$$

在条件(19.94)之下把(19.93)写成：

$$\begin{aligned}\dot{u}&=\bar{n}v+a_{20}u^2+a_{11}uv+a_{02}v^2,\\\dot{v}&=\bar{m}u+b_{20}u^2+b_{11}uv+b_{02}v^2.\end{aligned}\tag{19.95}$$

如果 $\bar{n}=-\bar{m}$，则通过时间 $t$ 的伸缩变换即可把 (19.95) 式中的 $\bar{n}$ 变为 $-1$，$\bar{m}$ 变为 $1$。而一切二次项都乘上同一非零常数。故对变动后的方程仍有 $W_1=0$，进一步可算 $W_2$。当系数 $\bar{n}$、$a$、$b$ 满足某些关系式时有 $W_2=0$，由于总有 $W_3=0$ (定理 19.4)，故这时(19.95)是有中心的可积系统。对一般的 $\bar{n}$、$a$、$b$，有 $W_2\neq 0$，则由文献[19.14]知(19.95)不存在极限环。故不论 ISCCC 存在与否，极限环的有限性问题已解决。

若 $\bar{n}\neq-\bar{m}$，那末为了把 $\bar{n}$ 化为 $-1$，$\bar{m}$ 化为 $1$，除了 $t$ 的伸缩变换之外，还得对 $u$ 或 $v$ 中之一作伸缩变换，这时(19.95)的各二次项被乘上不同的常数。例如，若对(19.95)作变量代换：

$$x=u,\ y=\sqrt{-\frac{\bar{n}}{\bar{m}}}\,v,\qquad \tau=\sqrt{-\bar{n}\,\bar{m}}\,t, \tag{19.96}$$

则(19.95)化为：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{d\tau}=-y+\dfrac{a_{20}}{\sqrt{-\bar{n}\,\bar{m}}}x^2-\dfrac{a_{11}}{\bar{n}}xy-\dfrac{\bar{m}a_{02}}{\bar{n}\sqrt{-\bar{n}\,\bar{m}}}y^2\\[2ex] \dfrac{dy}{d\tau}=x+\dfrac{b_{20}}{\bar{m}}x^2+\dfrac{b_{11}}{\sqrt{-\bar{n}\,\bar{m}}}xy-\dfrac{b_{02}}{\bar{n}}y^2\end{cases}\quad(\bar{n}\neq-\bar{m}). \tag{19.97}$$

显然对(19.93)有 $W_1=0$，但对(19.97)却有 $W_1\neq0$。这是研究方程(19.62)的极限环个数有限性的困难所在。因为若当(19.62)有细焦点时，总能证明 $W_1=0$，则不论这时 $W_2$ 是否为零，(19.62)都没有极限环。借此还可证明当(19.62)有粗焦点时 $O$ 外围也没有极限环。当然，这是和已知的事实相矛盾的。

最后回到最一般的条件(19.26)，这时 $k$ 与 $g$ 应由(19.25)式表达。下面分成四种情况来看：

1) $k$ 与 $g$ 都有确定的异于 0 及∞的数值，则在 WICPP 上两个无限远奇点必为初等鞍点。问题归纳为研究方程(19.62)，其中 $a<0,\ b+a>0$。

2) $k=g=0$ 或 $k=g=\infty$，这两种情况前面已研究过。

3) $g=\dfrac{0}{0}$，即有

$$n(am+2l-1)=0,\ 3amn+2n(1+l)(2l-1)-m^2(l-1)=0. \tag{19.98}$$

今若 $n=0$，则 $m^2(l-1)=0$，这情况在Ⅴ中已讨论过。若 $n\neq0$，则 $am+(2l-1)=0$。当 $a\neq0$ 时，有 $m=\dfrac{1-2l}{a}$，代入(19.98)的第二式中可解出 $n=\dfrac{l-1}{a^2}$，这在Ⅱ中也已讨论过。$a=0$ 时(19.2)最多有一个极限环。

4) $k=\dfrac{0}{0}$，即有

$$an(1-2l)+am^2+ml=0,$$

$$3an(1-2l)+2am^2+ml+m=0。\quad (19.99)$$

由此二式可导出 $m(l-1)-an(1-2l)=0$。若 $l-1=0$，则有 $n=0$ 或 $a=0$。$a=0$ 的情况不必讨论；$l=1$，$n=0$ 时可导出 $m(am+1)=0$。若 $m=0$，则得方程(19.59)；若 $m=-\frac{1}{a}$，则得 (19.59) 的特例。

当 $l-1\neq 0$ 时，由 $n(l-1)-an(1-2l)=0$ 可解出

$$m=\frac{na(1-2l)}{l-1}。\quad (19.100)$$

以之代入(19.99)的第一式，算出 $n=\frac{l-1}{a^2}$，再代入(19.100)可得 $m=\frac{1-2l}{a}$，仍是(Ⅱ)中讨论过的情况。

由此可见，在最一般的条件(19.26)之下，实际上未能彻底解决问题的只有方程(19.62)了。对(19.62)问题是要解决当 $O$ 为粗焦点或 $O$ 为细焦点而 $W_1\neq 0$ 时(19.62)的极限环的个数。我们猜想：(19.62)这时最多有两个极限环。

## 参 考 文 献


[19.1] Dulac H. Sur les cycles limites, Bull.Soc. Math. de France, 51(1924), 45～188.

[19.2] Il'yashenko Yu S. Limit cycles on polynomial vector fields with nondegenerate singularities in real plane, Func. Anal. and Appl. 18 (1984), no.3, 34～42.

[19.3] Il'yashenko Yu S. Finiteness Theorems for limit cycles, Trans.Math.Monographs, v.94, AMS, 1991.

[19.4] Ecalle J, Martinet J, Moussu R and Ramis J P. Nonaccumulation des cycles limites (I), C.R.Acad.Sci.Paris, Ser. Math. 304(1987), 375～377; (Ⅱ) Ibid.431～434, 或 Publ.Inst. de Rech. Math. Avancée, Univ. de Strasbourg.1987, 329/P-182.

[19.5] Sotomayor J, Paterlini R.Quadratic vector fields with finitely many periodic orbits, Lect.Notes in Math.1007(1983), 753～766.

[19.6] Chicone C and Shafer D S. Separatrix and limit cycles of quadratic systems and Dulac's theorem, Trans.Amer.Math.Soc.278(1983), no.2, 585～612.

[19.7] Bamon R. Quadratic vector fields in the plane have a finite number of limit cycles, Inst.Hautes Etudes Sci.Publ.Math. no.64(1986), 111~142.

[19.8] Romanovskii V G. Finiteness of the number of limit cycles of a quadratic system, Diff.Uravn.24(1988), no.11, 1904~1911.

[19.9] Kotova A Yu. Finiteness theorem for limit cycles of quadratic systems, Selecta Math.Sov.v.10(1991), no.2, 131~143.

[19.10] Goliteina M G. Nonproper polycycles of quadratic vector fields on the plane, Selecta Math.Soc.v.10(1991), no.2, 143~155.

[19.11] Dong Jinzhu. The structure of the separatrix cycles of the system $\dot{x}=\sum_{0\le i+k\le 2} a_{ik}x^i y^k$, $\dot{y}=\sum_{0\le i+k\le 2} b_{ik}x^i y^k$, Acta Math.Sinica, 12 (1962), 251~257.

[19.12] Sheng Liren.Dulac's problem and Il'yashenkò theorem, Ann. of Diff.Eqs.6(1), 1990, 73~92.

[19.13] Ye Yanqian and Shen Boqian. Infinite separatrix cycle in the critical case of a quadratic differential system, Proc. Conf. Dyn. Syst.Year, Nankai Math.Inst., 1990—1991, v.4(1993), 278~296.

[19.14] 张平光,能形成细无穷远分界线环的二次系统. 南京大学学报, 数学半年刊 1993 年增刊,91~96.

[19.15] Ye Yanqian and others.Theory of limit cycles, Trans. Math. Monographs.v.66(1986), AMS.

[19.16] Sheng Boqian. Necessary and sufficient condition for the quadratic differential system to have a hyperbola separatrix cycle, J. Liaoning Normal Univ., v.14(1991), 1~9.

[19.17] Sheng Boqian. Necessary and sufficient conditions for the quadratic differential system to have a parabola separatrix cycle(Preprint, 1990).

[19.18] Cherkas L A.Bifurcation of limit cycles of a quadratic system with variation of the parameter rotating the field, Diff. Uravn. 17 (1981), no.11, 2002~2016.

[19.19] 韩茂安,罗定军,朱德明. 奇闭轨分支出极限环的唯一性 (Ⅱ). 数学学报,1992, v.35, no.5, 673~684.

[19.20] 张平光. 一类二次系统二点环$S^{(2)}$的稳定性. 数学年刊, 1990, 11A (3), 361~365.

[19.21] 梁肇军. 多项式微分系统全局分析导引. 华中师大出版社,1989.

[19.22] Lu Gang and Liang Zhaojun. Non-existence of singular cycles in a quadratic differential system with fine focus of order three (Preprint, 1993).

# §20. 二次系统极限环(2,2)分布的不可能性

关于二次系统极限环的(2, 2)分布是否可能的问题，自(1, 3)分布的例子出来以后就已受到中国数学家的注意。在1984年以前作者和其他数学家曾试图也举一个(2, 2)分布的具体例子，但都失败了。因此后来作者就从反面着想，尝试证明(2, 2)分布对二次系统来说为不可能。迄今已发表了5篇文章[20.1]、[20.2]、[20.3]、[20.4]、[20.5]。但是由于所用的方法不够好，这些文章中有的留下未能证明的命题，有的说理不够清楚。在这一节中，我们改进上述文章中的证明方法，使(2, 2)分布不可能性的证明较为完善。

由于研究的是极限环的(2, 2)分布问题，我们自然可以假设二次系统存在两个焦点，由前§2知不妨设它们都在$y$轴上，现在先从最简单的有两个焦点而无极限环的方程

$$\dot{x} = -y + lx^2 + ny^2,\ \dot{y} = x(1 + ax - y)\ (0 < n < 1,\ a < 0) \tag{20.1}$$

开始，它有焦点$O(0, 0)$和$N\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$，而发散量直线为：

$$P_x + Q_y = (2l-1)x = 0, \tag{20.2}$$

即$y$轴，故$O$与$N$都是细焦点。作代换：

$$y = \frac{1}{n} - w,\ x = \sqrt{\frac{n}{1-n}}u,\ \frac{dt}{d\tau} = \sqrt{\frac{n}{1-n}}, \tag{20.3}$$

则(20.1)变为：

$$\frac{du}{d\tau} = -w + \frac{nl}{1-n}u^2 + nw^2,$$

$$\frac{dw}{d\tau}=u\left[1+\frac{n}{n-1}\sqrt{\frac{n}{1-n}}au+\frac{n}{n-1}w\right],\tag{20.4}$$

而$N$成为新的原点。由此可见，(20.4)在原点的一阶焦点量为：

$$W_1'=\frac{n}{1-n}\sqrt{\frac{n}{1-n}}a\left[\frac{n}{n-1}+\frac{2nl}{1-n}\right]$$

$$=\frac{n}{1-n}\sqrt{\frac{n}{1-n}}\ \frac{an(2l-1)}{1-n},\tag{20.5}$$

它和(20.1)在原点$O$的一阶焦点量

$$W_1=a(1-2l)\tag{20.6}$$

异号，故$O$与$N$有不同的稳定性$\left(当\ l=\frac{1}{2}\ 时，两者都是中心\right)$。

(20.1)的轨线图已在文献[20.6]、[20.7]中详细分析过。由于使用 Dulac 函数：

$$B(x,\ y)=(1-y)^{2l-1},\tag{20.7}$$

可得

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)=a(1-2l)x^2(1-y)^{2l-2}.\tag{20.8}$$

故知：当 $l\neq\frac{1}{2}$ 时，(20.1)不存在闭轨线，当 $l=\frac{1}{2}$ 时，由[20.8]定理 12.3 知有两个中心。$a=0$ 的情况可不讨论，因为即使是

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\quad \dot{y}=x(1-y),\tag{20.9}$$

由于它有积分直线$y=1$，极限环若存在，则必为唯一，不可能出现(2, 2)分布。

现在我们只从文献[20.6]和[20.7]中取出少数几个有两个焦点的方程(20.1)的相图进行讨论：

1) $l>\frac{1}{2}$

这时$W_1>0$，$W_1'<0$。注意：(20.1)的无限远奇点的$y$坐标由三次方程

$$ny^3+(l+1)y-a=0\tag{20.10}$$

决定，它的判别式为：

$$\Omega=27n^2a^2+4n(l+1)^3>0,\tag{20.11}$$

所以(20.10)只有一个实(负)根，即(20.1)只有一个无限远奇点，它是结点。(20.1)在 $1+ax-y=0$ 上的奇点的 $x$ 坐标由二次方程

$$(l+na^2)x^2+(2an-a)x+n-1=0 \tag{20.12}$$

决定，由此可知现在有两个奇点 $S_1(x_1, y_1)$ 和 $S_2(x_2, y_2)$，其中 $x_2<0<x_1$，它们都是鞍点。(20.1)的相图如图20.1(即文献[20.6]的图 $7k$)所示。

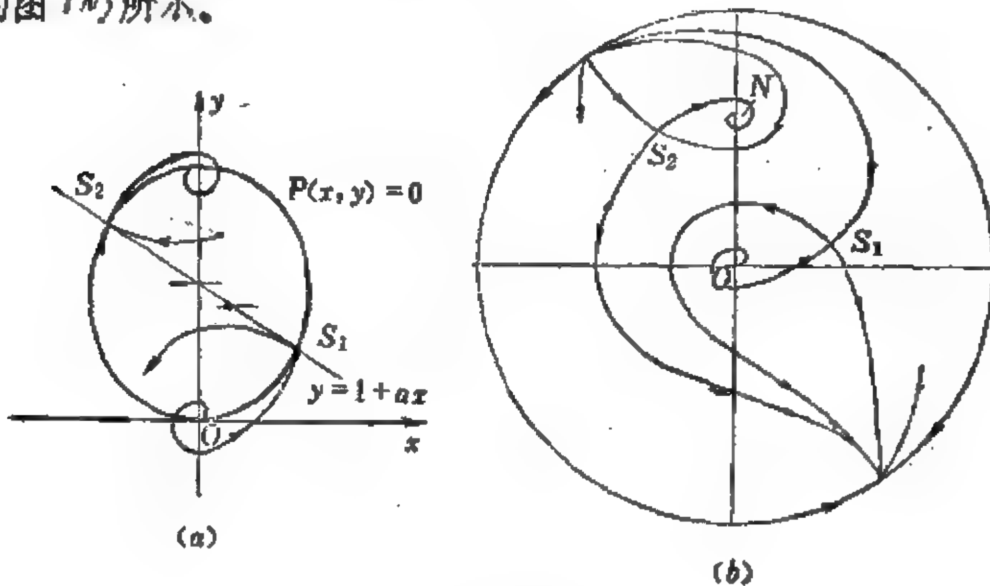



图 20.1

2) $0<l<\frac{1}{2}$

则 $W_1<0$, $W_1'>0$, $O$ 为稳定，$N$ 为不稳定，仿前可得图20.2(即[20.6]的图 $7l$)。

图20.2($b$)与图20.1($b$)的不同之处在于：在图20.2($b$)中从 $S_2$ 跑出的两分界线 $l_2'$, $l_4'$ 和进入 $S_1$ 的两分界线 $l_1$、$l_3$ 的相对位置都没有完全确定。是否各种可能性都存在?尚待研究。

3) $l=\frac{1}{2}$

则 $W_1=W_1'=0$, $N$ 与 $O$ 都是中心。这时(20.1)有通积分：

$$\frac{n}{3}y^3-\frac{a}{3}x^3-\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x^2y=C, \tag{20.13}$$

全局相图类似于图20.1($b$)，但过 $S_1$ 与 $S_2$ 各有一个分界线环，它们的内部分别为中心 $O$ 与 $N$。

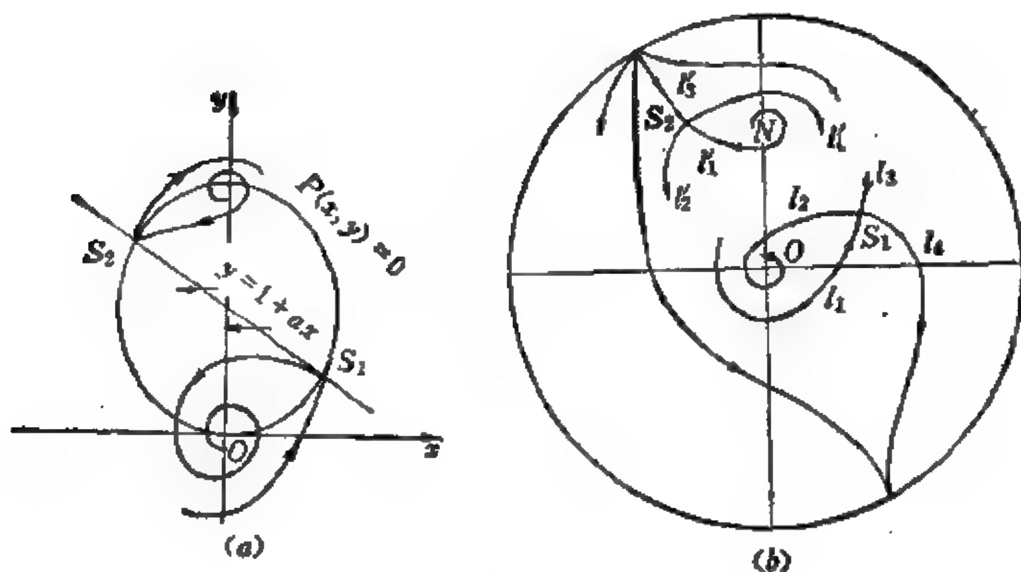



图 20.2

4) $l=0$

这时 $P(x, y)=0$ 退化为两条平行直线

$$y=0 \text{ 与 } y=\frac{1}{n}.$$

全局相图仍如图 20.2(b)。

5) $l<0$

这时 $P(x, y)=0$ 是实轴为 $y$ 轴的双曲线。$O$ 为稳定细焦点，$N$ 为不稳定细焦点。

(i) $a<-\sqrt{-\frac{l}{n}}$，则 $S_1$ 与 $S_2$ 分别位于双曲线的两支上，且在 $y$ 轴的两边。当 $|l|$ 较小时，(20.1)有一个无限远奇点，当 $|l|$ 较大时，(20.1)有三个无限远奇点。图 20.3(b) 是后一种情况中的一种可能(即[20.7]图 31)。前一情况的全局相图如图 20.2(b)。

(ii) $0>a>-\sqrt{-\frac{l}{n}}$，且 $1+ax-y=0$ 与 $P(x, y)=0$ 有交点，即 $a^2+4l(1-n)\geqslant 0$ 时。这时 $S_1$ 与 $S_2$ 应在 $y$ 轴同一边，且位于双曲线同一支上。图 20.4(b) 是 $\frac{1}{2n}<1$，$S_1$、$S_2$ 位于 $y$ 轴左方，因而都在双曲线上支时的情况中的一种可能(即[20.7] 中图 6)。

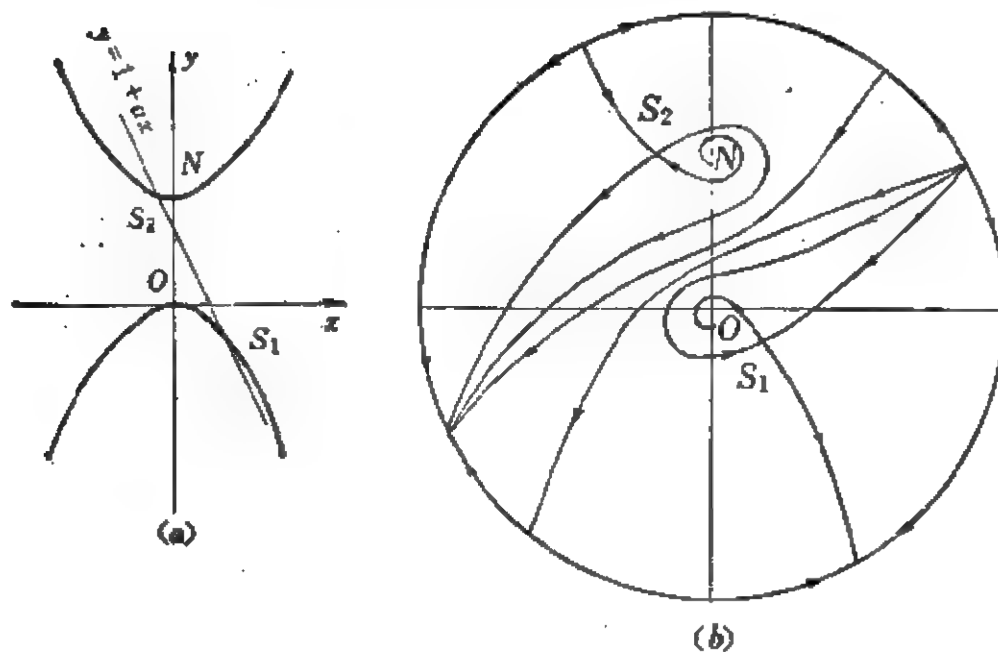



图 20.3

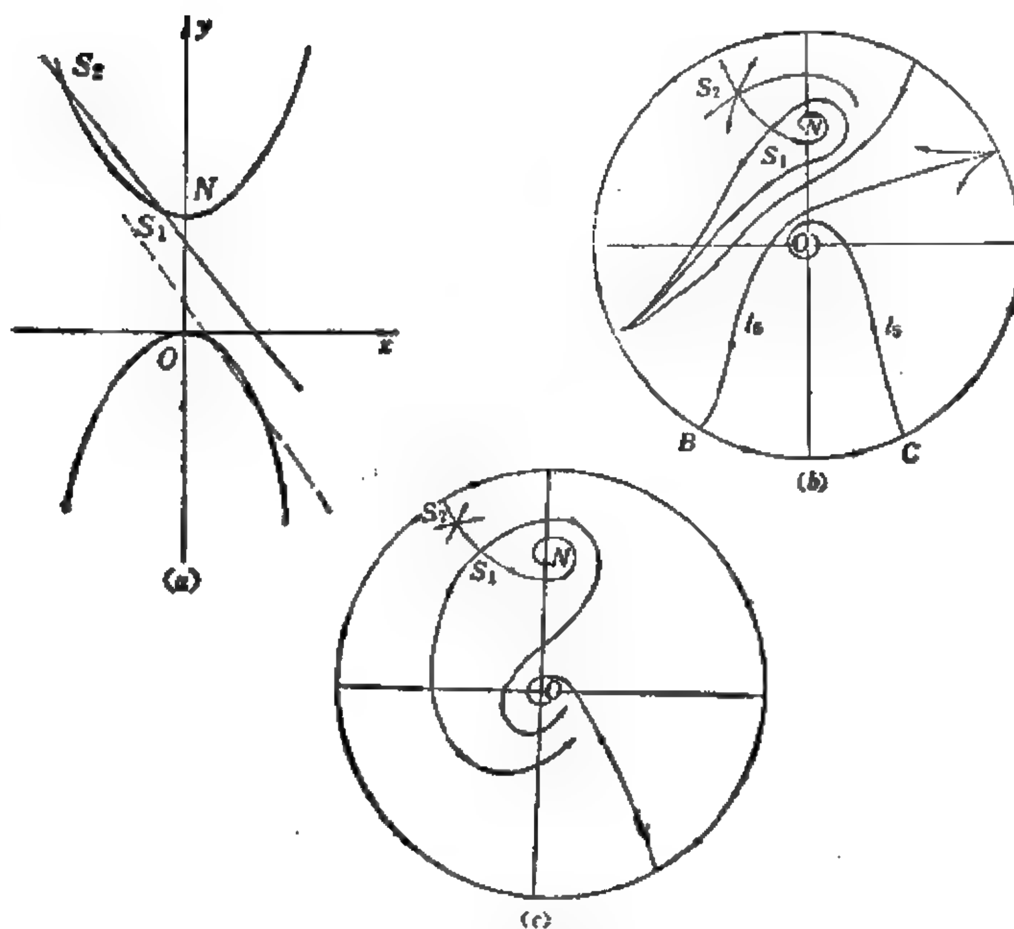



图 20.4

注意，这时 $S_1$ 是鞍点，$S_2$ 是结点（当 $a^2+4l(1-n)=0$ 时，$S_1=S_2$ 是鞍结点），并设无限远有两个鞍点一个结点。

如果无限远只有一个奇点，则必为鞍点，代替图 20.4(b) 是图 20.4(c)。

当 $\frac{1}{2n}>1$ 时，$S_1$、$S_2$ 位于 $y$ 轴右方，因而都在双曲线的下支，这时全局相图与图 20.4(b) 或(c)不同之处仅在于：包向 $O$ 的两分界线来自 $S_1$，而从 $N$ 外围有一分界线跑向无限远鞍点。

(iii) $0>a\geqslant-\sqrt{\frac{l}{-n}}$，且 $1+ax-y=0$ 与 $P(x,y)=0$ 无交点，即 $a^2+4l(1-n)<0$ 或 $a^2+4l(1-n)=0$（当 $n=1/2$ 时）。

这时 $S_1$、$S_2$ 不存在，按照无限远奇点有三个或一个可以得到两个相图，即图 20.5 (b)、(c) 其中 (b) 即文献[20.7] 的图 28[1]。

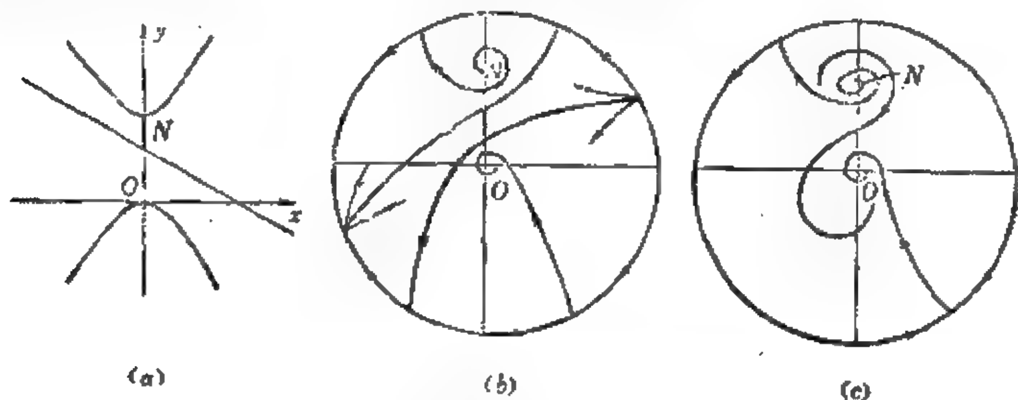



图 20.5

下面研究当 (20.1) 的第一方程右端添加一项 $\delta x$ 而成为

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+ny^2,$$
$$\dot{y}=x(1+ax-y)\ (0<n<1,\ a<0) \tag{20.14}$$

时两焦点 $O$ 与 $N$ 外围极限环的有无及个数问题。

注意：不论 $\delta$ 是正是负，当 $S_2(x_2, y_2)$ 是 $1+ax-y=0$ 上的指标 $+1$ 奇点时，它必是结点。为此，研究(20.14)在 $S_2$ 的特征方程：

$$\begin{vmatrix} P_x-\lambda & P_y \\ Q_x & Q_y-\lambda \end{vmatrix}_{(x_2,y_2)}=\lambda^2-(P_x+Q_y)\lambda+P_xQ_y-P_yQ_x=0, \tag{20.15}$$

1) 图(20.5)中的(b)只代表一种可能性；另两种未画出来。

上式右方的四个偏导数应在 $(x_2, y_2)$ 取值。为了证明 $S_2$ 是结点，只须证明

$$(P_x+Q_y)^2-4(P_xQ_y-P_yQ_x)=(P_x-Q_y)^2+4P_yQ_x$$
$$=(\delta+(2l+1)x_2)^2+4ax_2(2ny_2-1)>0. \qquad (20.16)$$

这可由双曲线

$$-y+\delta x+lx^2+ny^2=0$$

的中心在$\left(-\frac{\delta}{2l}, \frac{1}{2n}\right)$看出。因为当 $x_2<0$ 时，有 $y_2>\frac{1}{2n}$，故

$$4ax_2(2ny_2-1)>0. \qquad (20.17)$$

反之，当 $x_2>0$ 时，有 $y_2<\frac{1}{2n}$，(20.17) 式仍然成立。由 (20.17) 式即可导出(20.16)式。

对方程 (20.14) 来说，无限远奇点的坐标不随 $\delta$ 而变。确定 $1+ax-y=0$ 上的奇点的方程是：

$$G(x)=(l+na^2)x^2+(2an-a+\delta)x+n-1=0. \qquad (20.18)$$

其判别式为

$$\Delta=(a+\delta)^2+4(1-n)(l-a\delta). \qquad (20.19)$$

发散量直线为

$$P_x+Q_y=\delta+(2l-1)x=0. \qquad (20.20)$$

下面对 $l$ 的不同情况分别研究：

1) $l>\frac{1}{2}$

若 $\delta<0$，则直线(20.20)在 $y$ 轴右方。由(20.18)看出 $S_1$、$S_2$ 总存在。虽然它们的位置因 $\delta$ 的不同而变，但 $S_1$ 总在 $y$ 轴右边，$S_2$ 总在 $y$ 轴左边，所以它们都是鞍点。

当 $\delta$ 从零减小时，在 $1+ax-y=0$ 下方的分界线逆时针方向旋转；在 $1+ax-y=0$ 上方的分界线顺时针方向旋转，$S_1$、$S_2$ 的位置向右移。为了说明上述事实，只须注意对 (20.14) 有：

$$\frac{\partial\theta}{\partial\delta}=\frac{1}{P^2+Q^2}\begin{vmatrix} P & x(1+ax-y) \\ x & 0 \end{vmatrix}$$
$$=\frac{-x^2(1+ax-y)}{P^2+Q^2}.$$

上式右方在 $1+ax-y=0$ 下方为负，上方为正。故由旋转向量场的理论(见[20.8]中的§3)即可看出 $\delta$ 变动时分界线的转动方向。其次，由(20.18) $G(x_i)=0$ 对 $\delta$ 求导，视 $x_i$ 为 $\delta$ 的函数，可解出：

$$\frac{\partial x_i}{\partial \delta}=-\frac{x_i}{\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x_i}}. \tag{20.21}$$

当 $l+na^2>0$ 时，有 $\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x_2}>0$，$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x_1}<0$ (其中 $x_2<0<x_1$)。由此可见(20.21)式右方常为负，故 $\delta$ 减少时，$S_1$、$S_2$ 都向右移。

注意：当 $\delta<0$ 时，$O$ 由不稳定细焦点变为稳定粗焦点，故在它外部邻近出现一个不稳定环 $\Gamma_1$。它随 $\delta$ 的减小而不断扩大。另一方面，发散量直线(20.20)随 $\delta$ 的减小而不断向右平移。当 $\Gamma_1$ 存在时，它必与(20.20)相交，故若 $\operatorname{div}|_{S_1}>0$，则说明 $\Gamma_1$ 扩大最后成为通过 $S_1$ 的分界线环而消失，这时 $O$ 外最多只能有一个环。

但 $\Gamma_1$ 扩大成为分界线环时也可能有 $\operatorname{div}|_{S_1}<0$。因为确定过 $S_i(x_i, y_i)$ 的两分界线在此点的斜率的方程是：

$$k=\frac{ax_i-x_ik}{\delta+2lx_i+(2ny_i-1)k}$$

或

$$(2ny_i-1)k^2+[(2l+1)x_i+\delta]k-ax_i=0\,(i=1,\ 2). \tag{20.22}$$

如果 $2ny_1-1>0$，则因 $-ax_1>0$，故(20.22)的两根同号。今若 $l>\frac{1}{2}$ 而 $l-\frac{1}{2}\ll 1$，则对适当的 $\delta<0$，就有可能同时有下式成立：

$$(2l+1)x_1+\delta>0 \text{ 和 } \operatorname{div}|_{S_1}=(2l-1)x_1+\delta<0^{1)}.$$

即 $S_1$ 已在直线(20.20)的左边，且过 $S_1$ 的两分界线都在 $S_1$ 有负的斜率。于是 $O$ 外围两分界线(都过 $S_1$)如图 20.6 所示。这时直线(20.20)仍可能和 $O$ 外的极限环相交。故若 $\Gamma_1$ 仍存在，则它不能扩大而通过 $S_1$。反之，过 $S_1^2$ 的分界线环将先形成，然后

1) 当以 $x_1$ 的值(由(20.18)解出)代入 $(2l-1)x_1+\delta=0$ 后，可导出 $\delta$ 的二次方程。可以证明当 $l>0$，$0<n<1$ 时此方程必有一正根和一负根。

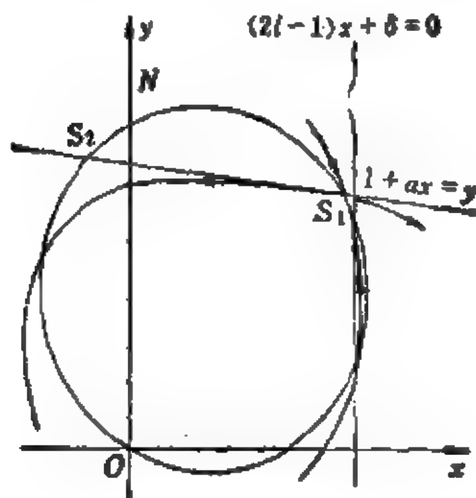



图 20.6

变为稳定环 $\Gamma_2$ 缩小，最后与 $\Gamma_1$ 重合而消失。因此这时 $O$ 外围就可能存在两个极限环[1)]。

另一方面，当 $\delta$ 从零减小时，$N$ 由稳定细焦点变为稳定粗焦点，且由图 20.1(a) 中从 $S_2$ 进入 $N$ 的分界线的转向可知 $N$ 外围始终不出现极限环。这事实也可由文献[20.10]的定理1得出。

于是就得到极限环的 (1, 0) 或 (2, 0) 分布，这里前面的数字表示 $O$ 外的极限环个数，后面的数字表示 $N$ 外的极限环个数。

反之，若 $\delta>0$，则 $O$ 外无环，而 $N$ 外围出现极限环 $\Gamma_1'$。注意：当 $\delta$ 从零减少（增大）时，椭圆

$$-y+\delta x+lx^2+ny^2=l\left(x+\frac{\delta}{2l}\right)^2+n\left(y-\frac{1}{2n}\right)^2-\frac{l+n\delta^2}{4nl}=0$$

一面扩大，一面向右（左）平移，两鞍点 $S_1$ 与 $S_2$ 亦沿着 $1+ax-y=0$ 向右(左)移(图 20.7)。故若当 $\delta<0$ 时，$S_1^-$ 的 $y$ 坐标满足 $2ny_1^--1>0$，则当 $\delta>0$ 时，$S_2^+$ 的 $y$ 坐标必满足 $2ny_2^+-1>0$。现在 $-ax_2^+<0$，故在 $S_2^+$ 的两分界线的斜率一正一负，于是当 $\Gamma_1'$ 存

1) 对于具数字系数的(Ⅱ)类方程，[20.9]中所得到的使 $O$ 外存在两个环的 $\delta$ 的区间非常小。对于方程(20.14)，看来这一区间也是很小的，又由此看出[20.3]定理 2 和[20.5]定理 1 的证明不够严格。虽然如此，根据§2 的性质3，我们仍相信(20.14)在 $O$ 外部极限环若存在，必为唯一，以后仿此。

图 20.7

在时，必有 $\mathrm{div}|_{S_2^+}<0$，即直线(20.20)应把$N$和$S_2^+$分开。因此$\Gamma_1'$扩大最后必成为通过$S_2^+$的分界线环而消失。故这时$N$外围最多只能有一个环，即现在只能有(0, 1)分布，不能有(0, 2)分布。

仿此，如果当$\delta>0$时有$2ny_2^+-1<0$，$-ax_2^+<0$，则$N$外围可能会出现两个环。但这时若改令$\delta<0$，则必有$2ny_1^- -1<0$，$-ax_1>0$，即$O$外只能有一个环，不能有两个环。

2)　$l=\frac{1}{2}$

由于当$\delta=0$时(20.1)有两个中心，由旋转向量场理论知道，当$\delta\neq0$时(20.14)没有极限环。

情况1)中的事实表明，由$l=\frac{1}{2}$，$\delta=0$时，有中心$O$与$N$的方程(1)有可能经过$l$与$\delta$的小扰动而得到在$O$外或$N$外有两个极限环的方程(20.14)。当然这一猜想还须用§14的分支理论方法来给出一个严格的证明。

3)　$0\leqslant l<\frac{1}{2}$

如前可知：当$\delta>0$时，(20.14)有(1, 0)或(2, 0)分布的极限环[1]。而当$\delta<0$时它只有(0, 1)分布。或是当$\delta<0$时有(0, 1)

1) [20.10]在附加条件"$\left(1-\frac{1}{n}\right)\beta^2-\delta\beta-1<0$"之下用化为 Lienard 方程的方法证明这时$O$外围极限环的唯一性，其中$\frac{1}{\beta}$是无穷远奇点方程(20.10)的负实根。

或(0, 2)分布，而当 $\delta>0$ 时只有(1, 0)分布。

4) $l<0,\ a<-\sqrt{-\frac{l}{n}}$

注意，现在 $-y+\delta x+lx^2+ny^2=0$ 是双曲线，它的中心是 $\left(-\frac{\delta}{2l},\ \frac{1}{2n}\right)$，故由(20.22)看出不论 $i=1$ 或2，过 $S_i$ 的两分界线的斜率总有一为正，另一为负。因此当 $\delta>0$ 时(20.14)有(1, 0)分布，当 $\delta<0$ 时(20.14)有(0, 1)分布。当有三个(一个)无限远奇点时，全局相图可由图20.3(b)(图20.2(b))导出，不需另画了。

5) $l<0,\ 0>a>-\sqrt{-\frac{l}{n}},\ a^2+4l(1-n)>0$

已知 $\delta=0$ 时，(20.14)有四个有限远奇点，且 $S_1$、$S_2$ 在 $y$ 轴的同一端。当 $\delta\neq0$ 时决定(20.18)是否有实根的判别式(20.19)可写为：

$$\Delta=\delta^2+2(2na-a)\delta+a^2+4l(1-n)。\qquad(20.23)$$

上式右端作为 $\delta$ 的二次式，它的判别式是：

$$\Sigma=(2an-a)^2-4l(1-n)-a^2=4(n-1)(l+na^2)>0。\qquad(20.24)$$

故 $\Delta=0$ 常有两个同号实根 $\delta_1<\delta_2$。当 $\delta\in(\delta_1,\ \delta_2)$ 时 $\Delta<0$，(20.18)无实根，即 $S_1$、$S_2$ 消失。当 $\delta\in(-\infty,\ \delta_1)$ 时 $S_1$、$S_2$ 在 $y$ 轴左方；当 $\delta\in(\delta_2,\ +\infty)$ 时 $S_1$、$S_2$ 在 $y$ 轴右方。事实上，由(20.14)可以看出：当 $\delta$ 增加时 $P(x,\ y)=0$ 的两条渐近线一起向右平移，故由图20.4(a)看出，$\delta$ 增加时 $S_1$ 与 $S_2$ 逐渐接近，重合而消失于 $\delta=\delta_1$ 时。然后当 $\delta\geqslant\delta_2$ 时 $P(x,\ y)=0$ 的下支上出现新的二重奇点，分裂成为鞍点 $S_1$ 与结点 $S_2$，过 $S_1$ 的两分界线包向 $O$。

当 $n>\frac{1}{2}$ 时，$\delta_1$ 与 $\delta_2$ 同号为正；当 $n<\frac{1}{2}$ 时，$\delta_1$ 与 $\delta_2$ 同号为负。但在5)之下不能有 $n=\frac{1}{2}$，因为 $n=\frac{1}{2}$ 时，

$$na^2+l=\frac{a^2+2l}{2}<0。$$

另一方面却又有 $a^2+4l(1-n)=a^2+2l>0$。矛盾。

为确定起见，现在设 $\frac{1}{2}<n<1$，于是 $0<\delta_1<\delta_2$。当 $\delta=0$ 时，有图 20.4(b) 或 20.4(c)。当 $\delta$ 从零增大时，$O$ 成为不稳定焦点，外围出现稳定环 $\Gamma_1$。在有三个无限远奇点的情况，由图 20.4(b) 出发，分界线 $l_5$ 和 $l_6$ 都绕着无限远奇点 $C$ 和 $B'$ 沿顺时针旋转，因此二者接近，重合而后交换位置。如果以上事实发生在 $\delta=\delta_2$ 以前，则 $l_5$ 与 $l_6$ 的重合正好出现在 $\Gamma_1$ 扩大成为无限大分界环的时候。这一事实的详细证明可以参看[20.1]的 p.169。在那里详细计算了(20.14)在两无限远鞍点 $C$ 与 $B'$ 的特征根，并证明了当 $l_5$ 与 $l_6$ 重合而成为无限大分界环时它应该是内稳定的，这只有当 $\Gamma_1$ 恰好扩大成为分界环时才是可能的。

如果当 $\delta=\delta_2$ 时 $l_5$ 与 $l_6$ 的相对位置仍和图 20.4(b) 一样未变动，则当 $\delta>\delta_2$ 时，在 $P(x, y)=0$ 的下支 $O$ 点的右方出现新的鞍点 $S_1$ 以及过 $S_1$ 而包向 $O$ 的两分界线。它们的斜率一正一负。由于 $\operatorname{div}|_{S_1}<0$，过 $S_1$ 的这两分界线应重合于 $\Gamma_1$ 扩大到达 $S_1$ 之时。所以不论在哪一种情况，$O$ 外围只能有一个极限环。至于 $N$ 外围，如前可知，当 $\delta>0$ 时没有极限环。因此，(20.14)有(1, 0)分布。

在有一个无限远奇点的情况，由图 20.4(c) 看出，$\Gamma_1$ 必在 $\delta>\delta_2$ 以后扩大成为过(新产生的)鞍点的分界线环而消失，(20.14)仍有(1, 0)分布。

当 $n<\frac{1}{2}$ 而 $\delta_1<\delta_2<0$ 时如前可证当 $\delta<0$ 时，有(0, 1)分布。

6) $l<0,\ 0>a>-\sqrt{-\frac{l}{n}},\ a^2+4l(1-n)<0$

已知当 $\delta=0$ 时，(20.14)只有两个有限远奇点 $O$ 与 $N$，全局相图如图 20.5(b) 或 20.5(c)。由(20.23)式看出，这时 $\delta_1<0<\delta_2$ 是 $\Delta=0$ 的两实根。当 $\delta\in(\delta_1, \delta_2)$ 时 $\Delta<0$，(20.14)仍只有两个有限远奇点 $O$ 与 $N$，其中之一的外围有一个极限环。但当 $\delta$ 增加

到大于 $\delta_2$ 时，$O$ 的右方将出现新的鞍点 $S_1$。同样，若 $\delta$ 减少到小于 $\delta_1$，则 $N$ 的左方将出现新的鞍点。仿前一样讨论可知：当 $\delta>0$ 时(20.14)有(1, 0)分布，$\delta<0$ 时有(0, 1)分布[1]。

总之，我们已用旋转向量场的方法证明了：对于固定的 $a$, $n$ (20.14)的极限环分布只能有(0,1)、(1,0)和(2,0)三种或(0, 1)、(0, 2)、(1, 0)三种，唯一的缺点只是：和 §14 一样，我们假设当 $\delta$ 变动时(20.14)在那个已知存在的极限环外围不能突然出现半稳定环。关于有两个焦点的二次系统的极限环的唯一性问题在 §21 中还要讨论。

下面回到(2, 2)分布不可能性的证明。

假设有一个二次系统：

$$\dot{x}=-y+\delta_0 x+lx^2+m_0xy+ny^2,\quad \dot{y}=x(1+ax-y), \tag{20.25}$$

其中 $\delta_0>0$、$m_0<0$, $m_0+n\delta_0<0$, $a<0$, $0<n<1$, 即 $O(0, 0)$ 是不稳定粗焦点，$N\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$ 是稳定粗焦点。我们之所以要假设 $O$ 与 $N$ 是粗焦点，乃是因为：如果出现细焦点的话，则可以略略变动方程的系数，使细焦点变为粗焦点(这时可能增添极限环)，然后对所得到的方程来研究极限环分布的问题。至于 $N$ 与 $O$ 具有不同的稳定性，这只是一个暂时的假设。

今再设(20.25)在 $O$ 与 $N$ 外围各有两个极限环：

$$\Gamma_2\supset\Gamma_1\supset O,\quad \Gamma_2'\supset\Gamma_1'\supset N. \tag{20.26}$$

如前，不妨假设它们都是粗环，如果是细环的话，可以略略变动(20.25)的系数，使它们都变为粗环再来讨论。于是 $\Gamma_1$ 与 $\Gamma_2'$ 是稳定环，$\Gamma_2$ 与 $\Gamma_1'$ 是不稳定环。

现在引进两个不同的旋转向量场：

$F_1$：给(20.25)的第一个方程右端加上一项 $\delta_1 x(1+ax-y)$ (其中 $\delta_1$ 是变动参数)。

这样就得到：

---

1) 注意：在条件 $0<n<1$, $a\neq0$ 下(20.14)不可能有过两鞍点 $S_1$, $S_2$ 的积分直线。反之，(20.14)要有过两鞍点的积分直线，必须 $n>1$ 或 $n<0$。

$$\dot{x}=-y+(\delta_0+\delta_1)x+(l+a\delta_1)x^2+(m_0-\delta_1)xy+ny^2,$$
$$\dot{y}=x(1+ax-y)。\qquad (20.27)$$

由于这时

$$\frac{\partial\theta}{\partial\delta_1}=\frac{-x^2(1+ax-y)^2}{(P^2+Q^2)},\quad \theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{Q}{P},\qquad (20.28)$$

可知(20.27)是以 $\delta_1$ 为参数的全平面广义旋转向量场。当 $\delta_1$ 增加(减少)时，(20.27)在平面上除 $x=0$ 和 $1+ax=y$ 上的点以外，每一点的向量都沿顺(逆)时针旋转，分界线则绕着它所经过的奇点沿顺(逆)时针旋转。

$F_2$: 给(20.25)或(20.27)的第一方程右端再加上一项 $\delta_2x$ ($\delta_2$ 是变动参数)。

当施行 $F_2$ 于(20.27)时，则得到

$$\dot{x}=-y+(\delta_0+\delta_1+\delta_2)x+(l+a\delta_1)x^2+(m_0-\delta_1)xy+ny^2,$$
$$\dot{y}=x(1+ax-y)。\qquad (20.29)$$

由于

$$\frac{\partial\theta}{\partial\delta_2}=\frac{-x^2(1+ax-y)}{P^2+Q^2},\qquad (20.30)$$

可知当 $\delta_2$ 增加(减少)时，(20.29)在 $1+ax-y=0$ 上方每一点(除 $y$ 轴上的点以外)的向量都沿逆(顺)时针旋转，在 $1+ax-y=0$ 下方每一点($y$ 轴除外)的向量都沿顺(逆)时针旋转，分界线也是如此，故 $F_2$ 构成半平面广义旋转向量场。

由旋转向量场的理论(见文献[20.8]中§3)知道四个极限环 $\Gamma_i$ 与 $\Gamma_i'$($i=1,2$)在 $F_1$ 与 $F_2$ 之下扩大或缩小的情况可以用下面的表 20.1 表示之。

表 20.1

| | $\Gamma_1$ | $\Gamma_2$ | $\Gamma_1'$ | $\Gamma_2'$ |
|---|---|---|---|---|
| $\delta_1$ 增加 | 扩大 | 缩小 | 扩大 | 缩小 |
| $\delta_1$ 减少 | 缩小 | 扩大 | 缩小 | 扩大 |
| $\delta_2$ 增加 | 扩大 | 缩小 | 缩小 | 扩大 |
| $\delta_2$ 减少 | 缩小 | 扩大 | 扩大 | 缩小 |

今在(20.23)中取 $\delta_1 = m_0$, $\delta_2 = -m_0$, 则得方程:

$$\dot{x} = -y + \delta_0 x + (l + am_0)x^2 + ny^2, \quad \dot{y} = x(1 + ax - y)。\qquad (20.31)$$

上式已具有方程(20.14)的形式。与(20.25)比较,(20.31)的第一方程右端少了一项 $m_0xy$, 添了一项 $am_0x^2$。因此我们看到:确定(20.25)在 $1 + ax - y = 0$ 上的奇点的 $x$ 坐标的方程:

$$(l + m_0a + na^2)x^2 + (\delta_0 + m_0 + 2an - a)x + n - 1 = 0 \qquad (20.32)$$

与确定(20.31)在 $1 + ax - y = 0$ 上的奇点 $x$ 坐标的方程:

$$(l + m_0a + na^2)x^2 + (\delta_0 + 2an - a)x + n - 1 = 0 \qquad (20.33)$$

有相同的首项和末项。

如果 $l + m_0a + na^2 > 0$, 则(20.25)与(20.31)各在 $1 + ax - y = 0$ 上有两个鞍点 $S_1$ 与 $S_2$, 它们分处于 $y$ 轴的两端。当 $l + m_0a + na^2 = 0$ 时,对(20.25)或(20.31)来说,都有 $1 + ax - y = 0$ 上的一结点跑向无限远,而另一鞍点的位置则可能在 $y$ 轴的异侧。例如,当 $\delta_0 + m_0 + 2an - a$ 与 $\delta_0 + 2an - a$ 异号时。当 $l + m_0a + na^2 < 0$ 时,由前面的 4), 5), 6) 知道不论包向奇点 $O$ 或 $N$ 的方程(20.31)的分界线是来自有限远鞍点还是来自无限远鞍点, $O$ 及 $N$ 外围都最多能有一个极限环。

设已知(20.31)的极限环只能有(1, 0), (2, 0)或(0, 1)分布,现在如果(20.25)有(2, 2)分布,则由表 20.1 可知:当 $\delta_1$ 从零减少时 $\Gamma_1$ 将缩小, $\Gamma_2$ 将扩大;当 $\delta_2$ 从零增大时 $\Gamma_1$ 将扩大, $\Gamma_2$ 将缩小。另一方面, $\Gamma_1'(\Gamma_2')$ 在 $F_1$ 与 $F_2$ 之下都将缩小(扩大)。

当 $\Gamma_1$ 缩小到 $O$ 而消失,或 $\Gamma_2$ 扩大成为分界线环而消失时,它们在 $\delta_2$ 增大时都一定会重新出现。但当 $\Gamma_1$ 与 $\Gamma_2$ 在 $F_2$ 之下重合而消失后是否又能在 $F_1$ 的作用下再现呢?这个问题到现在还没有解决[1]。因此,为了避免 $\Gamma_1$ 与 $\Gamma_2$ 重合而消失,我们可以把 $F_1$ 与 $F_2$ 各分成许多部分:

$$F_1 = \sum_i F_{1i}, \quad \delta_1 = m_0 = \sum_i \delta_{1i}, \quad \delta_{1i} < 0 \text{ 对一切 } i,$$

$$F_2 = \sum_i F_{2i}, \quad \delta_2 = -m_0 = \sum_i \delta_{2i}, \quad \delta_{2i} > 0 \text{ 对一切 } i。\qquad (20.34)$$

1) 参见 §23, P.604。

并且把 $F_{1t}$ 与 $F_{2t}$ 交替地作用于方程(20.25)，使得 $\Gamma_1$ 扩大时不会和缩小的 $\Gamma_2$ 重合而消失，那末当方程(20.25)变为(20.31)时，$O$ 外围仍应有两个极限环。这时如果已知(20.31)在 $O$ 外围只能有一个极限环，这就导出矛盾。反之，若(20.31)有(2, 0)分布，则如上的作法得不出矛盾。但我们可以改为研究 $N\left(0, \frac{1}{n}\right)$ 外围极限环的变化情况。类似于(20.4)，在代换(20.3)之下(20.25)变为：

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{d\tau} &= -w + \left(\frac{m_0}{n} + \delta_0\right)\sqrt{\frac{n}{1-n}}\,u + \frac{ln}{1-n}u^2 \\
&\quad - m_0\sqrt{\frac{n}{1-n}}\,uw + nw^2, \\
\frac{dw}{d\tau} &= u\left(1 + \frac{n}{n-1}\sqrt{\frac{n}{1-n}}\,au + \frac{n}{n-1}w\right).
\end{aligned} \tag{20.35}
$$

若改写(20.35)为：

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{d\tau} &= -w + \delta_0' u + l'u^2 + m_0' uw + nw^2, \\
\frac{dw}{d\tau} &= u(1 + a'u + b'w),
\end{aligned} \tag{20.36}
$$

则

$$
\begin{aligned}
&\delta_0' = \frac{m_0 + n\delta_0}{n}\sqrt{\frac{n}{1-n}} < 0,\quad m_0' = -m_0\sqrt{\frac{n}{1-n}} > 0, \\
&l' = \frac{ln}{1-n},\quad m_0' + n\delta_0' = n\delta_0\sqrt{\frac{n}{1-n}} > 0, \\
&a' = \frac{n}{n-1}\sqrt{\frac{n}{1-n}}\,a > 0,\quad b' = \frac{n}{n-1} < 0.
\end{aligned} \tag{20.37}
$$

即 $O'(0, 0)$ 为稳定，而 $N'\left(0, \frac{1}{n}\right)$ 为不稳定。易见(20.36)的另两个奇点的 $u$ 坐标由

$$
\frac{n}{1-n}(l + m_0 a + na^2)\,u^2
$$

$$+\sqrt{\frac{n}{1-n}}(2na+\delta_0+m_0-a)u+n-1=0 \tag{20.38}$$

决定。

现在 $1+a'u+b'w=0$ 有正的斜率，交 $w$ 轴于 $\left(0, \frac{1-n}{n}\right)$，且把 $O'$ 与 $N'$ 分开。包向 $O'$ 的两分界通过 $w$ 轴左方的鞍点 $S_2'(x_2', y_2')$。以后的证明可以和前面一样进行，但现在

$$\delta_1' = \frac{m_0'}{-b'} > 0, \quad \delta_2' = \frac{m_0'}{b'} < 0.$$

对(20.36)施行 $F_1'$ 和 $F_2'$ 之后，得到

$$\frac{du}{d\tau} = -w+\delta_0'u+\left(l'-\frac{a'm_0'}{b'}\right)u^2+mw^2,$$

$$\frac{dw}{d\tau} = u(1+a'u+b'w). \tag{20.39}$$

由前知(20.31)要在 $O$ 外围有两个极限环，必须：

$$\delta_0>0,\ 0<l+am_0<\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<n<1. \tag{20.40}$$

今在(20.39)中有：

$$\delta_0'<0,\ l'-\frac{a'm_0'}{b'} = \frac{n}{1-n}(l+m_0a)>0. \tag{20.41}$$

故(20.39)的 $P'(u, w)=0$ 是椭圆，当 $\delta_0'=0$ 时，(20.39)的奇点 $O'$ 的稳定性由

$$-a'\left(b'+2l'-\frac{2a'm_0'}{b'}\right) = \frac{n^2a}{(1-n)^2}(2l+2a_0m-1)$$

决定。由(20.40)可知上式为正，故 $O'$ 为不稳定，于是当 $\delta_0'<0$ 时，(20.39)在 $O'$ 外围有不稳定极限环，且 $O'$ 变为稳定焦点。

类似于(20.22)，确定过 $S_2'(x_2', y_2')$ 的两分界线的斜率的方程是：

$$(2my_2'-1)k^2+\left[\left(2l'-\frac{a'm_0'}{b'}+b'\right)x_2'+\delta_0'\right]k-a'x_2'=0. \tag{20.42}$$

现在 $-a'x_2'>0$，$-\frac{1}{b'}=\frac{1-n}{n}<\frac{1}{2n}$，故 $y_2'<\frac{1}{2m}$，从而

$2my_2' - 1 < 0$，即鞍点$S_2'$处的两分界线的斜率为一正一负。这样，(20.39)在$O'$外围最多只能有一个极限环。

因此，若设(20.25)在$N$外围有两个极限环，亦即(20.36)在$O'$外围有两个极限环，从而(20.39)在$O'$外围仍应有两个极限环，与上面所说的相矛盾。

(20.25)不可能有极限环的(2, 2)分布已得到证明。

当$m_0>0$或$m_0<0$而$m_0+n\delta_0>0$，则$O$与$N$同时为(20.25)的不稳定粗焦点。这时表20.1中$\Gamma_1'$与$\Gamma_2'$的稳定性与变化情况都要反过来，但(2, 2)分布不可能性的证明是一样的。

又由上述证明过程不难看出，二次系统极限环的$(2i, 2j)$ ($i$, $j$为正整数)分布也是不可能的。为此，只须在对方程施行$F_1$或$F_2$时保持$O$或$N$外围有两个极限环不消失，就可如前一样导出矛盾了。

本节所用的方法对(3, 1)分布不一定能导出矛盾。因若$\Gamma_3 \supset \Gamma_2 \supset \Gamma_1 \supset O$，在$F_{2i}$之下$\Gamma_1$与$\Gamma_2$相互接近而成为半稳定环$\bar{\Gamma}_i$，在$F_{1i}$之下，$\Gamma_3$与$\Gamma_2$相互接近而成为半稳定环$\Gamma_i^*$ $(i=1, 2, \cdots)$。如果当$i$增大时$\bar{\Gamma}_i$与$\Gamma_i^*$愈来愈接近，则$F_{1i}$与$F_{2i}$所对应的$\delta_1$与$\delta_2$的变动区间也愈来愈小。有可能当$i\to\infty$时，$\bar{\Gamma}_i$与$\Gamma_i^*$趋于重合而$\sum\delta_{1i}=\bar{\delta}_1<m_0$。这时便不可能变(20.25)为(20.31)了。

## 参 考 文 献

[20.1] Ye Yanqian. On the impossibility of (2, 2) distribution of limit cycles of any real quadratic differential system, J. Nanjing Univ., Math.Biquarterly, 1985, no.2, 161～182.

[20.2] Ye Yanqian and Ye Weiyin, On the impossibility of (2, 2) distribution of limit cycles of any real quadratic differential system (I), Ann. of Diff.Eqs.4(1), 1988, 117～130.

[20.3] Ye Yanqian. On the relative position of limit cycles of a real quadratic differential system, Chin.Ann.of Math. 11B(1), 1990, 74～83.

[20.4] Ye Yanqian. Rotated vector fields decomposition method and its applications, Conf.Bif. Closed Orbits of Planar Vector Fields, Marseille,

Lect.Notes in Math.v, 1455, 1991, Springer—Verlag.

[20.5] Ye Yanqian. Oddness of number of limit cycles and the (2, 2) distribution problem for a planar quadratic differential system, Ann. of Diff.Eqs.7(4), 1991, 469~475.

[20.6] 罗定军. 方程 $\frac{dy}{dx}=\sum_{0\le i+j\le 2} q_{ij}x^iy^j/\sum_{0\le i+j\le 2} p_{ij}x^iy^j$ 所定义的积分曲线的定性研究(Ⅳ): Ⅱ类方程. 南京大学学报(数学版), 1963, no.1, 36~50.

[20.7] 孙开谂. 方程 $\frac{dy}{dx}=\sum_{0\le i+j\le 2} q_{ij}x^iy^j/\sum_{0\le i+j\le 2} p_{ij}x^iy^j$ 的定性研究. 厦门大学学报, 1965, 12, no.1, 36~50.

[20.8] 叶彦谦等. 极限环论. 上海科学技术出版社, 1984.

[20.9] Zhao Shenqi. The qualitative-numerical analysis of the limit cycle bifurcation for system of type $(\mathrm{I})_{l=0}$, Ann. of Diff.Eqs. 3(2), 1987, 213~224.

[20.10] Sun Jianhua. Uniqueness and bifurcation of limit cycle for quadratic system $(\mathrm{II})_{m=0}(0<n<1)$, Ann. of Diff.Eqs. 8(4), 1992, 463~468.

# § 21. 二次系统极限环(2, 2)分布不可能的其他证明

在上一节中我们已用旋转向量场分解法证明了二次系统极限环(2, 2)分布的不可能性。近年来张平光深入研究了一般二次系统当存在两个焦点时极限环的唯一性问题[21.1]、[21.2]，作为推论也就证明了在一定条件下二次系统不可能有极限环的(2, 2)分布。本节主要介绍他的工作，但有所改进和简化。

考虑二次系统：

$$\dot{x} = -y + \delta x + lx^2 + mxy + y^2, \quad \dot{y} = x(1 + ax + by). \tag{21.1}$$

它在 $y$ 轴上有两个奇点 $O(0, 0)$ 与 $N(0, 1)$。我们不妨要求 $N$ 也是焦点，则应有：

$$b < -1, \ (m+\delta)^2 + 4(1+b) < 0. \tag{21.2}$$

又不妨设

$$a > 0, \tag{21.3}$$

否则，变更 $x$ 与 $t$ 的符号即可达到目的。$1 + ax + by = 0$ 与 $y$ 轴交于 $M\left(0, -\dfrac{1}{b}\right)$，$M$ 应在 $O$ 与 $N$ 之间，又易见 $1 + by = 0$ 为无切直线，除 $M$ 点以外，因为在此直线上有 $\dot{y} = ax^2 \geqslant 0$。又发散量直线

$$P_x + Q_y = \delta + (2l + b)x + my = 0 \tag{21.4}$$

交 $y$ 轴于 $R\left(0, -\dfrac{\delta}{m}\right)$。当 $O$ 与 $N$ 都是粗焦点时，若它们有不同的稳定性，则当 $\delta > 0 (< 0)$ 时有 $\delta + m < 0 (> 0)$，故 $\delta$ 与 $m$ 异号，且 $|\delta| < |m|$，而 $R$ 位于 $O$ 与 $N$ 之间。若 $O$ 与 $N$ 有相同的稳定性，则当 $\delta > 0 (< 0)$ 时有 $\delta + m > 0 (< 0)$，于是或是 $m$ 与 $\delta$ 同号，而 $R$ 在

$O$下方，或是$m$与$\delta$异号，且$|m|<|\delta|$，而$R$在$N$上方。当$R=N$时$N$为细焦点，这时$m=-\delta$；$R=O$时$O$为细焦点，这时$\delta=0$。

$1+ax+by=0$上最多有两个奇点$S_1$与$S_2$，其横坐标应满足二次方程：

$$\Psi(x)=(lb^2+a^2-mab)x^2+(ab+2a+b^2\delta-bm)x+1+b=0. \tag{21.5}$$

若$lb^2+a^2-mab>0$，则由于$1+b<0$，故$S_1$与$S_2$分别位于$y$轴的两边，四个点$O$、$N$、$S_1$、$S_2$构成一个凸四边形的顶点，故由Berlinskii的定理知道$S_1$与$S_2$都是鞍点。若$lb^2+a^2-mab<0$，则或$S_1$与$S_2$位于$y$轴的同一边(可能重合)，或是(21.5)有两个复根，$S_1$与$S_2$在实平面上不存在。当$S_1$与$S_2$存在时，$O$、$N$、$S_1$、$S_2$构成一个凹四边形的顶点，故二者之中那较靠近$y$轴的是鞍点，另一是结点。若$lb^2+a^2-mab=0$，而$ab+2a+b^2\delta-bm\neq0$，则$1+ax+by=0$上有一结点跑向无限远，与赤道上一奇点重合成为高阶奇点，若$lb^2+a^2-mab=ab+2a+b^2\delta-mb=0$，则$1+ax+by=0$上的两个奇点都跑向无限远。

为了后面的需要，我们先证明两个有关极限环集中分布的引理：1)

**引理21.1**[21.1] 若$ma(b+2l)\geqslant0$，则(21.1)的极限环必集中分布。具体地说，若$m\neq0$，且$-\frac{\delta}{m}\geqslant(\leqslant)-\frac{1}{b}$，则奇点$O(N)$外围不存在极限环。又当$m=0$或$b+2l=0$时，极限环亦为集中分布。

**证** 取Dulac函数

$$B(x,y)=(1+by)^{-\frac{2l+b}{b}}=(1+by)^k,$$

则

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)$$
$$=(1+by)^{k-1}[(1+by)(\delta+my)-a(b+2l)x^2]$$

1) 由§20知道，当$m=0$时(21.1)的极限环必为集中分布。

$$=(1+by)^{k-1}G(x,\ y).\tag{21.6}$$

当 $ma(b+2l)>0$ 时，$G(x,\ y)=0$ 为一椭圆，它位于直线 $y=-\frac{\delta}{m}$ 与(21.1)的无切直线 $1+by=0$ 所夹的带域中，如图 21.1 所示。

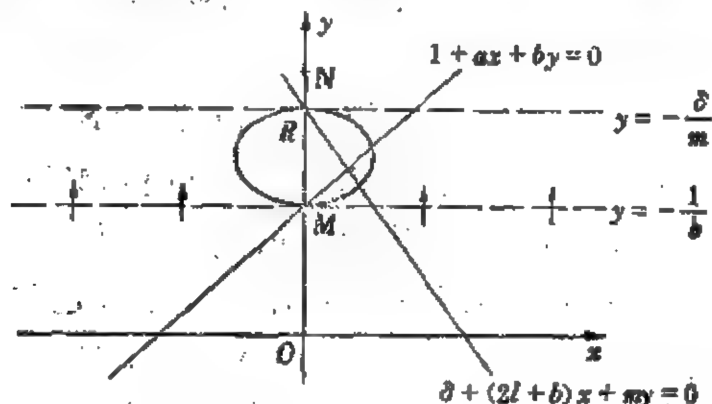



图 21.1

今若 $-\frac{\delta}{m}\geqslant-\frac{1}{b}$，则由于 $y=-\frac{1}{b}$ 是无切直线可知 $O$ 外的闭轨不可能与 $G(x,\ y)=0$ 相交，因而不能存在。同理可证，若 $-\frac{\delta}{m}\leqslant-\frac{1}{b}$，则 $N$ 外围不存在闭轨线。

当 $m=0$ 时 $G(x,\ y)=0$ 为抛物线，$b+2l=0$ 时 $G(x,\ y)=0$ 为两平行直线，证明类似[1]。$m=b+2l=0$ 而 $\delta\neq0$ 时(21.1)没有极限环；若 $\delta=0$ 则 $O$ 与 $N$ 同为中心。■

注 21.1 在引理 21.1 中对 $S_1$ 与 $S_2$ 的存在性和位置不作任何假定。又在证明中用到 $b<0$ 的条件。故当 $b>0$ 而 $\delta=0$ 时，若取 $n=0$，$m=1$，$a>0$，$l>0$，虽然 $ma(b+2l)>0$，但 $O$ 外仍可能有极限环。

引理 21.2[21.1] 若 $a-mb\leqslant0$，且 $m+\delta>0\ (\delta<0)$，则(21.1)在 $O(N)$ 外围不存在极限环，因而当 $a-mb\leqslant0$ 时，(21.1)的极限环必集中分布[2]。

证 在条件 $a-mb\leqslant0$ 时必有 $m<0$。如果 $b+2l\leqslant0$，则

1) 这时 $O$ 与 $N$ 外极限环的有无由 $l$, $b$ 与 $\delta$ 决定，详情见 §20。

2) 此引理当 $m=0$ 时不成立。

$ma(b+2l)\geqslant 0$，由引理21.1知当$m+\delta>0(\delta<0)$时，在$O(N)$外围不存在极限环。

今设$b+2l>0$，则$l>0$。这时$G(x,y)=0$为双曲线，引理21.1的证明方法已行不通。记$\delta=r_0a$，$m=-ra$，则(21.1)成为

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+r_0ax+lx^2-raxy+y^2=P(x,y),\\ \dot{y}=x(1+ax+by)=Q(x,y).\end{cases} \tag{21.7}$$

再作比较方程：

$$\dot{x}=-y+lx^2+y^2=P_0(x,y),\quad \dot{y}=x(1+by)=Q_0(x,y). \tag{21.8}$$

(21.8)有奇点：

$$O(0,0),\ N(0,1),\ R_1\left(\frac{1}{b}\sqrt{\frac{1+b}{-l}},\ -\frac{1}{b}\right),$$

$$R_2\left(\frac{-1}{b}\sqrt{\frac{1+b}{-l}},\ -\frac{1}{b}\right),$$

且$O$与$N$是中心。今设(21.7)的方向场与$x$轴的倾角为$\alpha_a$，(21.8)的倾角为$\alpha_0$，记$\theta=\alpha_a-\alpha_0$，则：

$$\sin\theta=\frac{1}{H}(P_0Q-Q_0P)=\frac{ax^2}{H}\Omega(x,y), \tag{21.9}$$

其中

$$H=\sqrt{P_0^2+Q_0^2}\sqrt{P^2+Q^2},$$
$$\Omega=-y+lx^2+y^2-(r_0-ry)(1+by). \tag{21.10}$$

$P_0(x,y)=0$与$\Omega(x,y)=0$的交点为：

$$R_1、R_2\text{和}M_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{r_0}{lr}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)},\ \frac{r_0}{r}\right).$$

但$M_{1,2}$仅当$0\leqslant\frac{r_0}{r}\leqslant 1$时存在。

今设$a-mb<0$，$m+\delta>0$，则$1+rb<0$，$r_0-r>0$。由于$\Omega(0,y)$的二次项系数为负，常数项亦为负，又$\Omega\left(0,-\frac{1}{b}\right)=\frac{1+b}{b^2}<0$，$\Omega(0,1)=(r-r_0)(1+b)>0$，故双曲线$\Omega(x,y)=0$的两顶点都在$1+by<0$平面内(图21.2所示)。注意：现在(21.8)在$O$

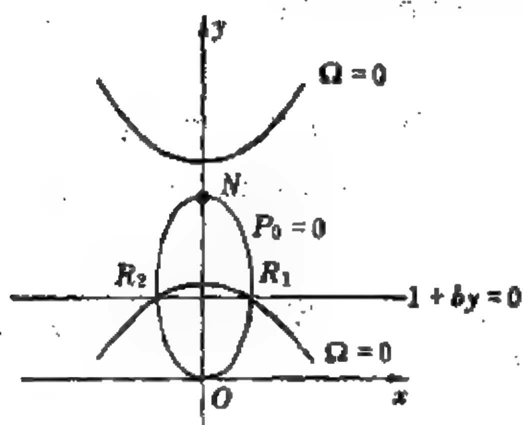



图 21.2

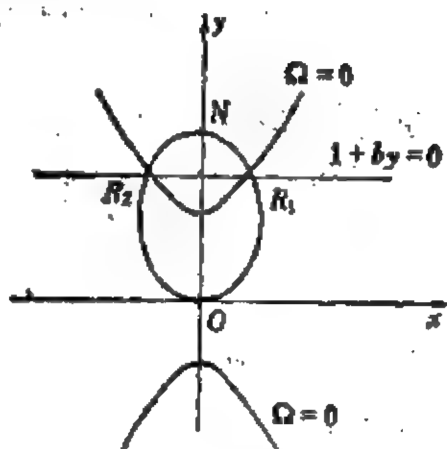



图 21.3

外有一系闭轨线，而在双曲线 $\Omega=0$ 的下支的下方有 $\sin\theta\leqslant 0$，即(21.7)的轨线都从(21.8)的闭轨穿出，因而(21.7)或(21.1)在 $O$ 外围没有极限环。类似地可证：当 $\delta<0$ 时(21.1)在 $N$ 外围不存在极限环(图 21.3 所示)。

当 $a-mb=0$ 时 $\Omega=0$ 是一顶点在 $y$ 轴上的抛物线。证明与前类似。∎

下面先从 $1+ax+by=0$ 与 $P_x+Q_y=0$ 的斜率和相对位置的各种可能情况来看看是否有办法用简单的推理得出一些极限环集中分布的结果[1]。

先设 $lb^2+a^2-mab>0$，则 $1+ax+by=0$ 上有两个鞍点 $S_1$ 与 $S_2$，分别位于 $y$ 轴的左右两方。

I) $-\dfrac{\delta}{m}>-\dfrac{1}{b}$

这时 $R$ 在 $M$ 上方，但 $R$ 可能在 $N$ 下方或上方。

1) (21.4)的斜率非负，且小于 $1+ax+by=0$ 的斜率。

这时 $S_2$ 可能在(21.4)的上方或下方，但 $S_1$ 必在(21.4)的下方。由于 $\overline{S_1S_2}$ 上的轨线都是从右到左穿过 $1+ax+by=0$ (见图 21.4，其中的虚线表示 $P_x+Q_y=0$ 的另一可能位置)，$O$ 点外围若存在极限环 $\Gamma$，由于 $\Gamma$ 的最高点应在 $y$ 轴上，且它又必须与 $P_x+Q_y=0$ 相交，又由 $1+ax+by=0$ 上轨线的穿过方向知 $\Gamma$ 必

[1] 以下的分析不适用于 $m=0$ 的情况，这时直线(21.4)平行于 $y$ 轴，$R$ 不存在。

包含 $S_1$ 在其内部，这是不可能的。因此极限环只能出现在 $N$ 外围[1]。

2) (21.4)的斜率为正，且大于 $1+ax+by=0$ 的斜率。

这时若 (21.4) 不分开 $O$ 与 $N$ 又不分开 $O$ 与 $S_1$ (见图 21.5 的虚线)，则如 1) 可证 $O$ 外不存在极限环。若(21.4)分开 $O$ 与 $N$，或分开 $O$ 与 $S_1$，则有

$$\operatorname{div}|_O\cdot\operatorname{div}|_N<0 \text{ 或 } \operatorname{div}|_O\cdot\operatorname{div}|_{S_1}<0.$$

极限环的分布和唯一性问题，留待以后讨论。

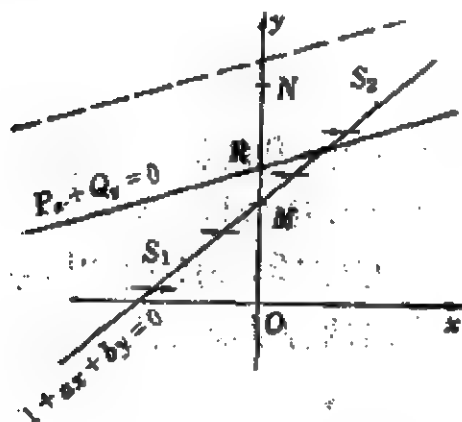



图 21.4

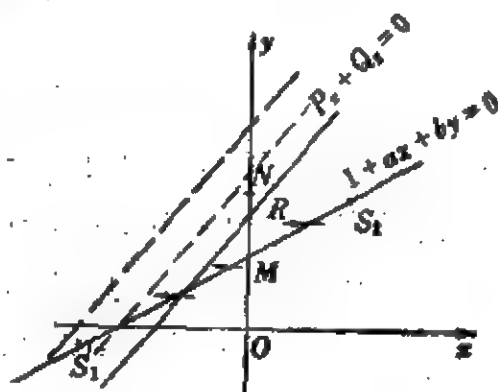



图 21.5

3) (21.4)的斜率为负。

这时有 $\dfrac{2l+b}{m}>0$，从而 $ma(b+2l)>0$，由引理 21.1 知 $O$ 外围不存在极限环。

I) $-\dfrac{b}{m}\leqslant-\dfrac{1}{b}$

即 $R=M$ 或 $R$ 在 $M$ 下方，这时 $R$ 可能在 $O$ 上方或下方，或 $R=O$。

4) (21.4)的斜率非负，且不大于 $1+ax+by=0$ 的斜率。

这时 $S_1$ 可能在 (21.4) 的上方或下方，不论在哪种情况，都可

1) 这时有 $ma(2l+b)<0$，引理 21.1 已无能为力，但这里仍得出 $O$ 外无环的结论。主要用到(21.4)的斜率小于 $1+ax+by=0$ 的斜率。

像1)一样证明$N$外围没有极限环(图21.6所示)。结论和引理21.1一样，但现在有$ma(2l+b)\leqslant 0$。

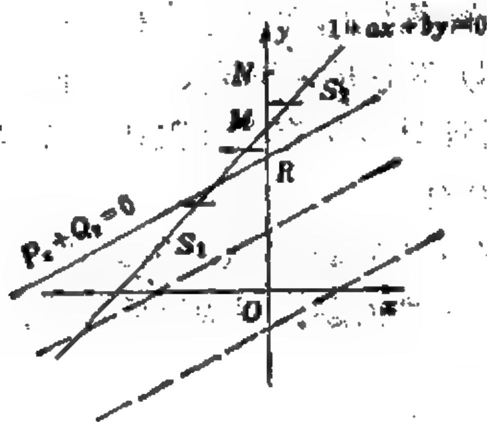



图 21.6

5) (21.4)的斜率为正，且大于$1+ax+by=0$的斜率。

这时若$R$介于$O$与$M$之间(图21.7所示)，则(21.4)必分开$N$与$O$，故有$\mathrm{div}|_O\cdot\mathrm{div}|_N<0$。若$R$在$O$下方(图21.8)，则(21.4)不分开$O$与$N$，故有$\mathrm{div}|_O\cdot\mathrm{div}|_N>0$，在这两种情况无法证明极

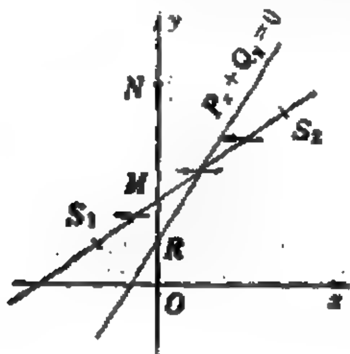



图 21.7




图 21.8

限环必为集中分布，留待以后再讨论唯一性问题。

6) (21.4)的斜率为负。

与3)一样可证这时$N$外围不存在极限环。

**引理 21.3**　若 $lb^2+a^2-mab>0$，且$\mathrm{div}|_{S_1}\cdot\mathrm{div}|_{S_2}>0$，则(21.1)的极限环必集中分布。

**证**　这时可能出现图21.9、21.10、21.11三种情况。在图21.9中(21.4)的斜率为正，但不大于$1+ax+by=0$的斜率，这时

如前面的I)1)一样可证$O$(或$N$)外无环，在图21.10中(21.4)的斜率大于$1+ax+by=0$的斜率．如前可证$N$(或$O$)外无环．在图21.11中$P_x+Q_y=0$的斜率为负，由引理21.1知极限环应集中分布．∎

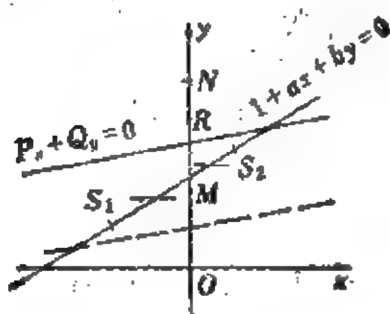



图 21.9

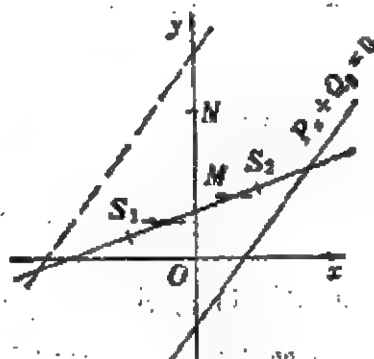



图 21.10

其次讨论$lb^2+a^2-mab\leqslant0$，但$1+ax+by=0$上至少有一奇点(必为鞍点或鞍结点)的情况．不妨设它们都在$y$轴左方．

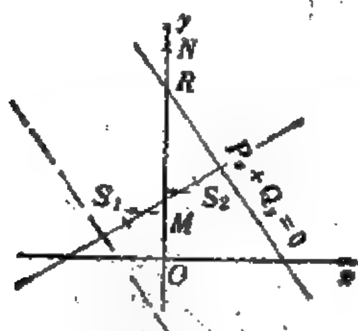



图 21.11

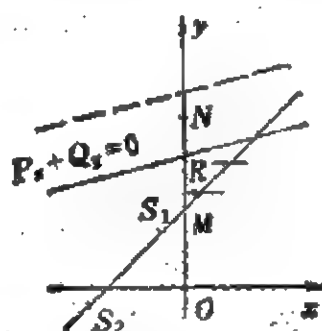



图 21.12

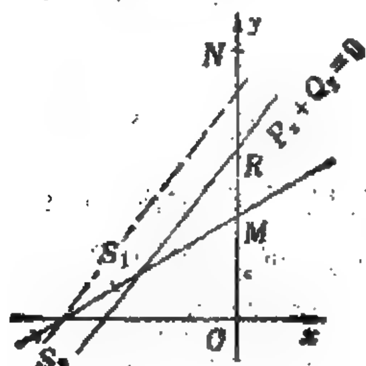



图 21.13

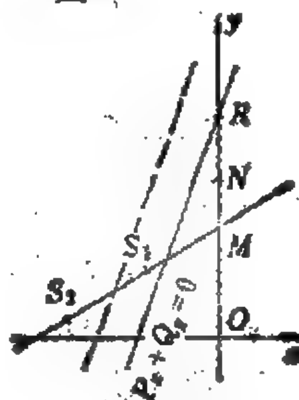



图 21.14

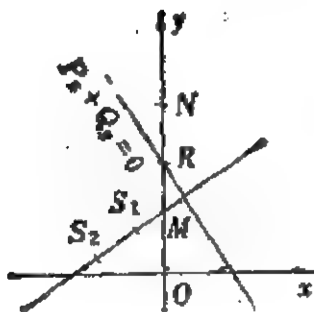



图 21.15

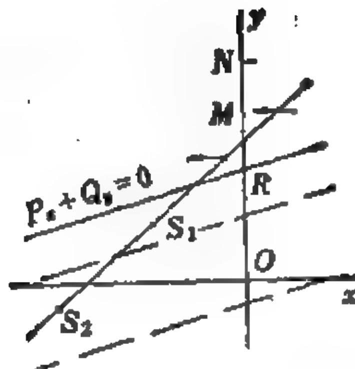



图 21.16

Ⅲ)　$-\frac{\delta}{m}>-\frac{1}{b}$（$R$在$M$上方）

根据(21.4)的斜率为正（小于或大于$1+ax+by=0$的斜率）或为负，可以画出四个图（图 21.12～图21.15），如前易见在图21.12中 $O$ 外无环，在图 21.15 中由引理 21.1 知，极限环应集中分布。在图 21.13 中有 $\text{div}|_O\cdot\text{div}|_N<0$，在图 21.14 中则有 $\text{div}|_O\times\text{div}|_N>0$，在这两图中极限环的唯一性问题留待以后再讨论。

Ⅳ)　$-\frac{\delta}{m}\leqslant-\frac{1}{b}$（$R=M$或$R$在$M$下方）

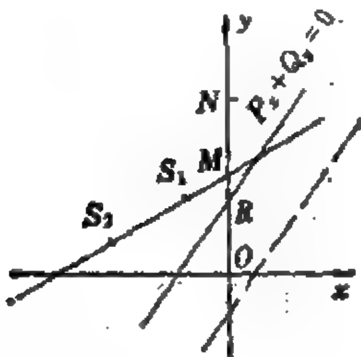



图 21.17

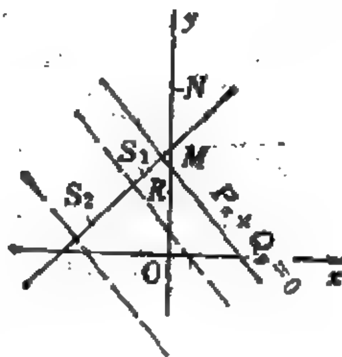



图 21.18

如前易见在图 21.16 中$N$外围没有极限环，在图 21.18 中，由于(21.4)有负斜率，故极限环必集中分布。在图21.17 中有 $\text{div}|_O\cdot\text{div}|_N<0$，极限环的唯一性问题以后再讨论。

为了解决前面遗留下来诸图中极限环的分布和唯一性问题，我们需要一个引理：

**引理 21.4** 设在方程：

$$\dot{x}=y-F(x),\quad \dot{y}=-g(x) \tag{21.11}$$

中下列诸条件成立：

1) 存在 $x_{02}<0<x_{01}$，使当 $x\in(x_{02},x_{01})$ 时有 $g(x)\in C^1$，$F(x)\in C^2$。

2) 当 $x\in(x_{02},x_{01})$ 且 $x\neq 0$ 时有 $xg(x)>0$。

3) 存在 $x_0$、$x_{02}<x_0<0$，使当 $x\in(x_{02},x_0)$ 时有 $f(x)<0(>0)$，当 $x\in(x_0,x_{01})$ 时有 $f(x)>0(<0)$，这里 $f(x)=F'(x)$。

4) 当 $x\in(x_{02},x_0)\cup(0,x_{01})$ 时有

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)<0(>0)。$$

则方程(21.11)在带域 $x_{02}<x<x_{01}$，$-\infty<y<+\infty$ 中至多有一个极限环。

要证这个引理，只须验证文献 [21.3] 定理 6.4 的一切条件即可，在此从略。

**定理 21.1** 若方程(21.1)满足条件：

1) 奇点 $O$ 与 $N$ 同为焦点，且 $lb^2+a(a-mb)>0$；

2) $\operatorname{div}|_O\cdot\operatorname{div}|_N\geqslant 0$。

则(21.1)必在其中一焦点外围最多有一极限环，更具体地说，若 $m\delta<0$，$\delta(m+\delta)\geqslant 0$[1)]，则在 $O$ 外围最多有一个极限环(图21.5中的虚线)；当 $m\delta\geqslant 0$ 时在 $N$ 外围最多有一极限环(图 21.8)。

先证明下面一个引理：

**引理 21.5** 若在方程(21.1)中 $m(b+2l)<0$，且

1) $(b+2l)\lambda+m<0(>0)$，$m<0(>0)$，

或 2) $b+2l+m\lambda(l-a\lambda)<0(>0)$，$m<0(>0)$。

则其极限环必为集中分布。这里 $\lambda$ 是决定(21.1)的无限远奇点的 $x$ 坐标的方程：

---

1) 若条件 2) 不满足，则有可能出现 $m\delta<0$ 而 $\delta(m+\delta)<0$；但是定理的证明中要用到 $\delta$ 与 $m+\delta$ 同号的事实。

$$\varphi(\lambda)=a\lambda^3+(b-l)\lambda^2-m\lambda-1=0 \tag{21.12}$$

的最大正根。具体地说，若

$$-\frac{\delta}{m}\geqslant(\leqslant)y_0, \tag{21.13}$$

其中

$$y_0=\frac{-(\lambda^2-\delta\lambda+1)}{\lambda(2l\lambda-2a\lambda^2-b\lambda+m)}, \tag{21.14}$$

则(21.1)在奇点$O(N)$外围不存在极限环。

证　不妨设$|\delta|<2$，否则，$O$外不存在极限环。又可设$(m+\delta)^2+4(b+1)<0$，因为只有这时$N$才是焦点。故

$$\lambda^2-\delta\lambda+1>0,\ (b+1)\lambda^2-(m+\delta)\lambda-1<0. \tag{21.15}$$

由于$\lambda$满足(21.12)式，故可写：

$$y_0=\frac{-(\lambda^2-\delta\lambda+1)}{(b+1)\lambda^2-(m+\delta)\lambda-1-(\lambda^2-\delta\lambda+1)}(>0), \tag{21.16}$$

从而

$$y_0-1=\frac{-(b+1)\lambda^2+(m+\delta)\lambda+1}{(b+1)\lambda^2-(m+\delta)\lambda-1-(\lambda^2-\delta\lambda+1)}<0. \tag{21.17}$$

由文献[21.4]知道直线：

$$h:\ y=\frac{1}{\lambda}x+y_0 \tag{21.18}$$

是(21.1)的过一个无限远奇点的无切直线；它交$y$轴于$O$与$N$之间。又因(21.1)的极限环的最高点与最低点都应在$y$轴上，故知$O$与$N$外围如果有极限环，则它们应分别位于区域：

$$D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,\left(y<\frac{1}{\lambda}x+y_0\right)\cap(y<y_0)\right\} \tag{21.19}$$

及

$$D_2=\left\{(x,y)\,\middle|\,\left(y>\frac{1}{\lambda}x+y_0\right)\cap(y>y_0)\right\} \tag{21.20}$$

之中(图21.19)。

现在注意：若$(b+2l)\lambda+m<0$，$m<0$，且$-\dfrac{\delta}{m}\geqslant y_0$，则

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{b+2l}{m}=\frac{(b+2l)\lambda+m}{\lambda m}>0,$$

这时直线(21.4)全部位于$D_1$的余集中(因(21.4)有正斜率)，故$O$外无环。同样，若$(b+2l)\lambda+m>0$，$m>0$，且$-\dfrac{\delta}{m}\geqslant y_0$，也是$O$外无环。反之，若$(b+2l)\lambda+m<0(>0)$，$m<0(>0)$，且$-\dfrac{\delta}{m}\leqslant y_0$[1]，则直线(21.4)全部位于$D_2$的余集中，这时$N$外无环[2]。

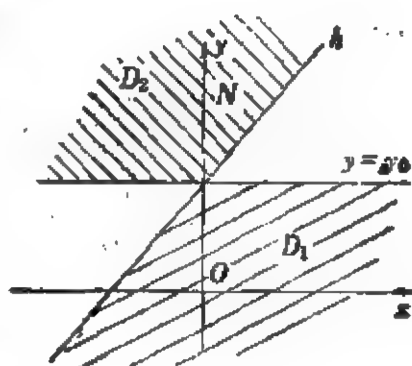


图 21.19

其次，由

$$b+2l+m\lambda(l-a\lambda)$$
$$=\frac{(b+2l)\lambda+m+m[(b+1)\lambda^2-(m+\delta)\lambda-1-(\lambda^2-\delta\lambda+1)]}{\lambda}$$

即知当$b+2l+m\lambda(l-a\lambda)<0$，$m<0$时必有$(b+2l)\lambda+m<0$，当$b+2l+m\lambda(l-a\lambda)>0$，$m>0$时必有$(b+2l)\lambda+m>0$，故由2)即可导出1)。引理5证毕。∎

**定理21.1的证明：** 先对(21.1)作一系列变换，把它变成(21.11)的形式，设：

$$\bar{x}=x-\lambda y,\quad \bar{y}=y;$$
$$\xi=-(-\delta+\lambda)\bar{x}+(l-a\lambda)\bar{x}^2+h(\bar{x})\bar{y},\quad \bar{x}=x;$$
$$u=\frac{\xi}{|h(x)|^r},\quad x=x,\quad d\tau=|h(x)|^r dt,\qquad (21.21)$$
$$y=u+F(x),\quad x=x,\quad t=\tau.$$

---

1) 当定理21.1的条件2)成立时必有$-\dfrac{\delta}{m}>1$，这情况不会出现。

2) 由此引理的证明可看出它不适用于$m=0$的情况，这时(21.4)同时和$D_1$与$D_2$相交。

其中

$$r=\frac{2l\lambda-a\lambda^2+m}{2l\lambda-2a\lambda^2-b\lambda+m},$$
$$h(x)=-(\lambda^2-\delta\lambda+1)+(2l\lambda-2a\lambda^2-b\lambda+m)x,\tag{21.22}$$

则(21.1)化为：

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x)=P(x,\ y),$$
$$\frac{dy}{dt}=-g(x)=Q(x,\ y),\tag{21.23}$$

这里

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx,\quad f(x)=-\frac{\bar f(x)}{\lambda h(x)|h(x)|^r},$$

$$\begin{aligned}\bar f(x)&=\lambda\delta(\lambda^2-\delta\lambda+1)+[(b+2l)\lambda+2m\delta\lambda+2\delta-b\lambda^2\delta-m\lambda^2]x\\&\quad+[(b+2l)+m\lambda(l-a\lambda)]x^2\\&=\{[(b+2l)+m\lambda(l-a\lambda)]x+\delta(\lambda^2-\delta\lambda+1)\}(x+\lambda)\\&\quad-(m+\delta)[(b+1)\lambda^2-(m+\delta)\lambda-1]x,\end{aligned}$$

$$g(x)=\frac{x(x+\lambda)\bar g(x)}{\lambda h(x)|h(x)|^{2r}},$$

$$\begin{aligned}\bar g(x)&=-(\lambda^2-\delta\lambda+1)+(2l\lambda-2a\lambda^2-a+m-\delta b)x\\&\quad-\left[b(l-a\lambda)+\frac{a}{\lambda}\right]x^2.\end{aligned}\tag{21.24}$$

注意：在变换(21.21)之下，原来方程(21.1)的无切直线(21.18)变为 $\bar x=-\lambda y_0=v_0$，这里

$$v_0=-\lambda y_0=\frac{\lambda^2-\delta\lambda+1}{2l\lambda-2a\lambda^2-b\lambda+m}<0.\tag{21.25}$$

$v_0$ 是 $h(x)=0$ 的根，即 $h(v_0)=0$。由 (21.17) 知 $v_0+\lambda=\lambda(1-y_0)>0$，故 $v_0>-\lambda$。利用这一性质易见当 $\bar x=-\lambda$，$\bar y=1$ 时，有

$$\begin{aligned}\xi&=\lambda(-\delta+\lambda)+\lambda^2(l-a\lambda)-(\lambda^2-\delta\lambda+1)\\&\quad-(2l\lambda^2-2a\lambda^3-b\lambda^2+m\lambda)\\&=a\lambda^3+(b-l)\lambda^2-m\lambda-1=0.\end{aligned}$$

这样，(21.1)的四个奇点 $O(0,\ 0)$、$N(0,\ 1)$、$S_1(x_1,\ y_1)$、$S_2(x_2,\ y_2)$ 就变成 (21.23) 的奇点 $O'(0,\ 0)$、$N'(-\lambda,\ F(-\lambda))$、

$S_1'(x_1', F(x_1'))$、$S_2'(x_2', F(x_2'))$，其中 $x_1'$、$x_2'$ 为 $\bar{g}(x)=0$ 的根。又易算出：

$$\bar{g}(v_0)=\frac{-(a\lambda+b)[(b+1)\lambda^2-(m+\delta)\lambda-1](\lambda^2-\delta\lambda+1)}{\lambda^2(2l\lambda-2a\lambda^2-b\lambda+m)^2},\tag{21.26}$$

$$\bar{g}(-\lambda)=-(1+b)[(b+1)\lambda^2-(m+\delta)\lambda-1]<0,$$
$$\bar{g}(0)=-\lambda^2+\delta\lambda-1<0。$$

若 $lb^2+a(a-mb)>0$，则由

$$\varphi\left(-\frac{b}{a}\right)=\frac{-1}{a^2}[lb^2+a(a-mb)]<0$$

以及 $\lambda$ 为方程(21.12)的最大正根可知(见图21.21)：

$$\lambda>-\frac{b}{a}\text{ 即 }a\lambda+b>0。$$

从而 $\bar{g}(v_0)>0$。这时因为

$$b(l-a\lambda)+\frac{a}{\lambda}=\frac{lb^2+a(a-mb)}{a\lambda+b}>0,$$

故 $\bar{g}(x)=0$ 的两根同号为负，而 $S_2'$ 与 $S_1'$ 必分别位于无切直线 $x=v_0$ 的两侧，且有关系：

$$-\lambda<x_2'<v_0<x_1'<0。\tag{21.27}$$

$\bar{g}(x)$ 的图形见图21.20。

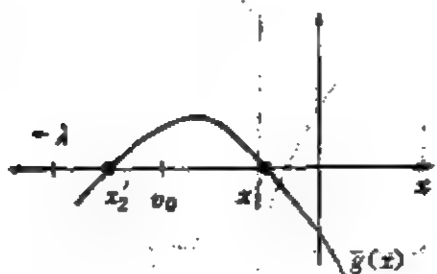



图 21.20

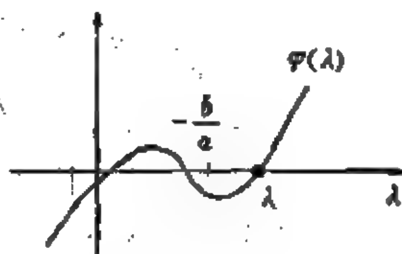



图 21.21

反之，若 $lb^2+a(a-mb)<0$，则 $\varphi\left(-\frac{b}{a}\right)>0$，我们不能判别 $-\frac{b}{a}$ 与(21.12)的最大正根之间的大小关系，但由于这时我们总能取到 $\varphi(\lambda)=0$ 的一个正根 $\lambda$ (它可能是最大正根，也可能是

最小正根)，使 $\lambda<-\dfrac{b}{a}$，于是有 $a\alpha+b<0$。

继续证明定理 21.1，由其中的条件 2) 知道有：

$$m\delta<0,\ \delta(m+\delta)>0\ 或\ m\delta>0. \tag{21.28}$$

我们仅就 $m<0$ 的情况来证明定理，$m>0$ 时是类似的。由前面那些引理，知只需在条件：

$$b+2l>0,\ (b+2l)\lambda+m>0,\ b+2l+m\lambda(l-a\lambda)>0 \tag{21.29}$$

之下来考虑好了，这时还有 $a\lambda+b>0$。

下面再分：

$$(\mathrm{i})\ m+\delta>0,\ \delta>0\ 及\ (\mathrm{ii})\delta<0 \tag{21.30}$$

两种情况。先考虑情况(i)，注意：

$$\bar f(0)=\lambda\delta(\lambda^2-\delta\lambda+1)>0,$$

$$\bar f(v_0)=\frac{[(b+2l)\lambda+m](\lambda^2-\delta\lambda+1)[(b+1)\lambda^2-(m+\delta)\lambda-1[}{\lambda(2l\lambda-2a\lambda^2-b\lambda+m)^2}$$

$$<0, \tag{21.31}$$

$$\bar f(-\lambda)=(m+\delta)[(b+1)\lambda^2-(m+\delta)\lambda-1]<0,$$

可知 $\bar f(x)$ 的两个零点 $x_2^0<x_1^0$ 必满足：

$$x_2^0<-\lambda<v_0<x_1^0<0. \tag{21.32}$$

又不妨设 $x_1'<x_1^0$，否则，$O'$ 外无环[1]。结合 (21.27) 可得：

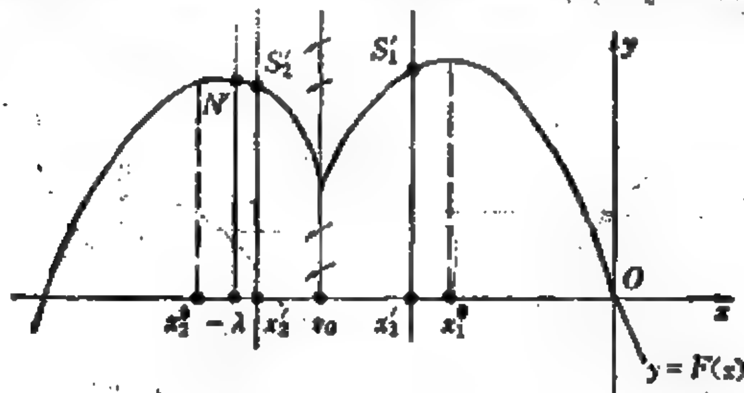



图 21.22

1) 因为对 (21.23) 来说，$P_x+Q_y=0$ 即 $f(x)=0$，故为二铅直直线 $x=x_i^0$。若 $x_1^0<x_1'$，则因 $O'$ 外的闭轨不能与 $x=x_1'$ 相交，因而也不能与 $x=x_1^0$ 相交，故这种闭轨不能存在。

$$x_2^0<-\lambda<x_2'<v_0<x_1'<x_1^0<0. \tag{21.33}$$

方程(21.11)的等倾线图如图21.22。

现在验证(21.11)满足引理21.4的四个条件。

1) 取 $x_{02}=x_1'$, $x_{01}=+\infty$，则引理21.4的条件1)与2)满足。

2) 取 $x_0=x_1^0$，则条件3)满足(括号内)。为此注意：

$$h(x)<0(当\ x>v_0)；\ h(x)>0(当\ x<v_0)$$

及 $\bar{f}(x)$ 的图形(图21.23)。

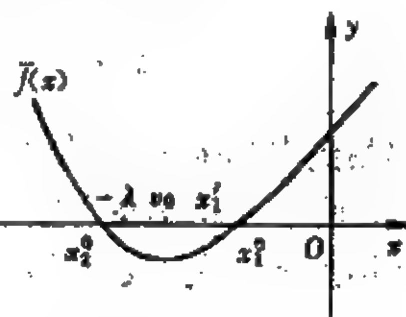


图 21.23

下面再证：当 $x\in(x_1',x_1^0)\cup(0,+\infty)$ 时，有 $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'>0$。记

$$\bar{f}(x)=[(b+2l)+m\lambda(l-a\lambda)]x+\delta(\lambda^2-\delta\lambda+1),$$

则

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\left[|h(x)|^r\left(\frac{(m+\delta)[-(b+1)\lambda^2+(m+\delta)\lambda+1]}{(x+\lambda)\bar{g}(x)}+\frac{\bar{f}(x)}{x\bar{g}(x)}\right)\right]'$$

$$=|h(x)|^r\left[\frac{(m+\delta)(-(b+1)\lambda^2+(m+\delta)\lambda+1)}{(x+\lambda)^2\bar{g}^2(x)}\times\left(\frac{(x+\lambda)W_1(x)}{h(x)}-\bar{g}(x)\right)+\frac{W_2(x)}{x^2\bar{g}^2(x)h(x)}\right].$$

其中

$$W_1(x)=(2l\lambda-a\lambda^2+m)\bar{g}(x)-h(x)\bar{g}'(x),$$

$$\begin{aligned}W_2(x)&=(2l\lambda-a\lambda^2+m)x\bar{f}(x)\bar{g}(x)\\&\quad+h(x)[xf(x)\bar{g}(x)-\bar{f}(x)(x\bar{g}(x))']\\&=-\delta(\lambda^2-\delta\lambda+1)\bar{g}(x)h(x)+x\bar{f}(x)W_1(x),\end{aligned}$$

整理后得：

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=|h(x)|^r\frac{M(x)g(x)h(x)+x(x+\lambda)\bar{f}(x)W_1(x)}{x^2(x+\lambda)^2g^2(x)h(x)}, \tag{21.34}$$

其中

$$M(x)=(m+\delta)[(b+1)\lambda^2-(m+\delta)\lambda-1]x^2$$
$$-\delta(\lambda^2-\delta\lambda+1)(x+\lambda)^2<0.$$

又由 $$W_1(x_1')=-h(x_1')\bar{g}'(x_1')<0$$

及

$$W_1'(x)=(a\lambda^2+b\lambda)\bar{g}'(x)$$
$$+2\left[b(l-a\lambda)+\frac{a}{\lambda}\right]h(x)<0\ (\text{当 } x>x_1')$$

(这里用到 $lb^2+a(a-mb)>0$, 从而 $a\lambda+b>0$), 可知 $W_1(x)<0$ (当 $x\geqslant x_1'$)。又已知在 $(x_1',x_1^0)\cup(0,+\infty)$ 中 $g(x)<0$, $h(x)<0$, $x(x+\lambda)\bar{f}(x)>0$。故由(21.34)式看出应有

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'>0,$$

即此时(21.11)在 $O'$ 外, 从而(21.1)在 $O$ 外最多只有一个极限环。至于在 $N$ 外围,如有极限环,是否唯一,则不得而知。

(iii) $\delta<0$, $m<0$ 这时可用变换:

$$y'=1-y,\ x'=\frac{-x}{\sqrt{-1-b}},\ \tau=-\sqrt{-1-b}t.$$

则(21.1)化为(仍记 $x'$、$y'$ 为 $x$、$y$):

$$\frac{dx}{d\tau}=-y+\delta'x+m'xy+l'x^2+y^2,$$
$$\frac{dy}{d\tau}=x(1+a'x+b'y). \tag{21.35}$$

其中

$$a'=\frac{a}{(-1-b)^{3/2}},\quad b'=\frac{-b}{1+b},$$

$$\delta'=\frac{-m-\delta}{\sqrt{-1-b}},\quad m'=\frac{m}{\sqrt{-1-b}},\quad l'=\frac{-l}{1+b}.$$

显然 $$\delta'>0,\quad m'=\frac{m}{\sqrt{-1-b}}<0,$$

$$b' + m' = \frac{-b}{\sqrt{-1-b}} > 0, \quad 1 + b' < 0.$$

故由(i)知(21.35)在$O(0,0)$外围最多有一个极限环，亦即(21.1)在$N(0,1)$外围最多有一个极限环。这时(21.1)在$O(0,0)$外围如有极限环的话，是否唯一，也不得而知。定理21.1证毕。■

注 21.2　在情况(i)有 $\frac{-b}{m}>1$，故 $P_x+Q_y=0$ 交 $y$ 轴于$N$点的上方。这时要$O$外围能存在极限环，由于已证极限环的唯一性，故必须$P_x+Q_y=0$把$O$与$S_1$分开(图21.5中间一条虚线)。在情况(ii)有 $\frac{-b}{m}<0$，故 $P_x+Q_y=0$ 交 $y$ 轴于$O$的下方。这时要$N$外围能存在极限环，由于已证唯一性，$P_x+Q_y=0$ 必须把$N$与$S_2$分开(图21.8中的实线)。

**引理 21.6**　若方程(21.1)满足定理21.1的条件1)，且$O$与$N$外围都有极限环，又 $\mathrm{div}|_O\cdot\mathrm{div}|_N<0$，则包向$O$或$N$的分界线必来自与它发散量符号相反的鞍点。

**证**　由引理21.3我们只须考虑 $\mathrm{div}|_{S_1}\cdot\mathrm{div}|_{S_2}<0$ 的情况。由于 $P_x+Q_y=0$ 的斜率为 $-\frac{b+2l}{m}$，而当 $m(b+2l)>0$ 时，由引理21.1知$O$与$N$外围不可能同时存在极限环。故可设 $m(b+2l)<0$，从而 $P_x+Q_y=0$ 有正斜率。因此为使$O$与$N$外围都有极限环，且$O$与$N$以及$S_1$与$S_2$都被 $P_x+Q_y=0$ 分开，这时应有如图21.5($P_x+Q_y=0$ 取实线)或图21.7的相对位置。注意 $\overline{S_1S_2}$ 上轨线都从右向左穿过，可知包向$O$的两分界线必来自$S_1$；包向$N$的两分界线必来自$S_2$[1]。

**定理 21.2**　若方程(21.1)满足引理21.6的条件，则在$O$与$N$外围同时存在唯一的极限环。

**证**　由引理21.6知包向$O(N)$的分界线来自$S_1(S_2)$，且$S_1$

1)　在图21.6与21.16中 $\mathrm{div}|_O\cdot\mathrm{div}|_N<0$，包向$O$的分界线来自与它发散量相同的鞍点$S_1$，$O$外可以有一个或两个极限环，但这时已证$N$外必无极限环。

与$O$($S_2$与$N$)处发散量的符号相反。现在作坐标变换，保持$O$不动，而把$S_2$变为$\overline{S}_2(0, 1)$，设这时方程(21.1)变为：

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\overline{x}}{dt} = -\overline{y} + \delta'\overline{x} + l'\overline{x}^2 + m'\overline{x}\overline{y} + \overline{y}^2 = P'(\overline{x}, \overline{y}), \\
\dfrac{d\overline{y}}{dt} = \overline{x}(1 + a'\overline{x} + b'\overline{y}) = Q'(\overline{x}, \overline{y}).
\end{cases}
\tag{21.36}
$$

显见现在不再有$1 + b' < 0$，因为$\overline{S}_1$与$\overline{N}$都在$\overline{y}$轴的左方（图21.24），故必$1 + b' > 0$，不妨设$a' > 0$。(21.1)的鞍点$S_1$与焦点$N$变为(21.36)的鞍点$\overline{S}_1(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$与焦点$\overline{N}(\overline{x}_2, \overline{y}_2)$，四奇点仍构成凸四角形的顶点，故有$l'^2 b'^2 + a'(a' - m'b') > 0$。

图 21.24

不难证明$P_x + Q_y = 0$的位置在坐标变换之下不变。又过$\overline{S}_2(0, 1)$的直线：

$$
h_3: \quad \overline{y} = k\overline{x} + 1, \tag{21.37}
$$

（其中$k$是$(1 + b') - (m' + \delta')k - k^2 = 0$的正根）是无切直线，因为它是此鞍点的分界线的切线，又由原方程(21.1)的轨线穿过方向看出应有$\left.\dfrac{dh_3}{dt}\right|_{h_3} \geqslant 0$。但另一方面有

$$
\left.\frac{dh_3}{dt}\right|_{h_3} = k^3\left[a'\left(\frac{1}{k}\right)^3 + (b' - l')\left(\frac{1}{k}\right)^2 - \frac{m'}{k} - 1\right].
$$

若以 $\Phi(\lambda)$ 记(21.36)的无限远奇点方程，则有 $\Phi\left(\frac{1}{k}\right)\geqslant 0$。另一方面，

$$\Phi\left(-\frac{b'}{a'}\right)=-\frac{1}{a'^2}[l'b'^2+a'(a'-m'b')]<0, \quad (21.38)$$

故知 $\Phi(\lambda)=0$ 有正根 $\lambda$ 介于 $-\frac{b'}{a'}$ 与 $\frac{1}{k}$ 之间(图 21.25)。

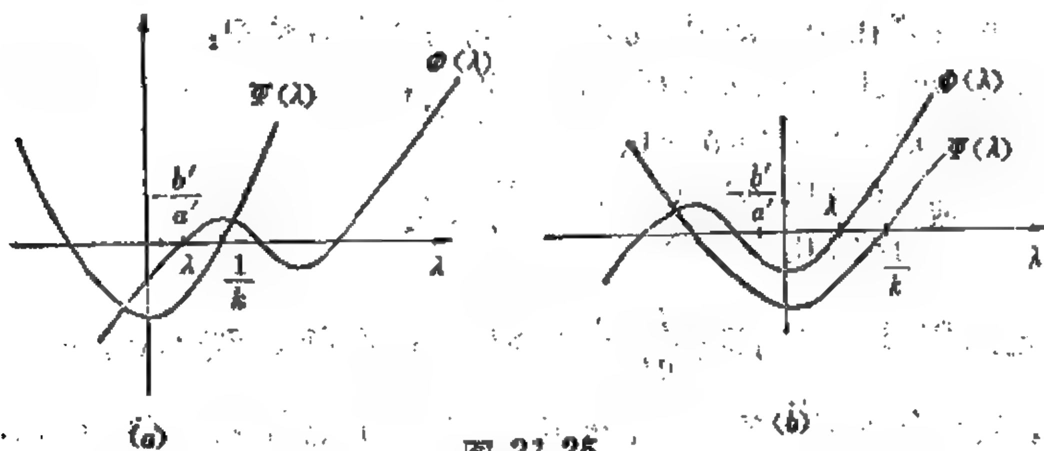



图 21.25

今若 $b'\geqslant 0$，则显然有 $a'\lambda+b'>0$，若 $b'<0$，则由 $\lambda>-\frac{b'}{a'}$ 仍可得 $a'\lambda+b'>0$。此外还有

$$\Psi(\lambda)=(b'+1)\lambda^2-(m'+b')\lambda-1<0 \quad (\text{图 } 21.25)。\quad (21.39)$$

又因为

$$l'b'^2+a'(a'-m'b')=(a'\lambda+b')\left[b'(l'-a'\lambda)+\frac{a'}{\lambda}\right]>0。\quad (21.40)$$

故

$$b'(l'-a'\lambda)+\frac{a'}{\lambda}>0。$$

现在再对(21.36)作变换(21.21)，把它化成(21.23)的形式，则 $O$、$\bar{N}$、$\bar{S}_1$、$\bar{S}_2$ 相应地变成 $O$、$\tilde{N}(\tilde{x}_2, F(\tilde{x}_2))$、$\tilde{S}_1(\tilde{x}_1, F(\tilde{x}_1))$、$\tilde{S}_2(-\lambda, F(-\lambda))$，这里 $\tilde{x}_1$ 与 $\tilde{x}_2$ 是 $\bar{g}(\tilde{x})=0$ 的两个根。

仿前可证 $\bar{g}(0)<0$，$\bar{g}(a_0')>0$，$\bar{g}(-\lambda)>0$，故 $O$、$\tilde{N}$、$\tilde{S}_1$、$\tilde{S}_2$ 的 $\tilde{x}$ 坐标的相对位置为

$$\bar{x}_2<\bar{x}_2^0<-\lambda<v_0'<\bar{x}_1<\bar{x}_1^0<0。\tag{21.41}$$

上式中 $\bar{x}_2^0$ 与 $\bar{x}_1^0$ 是 $\bar{f}(\bar{x})=0$ 的两个根。因为

$$\bar{f}(O)\bar{f}(\bar{x}_1)<0,\quad \bar{f}(-\lambda)\bar{f}(\bar{x}_2)<0,$$

故知在 $O$ 与 $\bar{x}_1$ 之间，$-\lambda$ 与 $\bar{x}_2$ 之间应各有 $\bar{f}(\bar{x})=0$ 的一个根。于是 $\bar{f}(\bar{x})=0$ 的二根同号，故

$$\delta'[(b'+2l')+m'\lambda(l'-a'\lambda)]>0。$$

因此当 $\delta'>0(<0)$ 时，$\bar{x}\bar{f}(\bar{x})>0(<0)$ 在 $(\bar{x}_1,\ \bar{x}_1^0)\cup(0,\ +\infty)$ 中。

因为现在 $\mathrm{div}|_{\bar{S}_1}\cdot\mathrm{div}|_O>0$，故可分为两种情况：

i) $m'<0,\ m'+\delta'>0,$

ii) $m'>0,\ m'+\delta'<0,$ $\Big\}-\dfrac{\delta'}{m'}>1;$

或 $\delta'<0,\ m'<0,$

$\delta'>0,\ m'>0,$ $\Big\}-\dfrac{\delta'}{m'}<0。$

仿定理 21.1 一样可证 $\left(\dfrac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}\right)'>0(<0)$ 在 $(\bar{x}_1,\ \bar{x}_1^0)\cup(0,\ +\infty)$ 中，故在 $O$ 外围至多有一个极限环。若移原点到 $N$，同样可证 $N$ 外围也至多有一个极限环。∎

合并定理 21.1 与定理 21.2，可知，在(21.1)的四个奇点构成凸四角形的顶点时，不可能有极限环的(2, 2)分布。

与以上的结果类似，在文献[21.2]中用同样的方法证明了以下定理：

**定理 21.3** 若方程(21.1)满足条件：

(i) $a>0,\ b<-1,\ m>0,\ lb^2+a(a-mb)<0$。

(ii) 当 $\delta<0$ 时，(21.1)在区域 $D_1$ 内除奇点 $O$ 外还有其他有限远奇点；或当 $\delta\geqslant0$ 时在区域 $D_2$ 内除奇点 $N$ 外还有其他有限远奇点。

(iii) $\mathrm{div}|_O\cdot\mathrm{div}|_N\geqslant0$。

则(21.1)在奇点 $O(N)$ 外围至多有一个极限环。

**定理 21.4** 若(21.1)满足定理 21.3 的条件(i)与(ii)，又

(iii) $\mathrm{div}|_O\cdot\mathrm{div}|_N<0$，

(iv) 方程(21.1)在 $O$ 与 $N$ 外围同时存在极限环。

则(21.1)在$O(N)$外围有唯一的极限环。

由此可知，当方程(21.1)的有限奇点多于两个时，便不能出现(2, 2)分布的极限环。

此外，若(21.1)恰有两奇点$O$与$N$，它们都是焦点，且只有一无限远奇点(鞍点)，在文献[21.2]中认为由轨线的全局结构分析易见在某一焦点外围必有奇数个极限环，因而也不能出现(2,2)分布。

按文献[21.1]与[21.2]中的方法，认为只有当(21.1)恰有两个有限奇点（都是焦点)，且无限远奇点多于一个时，不能证明(2, 2)分布的不可能性。但按§20的方法，这一问题并不存在。

用类似于本节的方法，在文献[21.5]中对于有一个粗焦点$O(0, 0)$和一个细焦点$N(0, 1)$的二次系统：

$$\dot{x} = -y - mx + lx^2 + mxy + y^2,$$

$$\dot{y} = x(1 + ax + by),\ (a>0,\ 1+b<0,\ 0<|m|<2), \quad (21.42)$$

还证明了：

**定理 21.5**　若$m<0$或$m>0$而$lb^2 + a(a - mb) > 0$，则方程(21.42)在$O$外围最多有一个极限环。

证明中变(21.42)为(21.11)的变换与(21.21)不完全一样，所用的极限环唯一性定理也与引理21.4不完全一样。

注意：在文献[21.3]的§14中证明对于(Ⅱ)类方程

$$\dot{x} = -y + \delta x + mxy - y^2,\quad \dot{y} = x(1 + ax) \quad (21.43)$$

当$0<m<\frac{1}{a} - a$，$\delta>0$时$O(0, 0)$外围有可能出现两个极限环，又这时$O$为不稳定，另一焦点$R$为稳定，且两焦点外围不能同时存在极限环[21.6]。此方程可经转轴把$R$移到$y$轴上，而成为(Ⅲ)类方程。对照本节定理21.2，可知"两焦点外围都有极限环"的条件是不能去掉的。

关于方程(21.43)的极限环的集中分布问题迄今尚未完全解决，可参考文献[21.6]和[21.7]以及其中所引的有关文献。

# 参 考 文 献


[21.1] 张平光。二次系统极限环的集中分布及唯一性问题。南开大学数学研究所动力系统年论文集，1990—1991，1993，v.4，297～310。

[21.2] 张平光。二次系统极限环的分布与个数问题(预印本，1992)。

[21.3] 叶彦谦等。极限环论。上海科学技术出版社，1984。

[21.4] Cherkas L A. Bifurcation of limit cycles of a quadratic system with variation of the parameter rotating the field, Diff. Uravn. 17, no.11 (1981), 2002～2016.

[21.5] Zhang Pingguang and Li Wenhua. A quadratic system with weak focus and strong focus, Ann. of Diff. Eqs. 8(1), 1992, 122～128.

[21.6] 梁肇军。关于(Ⅱ)$_{l=0}$类方程极限环的相对位置(二)。福州国际常微分方程会议资料(1985)。

[21.7] 蔡燧林。二次系统研究近况。数学进展，1989，v.18，no.1，5～21。

# §22. 球面上的多项式系统，$R^3$中的齐次多项式向量场

三维空间中的多项式系统即使是二次的，研究起来也远较平面多项式系统困难得多，迄今尚无一般性的理论。个别的特例，如 Lorenz 方程：

$$\dot{x}=\sigma(y-x),\quad \dot{y}=\rho x-y-xz,\quad \dot{z}=-\beta z+xy\quad (\sigma,\beta,\rho\geqslant 0)\tag{22.1}$$

虽然是一个简单的很特殊的三维二次系统，但研究其轨线的全局拓扑结构难度却非常大(见[22.1])。不过，早在 60 年代末期 C. Coleman 已开始对三维空间中齐次多项式系统的轨线与积分曲面的性质作过初步探讨[22.2]，比他稍迟，又有 Sh. R. Sharipov[22.3]。但更有启发性的是 M. I. T. Camacho [22.4]对于 $R^3$ 中齐二次向量场在球面上所导出的向量场 $Q_r$ 的研究。[22.4] 的主要结论是：如果这种向量场没有极限环，而且是 Morse-Smale 向量场，则其轨线只能有七种不同的全局拓扑结构。为了证明这一点，[22.4] 得到了 $Q_r$ 的轨线和奇点个数的四条重要性质。后来吴葵光[22.5]又给[22.4]补充了几条其他性质，并注意到它们是平面二次系统轨线性质的推广。此外，在[22.5]中还证明了：没有极限环而且是 Morse-Smale 向量场的 $Q_r$，其轨线有十种不同的全局拓扑结构，纠正了[22.4]的错误。稍后，[22.6]与[22.7]研究了没有无限远奇点的平面二次系统，或即 $RP^2$ 上的二次系统轨线的拓扑分类，得到恰有五种不同的全局拓扑结构。然后，[22.8]注意到[22.7] 所研究的二次系统其实就是 $R^3$ 中齐一次向量场在球面上

所导出的向量场[1]。由此可见，研究 $R^3$ 中齐次多项式系统以及它在球面上所导出的向量场的定性性质与研究平面多项式系统的定性理论有着密切的关系。前者是后者的自然推广，但又不完全一样，这由最近文献[22.9]中所得到的许多结果可以看出来。本节的目的就是要介绍[22.4]、[22.5]、[22.9]三篇文献中有关 $R^3$ 中齐二次多项式系统在球面上所诱导出的向量场 $Q_T$ 的奇点、轨线、极限环等的一些基本性质，以引起读者对这个新开辟的研究领域的注意。

假设 $R^3$ 中有一个二次齐次向量场 $Q$：

$$Q(x)=(Q_1(x),\ Q_2(x),\ Q_3(x)),\ x=(x_1,\ x_2,\ x_3)\in R^3, \tag{22.2}$$

其中：

$$Q_1(x)=\sum_{\substack{i\le j\\ i,j=1,2,3}}a_{ij}x_ix_j,\quad Q_2(x)=\sum_{\substack{i\le j\\ i,j=1,2,3}}b_{ij}x_ix_j,$$

$$Q_3(x)=\sum_{\substack{i\le j\\ i,j=1,2,3}}c_{ij}x_ix_j. \tag{22.3}$$

由于 $Q(x)$ 在每一条通过原点 $O(0,\ 0,\ 0)$ 的射线上各点所确定的向量都有相同的方向比，故可将 $Q(x)$ 投影到以 $O$ 为中心的单位球面：

$$S^2:\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$$

上而得到 $S^2$ 的一个切向量场 $Q_T$。显见：

$$Q_T(x)=Q(x)-\langle x,\ Q(x)\rangle\cdot x,\ x\in S^2. \tag{22.4}$$

其中 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 表示两向量的数量积，$\langle x,\ Q(x)\rangle\cdot x$ 表示 $Q(x)$ 在 $x$ 方向的支量。显见 $Q_T(x)$ 也是关于原点 $O$ 对称的向量场。

再定义：

$$\Pi_0=\{x\in R^3\,|\,x_3=0\},\ \Pi_i=\{x\in R^3\,|\,x_i=1\}\quad(i=1,\ 2,\ 3), \tag{22.5}$$

则 $\Pi_0$ 是 $R^3$ 中的 $(x_1,\ x_2)$ 平面，$\Pi_1$、$\Pi_2$、$\Pi_3$ 分别和 $S^2$ 切于 $(1,\ 0,\ 0)$、$(0,\ 1,\ 0)$ 和 $(0,\ 0,\ 1)$。定义 $\Pi_3$ 平面中的向量场：

---

1) 关于这方面还有[22.16]，与[22.6]、[22.7]不同，[22.16]还考虑了有非孤立奇点的情况，因而得到 12 种不同的拓扑结构。

$$W_Q(x)=(W_Q^1(x),\ W_Q^2(x),\ 0)=(-x_1Q_3(x)+Q_1(x),$$
$$-x_2Q_3(x)+Q_2(x),\ 0), \qquad (22.6)$$

其中$x=(x_1, x_2, 1)$。由上式右端等于$(Q_1,\ Q_2,\ Q_3)-Q_3(x)(x_1, x_2, 1)$，可知$W_Q(x)$切于

$$S(\gamma)=\{tp \mid t\in R,\ p\in\gamma\} \qquad (22.7)$$

与$\Pi_3$的交线。这里$\gamma$是$Q_T(x)$在$S^2$上的轨线，$S(\gamma)$是$O$与$\gamma$上一切点的连线所构成的曲面。它是$Q(x)$的积分曲面，称为$Q(x)$的不变锥面。此锥面以$O$为顶点且关于$O$对称。

不难看出：$Q_T(x)$的奇点$P$如果也是$Q(x)$的奇点，则直线$OP$上充满了$Q(x)$的奇点；如果$P$不是$Q(x)$的奇点，则$OP$是$Q(x)$的积分直线，其上只有一个奇点$O$。若$\gamma$连接$S^2$上两奇点$P_1$与$P_2$，而$P_1$、$P_2$不是$Q(x)$的奇点，则$Q(x)$在$S(\gamma)$上的轨线$Z(\gamma)$可能是下列三图(图22.1的$(a)$、$(b)$、$(c)$)中的一个[22.2]。

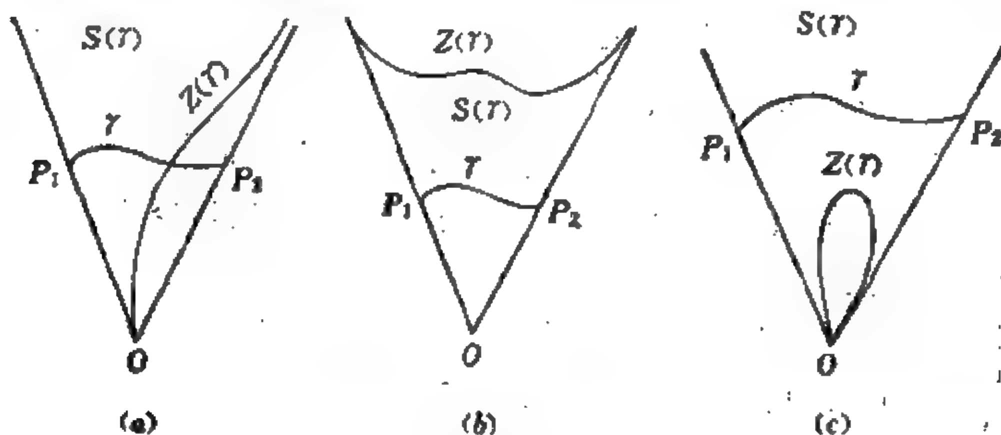



图 22.1

若$P_1=P_2$，则$Z(\gamma)$如图22.2$(a)$所示。又若$\gamma$是$S^2$上的闭轨线，则$S(\gamma)$可能由一系闭轨线$Z(\gamma)$所充满(如图22.2$(b)$)。也可能由一系螺线(一端趋于$O$，另一端趋于无限远)所充满(图22.2$(c)$)。当然，$S(\gamma)$和$\Pi_3$的交线，即$W_Q(x)$的轨线，它的性质还是和$\gamma$一样的。

用类似于(22.6)的办法可以定义$\Pi_1$中的向量场：

$$R_Q(x)=(0,\ R_Q^2(x),\ R_Q^3(x))$$
$$=(0,\ Q_2(x)-x_2Q_1(x),\ Q_3(x)-x_3Q_1(x)) \qquad (22.8)$$

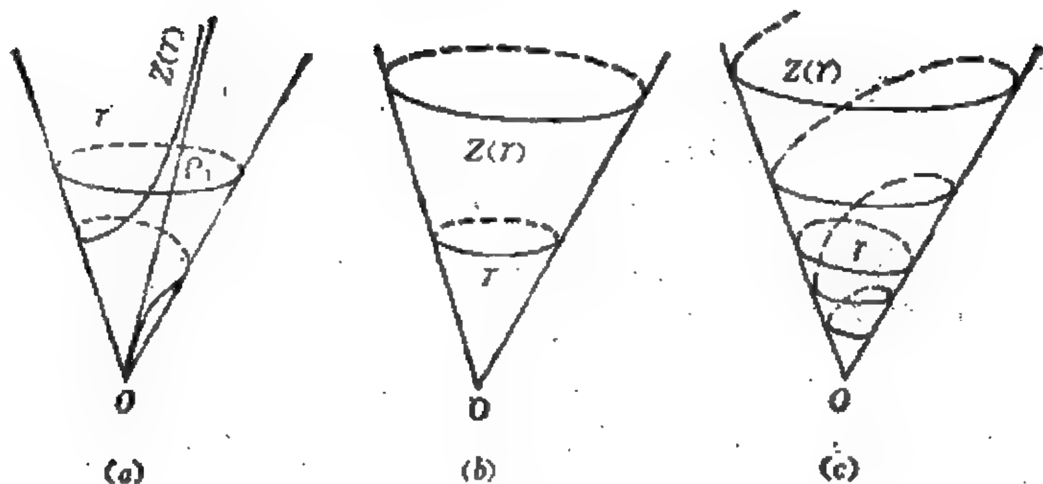



图 22.2

(其中 $x=(1, x_2, x_3)$) 以及 $\Pi_2$ 中的向量场:

$$S_Q(x)=(Q_1(x)-x_1Q_2(x),\ 0,\ Q_3(x)-x_3Q_2(x))$$
$$=(S_Q^1(x),\ 0,\ S_Q^3(x)) \tag{22.9}$$

(其中 $x=(x_1, 1, x_3)$)[1]。

下面研究 $Q_\Gamma(x)$ 的轨线以及相应的 $\Pi_i$ 上的向量场的轨线的几何与动力性质. 对于后者,不失一般性, 我们只讨论 $\Pi_3$ 上的向量场 $W_Q(x)$。

**性质 22.1** $\Pi_3$ 中任一直线与 $W_Q(x)$ 的轨线最多只能有两个切点(包括奇点).否则, 该直线本身就是 $W_Q(x)$ 的积分直线 [22.4]。

**证** 设 $p=(x_1, x_2, 1)$ 是 $\Pi_3$ 中的直线 $x_2=ax_1+b$ 和 $W_Q(x)$ 的一个切点, 则应有 $W_Q^2(p)=aW_Q^1(p)$, 亦即:

$$Q_2(p)-x_2Q_3(p)=a(Q_1(p)-x_1Q_3(p)),$$

或

$$(x_2-ax_1)Q_3(p)=bQ_3(p)=Q_2(p)-aQ_1(p).$$

在上式中以 $x_2=ax_1+b$ 代入, 可得 $x_1$ 的二次方程, 它最多有两个实根, 这表示直线 $x_2=ax_1+b$ 上最多只能有两个与 $W_Q(x)$ 的轨线相切的点(包括 $W_Q(x)$ 的奇点)。

1) 注意, 若 $Q_3(x)\equiv 0$, 则 $W_Q(x)$ 为 $\Pi_3$ 中的二次系统, 而 $R_Q(x)$ 与 $S_Q(x)$ 则是我们通常所得到的该二次系统在坐标系 $(1, y, z)$ 和 $(x, 1, z)$ 之下的向量场。

如果切点多于两个，则 $W_0^2(x)=aW_0^1(x)$ 应对直线上的一切点 $x$ 都成立，即直线 $x_2=ax_1+b$ 应是 $W_0(x)$ 的积分直线。 ∎

与性质 22.1 对应的 $Q_T(x)$ 的性质是：

**性质 22.1′** $S^2$ 上的任何大圆与 $Q_T(x)$ 的轨线只能有零个，两个或四个切点（包括奇点），否则，此大圆本身必为轨线[22.4]。

仿此易证以下性质成立：

**性质 22.2** $\Pi_3$ 上过 $W_0(x)$ 的两奇点 $P_1$ 与 $P_2$ 的直线若非积分直线，则它必由三个无切线段 $\overline{\infty P_1}$、$\overline{P_1P_2}$ 和 $\overline{P_2\infty}$ 组成。$W_0(x)$ 的轨线从同一方向穿过 $\overline{\infty P_1}$ 和 $\overline{P_2\infty}$，而从相反的方向穿过 $\overline{S_1S_2}$[22.5]。

与之对应的 $Q_T(x)$ 的性质是：

**性质 22.2′** $S^2$ 上过 $Q_T(x)$ 的两对对径奇点 $P_1$ 与 $P_1'$，$P_2$ 与 $P_2'$ 的大圆若非 $Q_T(x)$ 的轨线，则必由四段无切弧 $\widehat{P_1P_2}$、$\widehat{P_2P_1'}$、$\widehat{P_1'P_2'}$ 和 $\widehat{P_2'P_1}$ 所组成，且 $Q_T(x)$ 的轨线在 $\widehat{P_1P_2}$ 与 $\widehat{P_1'P_2'}$ 上从一个半球面进入另一个半球面，而在 $\widehat{P_2P_1'}$ 与 $\widehat{P_2'P_1}$ 上则相反[22.5]。

在性质 22.1′ 中没有否定“$S^2$ 上的大圆与 $Q_T(x)$ 的轨线可以没有切点”。事实上，有以下性质说明：

**性质 22.3′** $S^2$ 上任一大圆不可能是 $Q_T(x)$ 的闭轨[22.3]。

**证** 因为 $Q(x)=Q(-x)$，故有

$$Q_T(x)=Q_T(-x),\ DQ_T(x)=-DQ_T(-x)。\qquad(22.10)$$

今设 $S^2$ 的某一大圆 $C$ 对于 $Q_T(x)$ 不变，过 $O$ 作一直线 $l$，使与 $C$ 交于两对径点 $A$ 和 $A'$。由于 $Q(x)$ 在 $A'$ 与 $A$ 确定相同的向量，故由 (22.10) 知 $Q_T(x)$ 在 $A$ 与 $A'$ 两点所确定的轨线 $C$ 上的方向相反，从而 $C$ 上必有奇点 $B$ 与 $B'$。因此，$C$ 既不是闭轨，也不是可以定向的奇闭轨(图 22.3)。

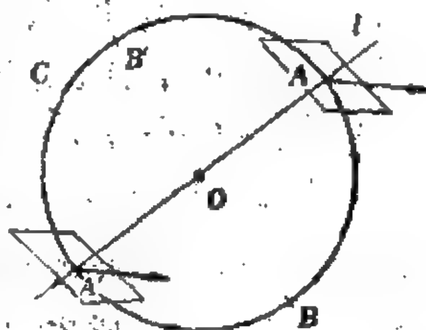


图 22.3

性质 22.3′ 与性质 22.1 并不矛盾，因为当 $\Pi_3$ 中的直线

$ax_1+b=x_2$ 上没有有限远切点或奇点时，它可以通过 $\Pi_3$ 上的无限远奇点（$\Pi_3$ 上的无限远直线是 $S^2$ 上大圆 $x_1^2+x_2^2=1$ 的象）[1]。性质 22.3′ 的另一叙述是：

**性质 22.4′**　如果 $Q_T(x)$ 在 $S^2$ 上存在一个不变大圆 $C$，则 $C$ 上至少有 $Q_T(x)$ 的两个对顶奇点[2]。

**定义 22.1**　$S^2$ 上的 $Q_T(x)$ 的轨线 $l$ 称为是严格凸的，如果对于 $l$ 上任何一点 $x$，一个在 $x$ 与 $l$ 相切的大圆只能在 $x$ 与 $l$ 有公共点；否则，$l$ 必整个位于此大圆上。

由此定义可知：若 $l$ 是 $Q_T(x)$ 的严格凸闭轨，则 $l$ 必全部位于某一半球面中。又由性质 22.1 知道，中心投影使 $Q_T(x)$ 的严格凸闭轨在 $\Pi_1$、$\Pi_2$、$\Pi_3$ 上的象分别成为 $R_Q$、$S_Q$ 和 $W_Q$ 的严格凸闭轨。

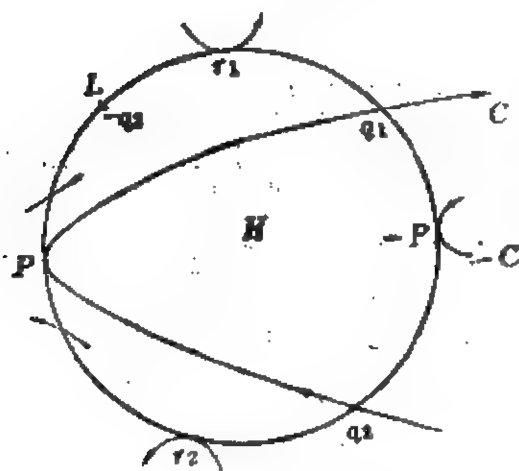



图 22.4

**性质 22.5′**　$Q_T(x)$ 的任一闭轨必定是严格凸的[22-4]。

**证**　设 $C$ 是 $Q_T(x)$ 的闭轨，我们先证明 $C$ 必含在某一半球面内。设 $P$ 是 $C$ 上一点，使在 $P$ 的领域中 $C$ 位于大圆 $L$ 所确定的一个半球面 $H$ 中，这里 $L$ 在 $P$ 点与 $C$ 相切。如果 $P$ 不是 $C$ 和 $L$ 的唯一的公共点，则 $C$ 将在 $L$ 上的另一点 $q_1$ 穿出 $H$，后来又将在 $L$ 上的一点 $q_2$ 穿进 $H$（图 22.4）。$q_1$ 与 $q_2$ 不能是对称点，因为在球面上两个对称点 $q$ 与 $-q$ 应有 $Q_T(q)=Q_T(-q)$，但在 $q_1$ 与 $q_2$ 显然这性质不满足。又 $q_1$ 不能就是 $q_2$，即 $C\notin\overline{H}$。否则，$q_1=q_2$ 将是 $C$ 和 $L$ 的第二个切点，并且在 $L$ 的 $\widehat{Pq_1}$（设此弧不含 $-P$）上还将有第三个与 $Q_T(x)$ 的轨线相切的点 $r$，由性质 22.1′ 知道这不可能。今设 $q_1$ 是 $C$ 第一次

1)　这时 $x_2-ax_1$ 是 $x_2W_Q^1-x_1W_Q^2=-x_1Q_2+x_2Q_1$ 的三次齐次项的因式。

2)　与性质 22.4′ 对应的是：如果 $W_Q(x)$ 在 $\Pi_3$ 上有不变直线 $L$，则 $L$ 上必有有限远或无限远奇点。

穿出$H$的点；$q_2$是$C$最后一次穿进$H$的点。如前一样的理由，可设$q_1$与$q_2$在直径$\overline{r'(-r')}$的两边。又设在$L$的$\widehat{Pq_1}$上有唯一的与$Q_T(x)$的轨线相切的点$r_1$，在$L$的$\widehat{Pq_2}$上有唯一的与$Q_T(x)$的轨线相切的点$r_2$。由性质22.1′知必有$r_2=-r_1$。这样，$-q_2$必在$L$的$\widehat{Pr_1}$上，另一方面，$-q_2$又应在$-C$上，但$C$是一闭曲线，它把$S^2$分成两部分，$-C$不能和$C$有公共点，但其上既有位于$C$内部的点$-P$，又有位于$C$外部的点$-q_2$，这和Jordan曲线定理相矛盾。所以$C$必全部位于半球面$H$中。

在$R^3$中取适当的坐标系，使$L$成为大圆$x_1^2+x_2^2=1$。然后用中心投影把闭轨$C$投影到$\Pi_3$上，成为$W_Q(x)$的闭轨$C^*$。现在如果$C$不是严格凸的，则$S^2$上必有一大圆$L'$，它和$C$除了一个切点$m$以外，还有其他切点$n$，或交点$n_1$与$n_2$，这些点都在$H$中。经过中心投影，$L'$成为$\Pi_3$上的直线$l'$，它和$C^*$有两个切点或一个切点两个交点，从而$l'$与$W_Q(x)$的轨线的切点至少有三个，这是和性质22.1相矛盾。因此$C$是$Q_T(x)$的严格凸闭轨。▌

**性质22.5** $R_Q$、$S_Q$和$W_Q$分别在$\Pi_1$、$\Pi_2$和$\Pi_3$上的闭轨也都是严格凸的。

**性质22.6** 在$W_Q(x)$的闭轨或同宿奇闭轨上不能含有直线段。

**性质22.6′** $Q_T(x)$在$S^2$上的闭轨或同宿奇闭轨上不能含有大圆的弧段。

这两性质可以作为性质22.5与性质22.5′的推论，也可以由微分方程解的唯一性用反证法推出来。

**性质22.7** 设$P$是$W_Q(x)$在$\Pi_3$上的一个奇点，并且$W_Q(x)$在$P$的一次近似的特征根都是实的，则过$P$必存在$W_Q(x)$的一条不变直线或无切直线$l$。在后一情况，轨线都以相同的方向穿过$l$[22.9]。

**证** 不妨设$P=O(0,0)$，而通过$O$的任一直线$L$的方程是$V=x_2-kx_1=0$。于是(注意$a_{33}=b_{33}=0$)：

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_l = [W_Q^2(x) - kW_Q^1(x)]_l = f(k)x_1^2 + g(k)x_1, \quad (22.11)$$

其中

$$f(k) = b_{11} + (b_{12} - a_{11})k + (b_{22} - a_{12})k^2 - a_{22}k^3,$$
$$g(k) = b_{13} + (b_{23} - a_{13})k - a_{23}k^2.$$

由假设

$$\frac{dx_1}{dt} = (-c_{33} + a_{13})x_1 + a_{23}x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = b_{13}x_1 - (c_{33} - b_{23})x_2 \quad (22.12)$$

有实的特征根。故知

$$(b_{23} - a_{13})^2 + 4b_{13}a_{23} \geqslant 0. \quad (22.13)$$

这说明 $g(k) = 0$ 有实根。设 $k_1$ 是一实根，取 $l$ 为直线：$x_2 - k_1x_1 = 0$，于是

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_l = f(k_1)x_1^2. \quad (22.14)$$

如果 $k_1$ 也是 $f(k) = 0$ 的根，则由(22.14)知 $l$ 是 $W_Q(x)$ 的不变直线；否则 $l$ 是 $W_Q(x)$ 的无切直线，且轨线都从同一方向穿过 $l$。证毕。 ∎

由此性质立刻可以推出下一重要的性质：

**性质 22.8** $W_Q(x)$ 在 $\Pi_3$ 上的任何闭轨所围的区域内只有唯一的奇点，它必定是焦点或中心[22.9]。

**证** 由性质22.7知 $W_Q(x)$ 的闭轨 $C$ 内部的奇点只能是焦点或中心。如果 $C$ 内部有多于一个的焦点或中心，则由于这些奇点的指标之和应为 $+1$，故除焦点或中心外，还应有指标为 $-1$ 的鞍点，这也是不可能的。 ∎

**性质 22.8′** $Q_T(x)$ 在 $S^2$ 上的任何闭轨所围的区域中只能有一个奇点，它必定是焦点或中心[22.5]。

这由性质22.5′和性质22.8可以推出来。

**性质 22.9′** $Q_T(x)$ 在 $S^2$ 上的中心及其闭轨族不能充满整个球面 $S^2$[22.9]。

**证** 显然，若 $S^2$ 上有多于四个奇点，则此性质必然成立。今

设 $Q_\Gamma(x)$ 在 $S^2$ 上只有两个中心，由对称性，在每个半球面内有一个中心点。如果每一中心及其闭轨族充满了一个半球面，则两个中心区域公共边界是一大圆。由性质 22.3'，这个大圆上必含有奇点；所以这个边界大圆不是闭轨。 ∎

附注 对 $R^3$ 中的一次齐次向量场，其在 $S^2$ 上诱导出的切向量场是可以有两个中心点，它们以及其外的闭轨族一起充满了整个 $S^2$。例如取：

$$Q_1 = x_1 - x_2,\ Q_2 = x_1 + x_2,\ Q_3 = x_3.$$

则 $W_Q = (-x_2, x_1, 0)$，它的中心和闭轨充满 $\Pi_3$。用中心投影可得充满 $S^2$ 的两个中心区域，它们的边界大圆上也无奇点[22.9]。

但对于我们所讨论的 $Q_\Gamma(x)$，即使容许边界大圆上有奇点，类似的，充满半球面内部的中心区域是否存在，还待举出具体的例子来。

由文献[22.10]，一条闭轨线 $\Gamma$ 称为是强稳定(不稳定)，如果发散量在 $\Gamma$ 上处处为负(正)。如所熟知，二次系统的闭轨必和发散量直线相交，故不存在强稳定和强不稳定极限环。但对 $\Pi_3$ 上的 $W_Q(x)$，它的发散量曲线：

$$\mathscr{L}:\ \operatorname{div}(W_Q^1, W_Q^2) = 0$$

是一条二次曲线，当它是椭圆时，只有唯一的有界闭分支，而包含 $\mathscr{L}$ 在其内部的强稳定或强不稳定极限环是可能存在的。当然，如果存在，只能有一个，它或是强稳定，或是强不稳定[22.9]。

例 22.1 令 $Q(x)$ 为：

$$Q_1(x) = x_2x_3,\ Q_2(x) = -x_1x_3,\ Q_3(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2. \quad (22.15)$$

则在 $\Pi_3$ 中有：

$$W_Q(x) = (-x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + x_2,\ -x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) - x_1,\ 0).$$

易见它有唯一的极限环 $L$：$x_1^2 + x_2^2 = 1$。另一方面，发散量曲线 $\mathscr{L}$ 是 $-2(2x_1^2 + 2x_2^2 - 1) = 0$，即一个位于极限环内部的圆。易见 $L$ 是强稳定极限环。

若用中心投影，可以得到 $Q_\Gamma(x)$ 在上半球面($x_3 > 0$)中的一

个极限环 $L_1$，在下半球面 $(x_3<0)$ 中的一个极限环 $L_2$。现在按(22.4)式计算 $Q_T(x)$：

$$Q_T(x)=Q(x)-\langle x,Q(x)\rangle\cdot x=(x_2x_3,\ -x_1x_3,\ x_1^2+x_2^2-x_3^2)-x_3(x_1^2+x_2^2-x_3^2)(x_1,\ x_2,\ x_3),\tag{22.16}$$

故 $Q_T(x)$ 的分量为：

$$\begin{aligned}P_1&=x_2x_3-x_1x_3(x_1^2+x_2^2-x_3^2),\\P_2&=-x_1x_3-x_2x_3(x_1^2+x_2^2-x_3^2),\\P_3&=(1-x_3^2)(x_1^2+x_2^2-x_3^2)。\end{aligned}\tag{22.17}$$

而 $Q_T(x)$ 的发散量是：

$$\frac{\partial P_1}{\partial x_1}+\frac{\partial P_2}{\partial x_2}+\frac{\partial P_3}{\partial x_3}=-2x_3[1+3(x_1^2+x_2^2-x_3^2)]。\tag{22.18}$$

又 $L_1$ 与 $L_2$ 的方程为：

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0,\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1。\tag{22.19}$$

由此可见，在 $L_1$ 上处处有 $x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}$，而

$$\mathrm{div}(P_1,\ P_2,\ P_3)|_{L_1}=-\sqrt{2}<0,$$

即 $L_1$ 为强稳定极限环。又在 $L_2$ 上处处有 $x_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，而

$$\mathrm{div}(P_1,\ P_2,\ P_3)|_{L_2}=\sqrt{2}>0,$$

故 $L_2$ 为强不稳定极限环，$L_1(L_2)$ 与 $L$ 有相同(不同)的稳定性。

又由性质22.1及性质22.7可得：

**性质 22.10**　$W_Q(x)$ 在 $\Pi_3$ 上的闭轨线的相对位置不可能呈图22.5的形状，因此它的闭轨只能集中在同一个焦点外围，或是分别出现在两个焦点外围[22.9]。

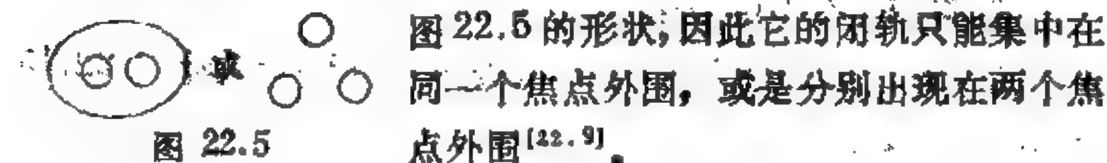



图 22.5

相应的 $Q_T(x)$ 在 $S^2$ 上的闭轨分布若限于一个半球面上，也是如此。由于对称性可知有如下性质成立：

**性质 22.10′**　$Q_T(x)$ 在 $S^2$ 上的闭轨只能集中分布在两个直径相对的焦点外围，或是分别出现在四个(两两直径相对)焦点的外围[22.9]。

**性质 22.11′** $Q_T(x)$ 在 $S^2$ 上至多有 14 个奇点（假设奇点孤立且皆为初等的）成对地出现在过 $O(0, 0, 0)$ 的直线与 $S^2$ 的交点处。当有 14 个奇点时，必有 8 个指标为 $+1$, 6 个指标为 $-1$。但 $Q_T(x)$ 也可能有 10 个（6 个指标为 $+1$, 4 个指标为 $-1$），6 个（4 个指标为 $+1$, 2 个指标为 $-1$）或 2 个（都是指标 $+1$）奇点[22, 4]。

**证** 由对称性及 Poincaré 指标定理知道，$Q_T(x)$ 若在 $S^2$ 上有 $2s$ 个指标为 $-1$ 的鞍点，则必有 $2s+2$ 个指标为 $+1$ 的非鞍点，故奇点的总个数是 $4s+2$。

由于 $Q_T(x)$ 的一个奇点决定了 $Q(x)$ 在 $R^3$ 中的二条射线解。故不妨设 $Q(x)$ 至少有 6 条不位于同一平面中的射线解。它们确定过 $O(0, 0, 0)$ 三个不在同一平面中的方向。若取这三个方向为 $x_1$、$x_2$、$x_3$ 轴的正方向，则 $Q(x)$ 的三个分支可表为：

$$\begin{aligned}
Q_1(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3,\\
Q_2(x_1, x_2, x_3) &= b_{22}x_2^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3,\\
Q_3(x_1, x_2, x_3) &= c_{33}x_3^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + c_{23}x_2x_3.
\end{aligned} \tag{22.20}$$

由对称性及中心投影的性质可知：

$$Q_T \text{ 的奇点个数} = 2\times W_Q(x) \text{ 的奇点个数} + Q_T|_{E_1} \text{ 的奇点个数}。 \tag{22.21}$$

又由 (22.20) 可算出 $W_Q(x) = (W_Q^1, W_Q^2, 0)$ 的支量为：

$$\begin{aligned}
W_Q^1(x_1, x_2, 1) &= x_1^2(a_{11} - c_{13}) + x_1(a_{13} - c_{33})\\
&\quad + a_{23}x_2 + (a_{12} - c_{23})x_1x_2 - c_{12}x_1^2x_2,\\
W_Q^2(x_1, x_2, 1) &= x_2^2(b_{22} - c_{23}) + x_2(b_{23} - c_{33})\\
&\quad + b_{13}x_1 + (b_{12} - c_{13})x_1x_2 - c_{12}x_1x_2^2.
\end{aligned}$$

由 $W_Q^1 = 0$ 可解出：

$$x_2 = \frac{(a_{11} - c_{13})x_1^2 + (a_{13} - c_{33})x_1}{c_{12}x_1^2 + (c_{23} - a_{12})x_1 - a_{23}}. \tag{22.22}$$

由 $W_Q^2 = 0$ 可解出：

$$x_1 = \frac{(b_{22} - c_{23})x_2^2 + (b_{23} - c_{33})x_2}{c_{12}x_2^2 + (c_{13} - b_{12})x_2 - b_{13}}. \tag{22.23}$$

首先，设 $c_{12}\neq 0$，则以 (22.22) 代入 (22.23)，化简，可得 $x_1$ 的

5次方程，故 $W_Q(x)$ 最多有5个奇点。另一方面，$Q_I|_{\Pi_0}$ 至少有4个奇点。它们是由 $x_1$ 与 $x_2$ 轴确定的。如果 $\Pi_0$ 上还有一个射线解 $x_2=\lambda x_1$ $(\lambda\neq 0)$，则 $Q_3(x_1, \lambda x_1, 0)=c_{12}\lambda x_1^2=0$，从而 $c_{12}=0$，这与假设不合。故 $Q_I|_{\Pi_0}$ 恰有4个奇点。于是由公式(22.21)知道，这时 $Q_T(x)$ 最多只有14个奇点。

次设 $c_{12}=0$，则 $Q_3(x_1, x_2, 0)=0$。这表示 $Q_T(x)$ 在 $(x_1, x_2)$ 平面中所确定的向量的第三个支量都等于零。故 $Q(x_1, x_2, 0)=(Q_1, Q_2, 0)(x_1, x_2, 0)$ 是 $R^2$ 中的二次齐次向量场。由文献[22.11] §10 知道，这种向量场最多有三个射线解，即 $Q_I|_{\Pi_0}$ 最多有6个奇点。另一方面，$W_Q(x)$ 在 $\Pi_3$ 上最多有4个奇点，因为它是二次系统，再用(22.21)式，即得 $Q_T(x)$ 最多只有14个奇点。

因为奇点的总数已知为 $4s+2$，其中 $s$ 是指标为 $-1$ 的鞍点的个数。故 $s$ 只能取值 $s=0, 1, 2, 3$。而相应的 $Q_T(x)$ 的奇点个数为2, 6, 10, 14。

与此相应有如下性质：

**性质 22.11** $\Pi_3$ 上的 $W_Q(x)$ 最多只能有7个奇点，其中包括无限远奇点。

注意：在二次系统的情况，奇点最多也只能有7个，其中有限远奇点最多有4个。而由性质22.11′的证明中看出，$W_Q(x)$ 却可能有5个有限远奇点，2个无限远奇点，情况和二次系统不完全一样。

**例 22.2** 取 $Q=(Q_1, Q_2, Q_3)$ 如下：

$$Q_1(x)=x_1^2-2x_1x_3+2x_2x_3,$$
$$Q_2(x)=x_2^2+2x_1x_2+3x_1x_3-x_2x_3,\quad Q_3=x_1x_2. \tag{22.24}$$

则 $W_Q(x)$ 为：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1^2+x_1^2x_2+2x_1-2x_2,\\ \dot{x}_2=x_1x_2^2-x_2^2-2x_1x_2-3x_1+x_2.\end{cases} \tag{22.25}$$

由 $W_Q^1=0$ 与 $W_Q^2=0$ 分别解出：

$$x_2=\frac{x_1^2-2x_1}{x_1^2-2},\quad x_1=\frac{x_2^2-x_2}{x_2^2-2x_2-3}. \tag{22.26}$$

以后一式代入前一式，化简可得：

$$x_2[x_2^4-7x_2^3-x_2^2+27x_2+12]=0. \qquad (22.27)$$

由(22.27)不难看出，$x_2$ 有 1 个零根，2 个正根和 2 个负根。两个正根约为 2.56 与 6.47；两个负根约为 $-1.58$ 与 $-0.46$。由此及(22.26)的第二式可算出相应的 $x_1$[1]。故(22.25)确有 5 个有限远奇点。此外，它还有 2 个无限远奇点(1, 0, 0)和(0, 1, 0)。

**性质 22.12′** 在 $S^2$ 上 $Q_7(x)$ 的任一内侧可以定义 Poincaré 的返回映射的异宿环上至多有 3 个鞍点。

**证** 由于在 $S^2$ 的一个半球面上 $Q_7(x)$ 最多只能有 3 个鞍点，故若异宿环 $\Gamma$ 上有 4 个鞍点 $s_1$, $s_2$, $s_3$, $s_4$, 则其中必有 2 个鞍点是直径相对的。不妨设 $s_2$ 与 $s_4=-s_2$ 为直径相对，则 $s_2$ 与 $s_4$ 必在过 $s_1$ 与 $s_3$ 的大圆的异侧，如图 22.6 所示。由此可见在大圆 $l$ 上有至少三个非直径相对的切点 $s_1$、$P$ 与 $s_3$。从而 $l$ 本身应是 $Q_7(x)$ 的不变大圆，这是不可能的。∎

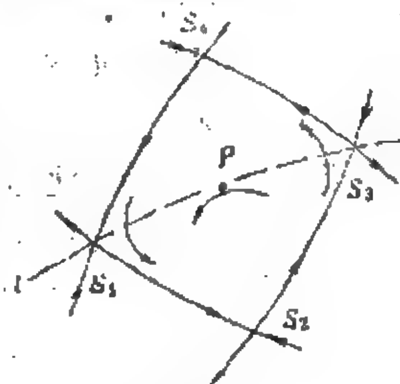


图 22.6

利用性质 22.1 (或 22.1′) 和性质 22.12′ 还可以证明与平面二次系统相同的如下性质：

**性质 22.13′** 以 $S_i(i=1, 2, 3)$ 记经过 $i$ 个鞍点，且内部可以定义返回映射的 $Q_7(x)$ 的奇异环，则 $S_1$ 的内部只含唯一的奇点，它是中心或焦点。两个 $S_1$ 不能经过同一鞍点，不论它们是构成∞字形还是◎形。又若 $S_k(k=2, 3)$ 上两个鞍点 $p_1$、$p_2$ 位于某一大圆上，则此大圆的劣弧 $\widehat{p_1p_2}$ 必属于 $S_k$ 的一部分。由此可知，$S_3$ 是由三段大圆弧构成的球面三角形。

证明从略。

**定义 22.2** 如果 $\gamma$ 是 $Q_7(x)$ 在 $S^2$ 上的一条孤立闭轨或极限环，则称按(22.7)式定义的 $S(\gamma)$ 为向量场 $Q(x)$ 在 $R^3$ 中的孤立

---

1) 相应的 $x_1\approx-2.56$, 1.36, 1.55, $-0.37$。它们是方程 $x_1^4-11x_1^2+7x_1+4=0$ 的根。此外还有根 $x_1=0$。

不变闭锥面。

由平面上多项式系统极限环个数的有限性不难推得如下性质：

**性质 22.14′**　$Q(x)$ 在 $R^3$ 中最多只能有有限个的孤立闭锥面。

证明见文献[22.12]。

在 §4 中我们已看到，为了研究平面二次系统的极限环问题，把方程化为各种形式的标准型很有好处。仿此，为了研究 $Q_T(x)$ 在 $S^2$ 上的极限环问题，也可以考虑如何把 $\Pi_3$ 上的向量场 $W_Q(x)$ 化为标准型的问题。

**性质 22.15′**　如果 $Q_T$ 在 $S^2$ 上存在一个不变大圆，则可适当旋转坐标系，使 $W_Q(x)$ 成为平面二次多项式系统[22.9]。

**证**　我们可以如此选取坐标轴，使这个不变大圆的方程成为 $x_3=0$, $x_1^2+x_2^2=1$，即这时 $Q(x)$（记为 $Q^*(x)$）成为：

$$\begin{cases} Q_1^*(x)=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2, \\ Q_2^*(x)=b_{11}x_1^2+b_{12}x_1x_2+b_{13}x_1x_3+b_{22}x_2^2+b_{23}x_2x_3+b_{33}x_3^2, \\ Q_3^*(x)=c_{13}x_1x_3+c_{23}x_2x_3+c_{33}x_3^2. \end{cases} \tag{22.28}$$

于是相应的 $W_Q^*(x)=(W_Q^1(x),\ W_Q^2(x),\ 0)$ 的支量是：

$$\begin{aligned} W_Q^1(x)&=Q_1^*(x)-x_1(c_{13}x_1+c_{23}x_2+c_{33}), \\ W_Q^2(x)&=Q_2^*(x)-x_2(c_{13}x_1+c_{23}x_2+c_{33}). \end{aligned} \tag{22.29}$$

故 $W_Q^*(x)$ 是 $\Pi_3$ 平面上的二次多项式系统。

由性质 22.15′ 结合“有一条积分直线的平面实二次系统最多只有一个极限环”的事实，可得如下推论：

**推论 22.1**　如果 $Q_T(x)$ 在 $S^2$ 上存在两个不变大圆，则它至多有两个（关于 $O(0, 0, 0)$ 对称的）极限环。

文献 [22.9] 中还有一些化 $W_Q(x)$ 为某种与平面二次系统的标准型类似的标准型，然后导出极限环不存在或唯一的结论。不在这里一一细述了。

此外，为了研究 $W_Q(x)$ 在 $\Pi_3$ 上有中心的条件（由于 $W_Q(x)$

的支量含有 $x_1$、$x_2$ 的三次项，情况显然比二次系统要复杂些)，在[22.13]中注意到，若取 $Q_T(x)$ 在 $S^2$ 上的一个中心为 (0, 0, 1)，则必有 $a_{33}=b_{33}=0$，且由于这时 $W_Q(x)$ 的两个支量的线性部分的特征根应是纯虚数，故必有

$$\begin{cases} Q_1(x) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3, \\ Q_2(x) = b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3, \\ Q_3(x) = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + c_{22}x_2^2 + c_{23}x_2x_3 + c_{33}x_3^2. \end{cases} \tag{22.30}$$

且其中的系数应满足条件：

$$a_{13}=b_{23},\quad (a_{13}-c_{33})^2+b_{13}a_{23}<0. \tag{22.31}$$

这是因为与(22.30)对应的 $W_Q(x)$ 的支量是：

$$\begin{cases} W_Q^1(x) = Q_1(x) - x_1Q_3(x) = (a_{13}-c_{33})x_1 + a_{23}x_2 + h.\ o.\ t., \\ W_Q^2(x) = Q_2(x) - x_2Q_3(x) = b_{13}x_1 + (b_{23}-c_{33})x_2 + h.\ o.\ t.. \end{cases} \tag{22.32}$$

然后根据 $W_Q(x)$ 在 (0, 0, 1) 的特征根为纯虚根的要求立刻可导出条件(22.31)。

由(22.32)可知在 $\Pi_3$ 上 $W_Q(x)$ 的方程可写成：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_2 + lx_1^2 + mx_1x_2 + nx_2^2 \\ \qquad + x_1(-c_{11}x_1^2 - c_{12}x_1x_2 - c_{22}x_2^2), \\ \dot{x}_2 = cx_1 + ax_2 + px_1^2 + qx_1x_2 + rx_2^2 \\ \qquad + x_2(-c_{11}x_1^2 - c_{12}x_1x_2 - c_{22}x_2^2). \end{cases} \tag{22.33}$$

其中 $a^2+bc<0$。然后应用文献 [22.14] 中的结果 [22.13] 导出(22.33)存在中心的充要条件。

又在文献[22.15]中将本节所介绍的[22.4]、[22.5]、[22.9]内的某些结果推广到 $R^3$ 中的 $n$ 次齐次向量场。

在文献 [22.17] 中研究了 $R^3$ 中的齐一次向量场的轨线的全局结构图，得到 26 种不同的拓扑结构。与[22.16]比较可知，同是 $R^3$ 中的一次齐向量场，在 $S^2$ 上考虑 $Q_T(x)$ 的全局拓扑结构问题与在 $R^3$ 中考虑 $Q(x)$ 的同一问题其结论是不一样的。

此外，梁肇军还注意到：若考虑 $R^4$ 中的二次齐向量场 $Q(x)$，

$$\dot{x}_1 = 10x_2x_4 - 9x_1x_4,\quad \dot{x}_2 = \mu x_1x_4 - x_1x_3,$$
$$\dot{x}_3 = x_1x_2 - \frac{5}{3}x_3x_4,\quad \dot{x}_4 = x_4^2$$

在 $S^3$ 上所诱导出的切向量场 $Q_T(x)$ 在 $\Pi_4 = \{x \in R^4 | x_4 = 1\}$ 上的投影向量场 $W_Q(x)$：$\dot{x}_1 = 10(x_2 - x_1)$，$\dot{x}_2 = \mu x_1 - x_2 - x_1x_3$，

$$\dot{x}_3 = x_1x_2 - \frac{8}{3}x_3,$$

得到的正好就是一个形如(22.1)的 Lorenz 方程，由此可见齐次向量场的广泛性。

## 参 考 文 献


[22.1] Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos, Springer-Verlag, World Publ. Corp. (1990).

[22.2] Coleman C. A certain class of integral curves in 3-space, Ann. of Math. v. 69(1969), no.3, 678～685.

[22.3] Sharipov Sh R.Classification of integral manifolds of a homogeneous three-dimensional system according to the structure of limit sets. Diff.Uravn.7(1971), 355～363.

[22.4] Camacho M I T. Geometric properties of homogeneous vector fields of degree two in $R^3$, Trans. Amer. Math. Soc. v. 268(1981), no.1, 79～101.

[22.5] 吴葵光。$R^3$ 中二次齐次向量场的一些性质和分类问题。科学通报，1988, no.18, 1364～1368.

[22.6] Chen Guang-qing and Liang Zhao jun. Affine classification for the quadratic vector fields without critical points at infinity, J. Math. Anal. Appl. v. 170(1992), 或陈广卿，梁肇军。没有无限远奇点的平面二次向量场的仿射分类及全局结构。常微分方程与控制论，华中师范大学出版社，1988, 260.

[22.7] 梁肇军．$RP^2$ 上二次微分系统的拓扑分类。数学学报，1990, v. 33, 779～785.

[22.8] 叶彦谦，曲面动力系统。科学出版社，1990.

[22.9] Liang Zhaojun. Periodic orbits of homogeneous vector fields of degree two in $R^3$, Dynamical Systems, Proc. Spec. Prog. Nankai Inst. Math., 1990—1991, v.4(1993), 111～125, World Scientific Singapore.

[22.10] Diliberto S P.On systems of ordinary differential equations, Contr.Theo.Non-linear Oscil.I(1950), 1～38.

[22.11] 叶彦谦等。极限环论。上海科学技术出版社，1984。

[22.12] 梁肇军。$R^3$中二次齐次向量场的孤立闭锥面个数的有限性（预印本，1992）。

[22.13] Liang Zhaojun and Sleeman B D. The invariant closed cones of homogeneous vector fields of degree two in $R^3$ (Preprint, 1991).

[22.14] Christopher C J. Invariant algebraic curves and conditions for a centre (Preprint, 1991).

[22.15] Liang Zhaojun. Geometric properties of homogeneous vector field of degree $n$ in $R^3$(Preprint, 1992).

[22.16] 孟晓明。$R^3$中一次齐向量场在球面上轨线全局结构的拓扑分类（预印本，1992）。

[22.17] Zhang Xin-an and Liang Zhaojun. The global topological structure of homogeneous vector fields of degree one in $R^3$ (Preprint, 1992).

# § 23. 问题、猜想和答案

作者曾在文献[23.1]中对多项式系统以及有关的平面自治系统的定性理论提出过8个问题与猜想，其中多数在本书的有关章节中已提到，除了问题I、II和猜想I以外。三年以来，文献[23.1]中的问题I已得解决，猜想I最近在文献[23.2]中已得到部分解决。猜想VI已在文献[23.3]中被证明是错误的，并且另外给出一个比它更为一般的定理，已在本书§2中介绍过。本节主要简单介绍文献[23.2]的工作，同时提出另外几个本书前面各节未曾提及的问题与猜想。

首先介绍文献[23.1]的问题I：

如果一个含两参数$\alpha$、$\beta$的平面自治系统有两个极限环$\Gamma_2\supset\Gamma_1$，当$\alpha$或$\beta$变动时，此系统都构成旋转向量场族。设当$\alpha$增大而经过$\alpha_0$时($\beta$固定)$\Gamma_1$与$\Gamma_2$相互接近，重合成为半稳定环然后消失。问在什么条件之下$\beta$的变动又能使$\Gamma_1$、$\Gamma_2$重新出现？

在对二次系统的大范围分支理论做了一些工作以后，我们发现这问题的答案很简单，即只要$0<\alpha-\alpha_0\ll1$。则当$\beta$向适当方向变动时就可使$\Gamma_1$与$\Gamma_2$重新出现，这由§14的一些分支图（如§14图14.7取$\alpha$、$\beta$分别为$m$及$\delta$，$\alpha_0=m_1^*$）或文献[23.4]中的图3，立刻可以看出，不再在此细说了。

下面研究文献[23.1]的猜想I：

若$n$次多项式系统有最多个数的指标为$+1$的奇点，即$\frac{n(n+1)}{2}$个，则其中最多只能有$\frac{n^2+1}{2}$个(当$n$是奇数)，或$\frac{n^2}{2}$个(当$n$是偶数)能是焦点或中心。

这是本书§8中所介绍的R.Conti关于多项式系统的中心个数的猜想4的推广。§8已介绍过A.Cima等的工作[23.5]。他们

证明了：$n$ 次系统的中心和细焦点个数的总和不超过 $\frac{n^2+n}{2}-1$。这个数字仅当 $n=2, 3$ 时与猜想 I 中的数字相等，当 $n\geq4$ 时它比猜想 I 中的数字大。

我们曾在本书 §13 中提到：猜想 I 当 $n=3$ 时的特例也许能用三角剖分法来研究。文献[23.2]正是应用与三角剖分类似的方法以及推广了的 Poincaré 指标定理（见本书 §1）解决了猜想 I 当 $n=3$ 时的一个特殊情况，把它推广到一般的 $n$ 次系统，并且提出新的猜想。

当用若干条直线将 Poincaré 半球面分成有限个多边形时，赤道也被分成有限个弧段，它们是轨线段或轨线段加几个奇点。下面先研究需要用到的八种情况，看看在对含赤道弧的多边形应用指标定理时，赤道弧作为某一多边形的一边，应如何计算它的 $\nu$ 与 $\sigma$ 值(见 §1)。此外，有时我们还要考虑整个赤道弧所对应的 $\nu$ 或 $\sigma$ 值。

1) 若赤道弧段 $\overline{AB}$ 不含奇点，则 $\nu=1$, $\sigma=0$, 即 $\overline{AB}$ 等价于以它为边界的区域的一个外切点。

为此，可画一以 $\overline{AB}$ 为边的三角形 $\triangle ABC$, 使其内部和边上都不含奇点，如图 1(a)，把 $\overline{AB}$ 缩成一点 $D$, 则得弯曲二边形，如图 23.1(b)。其顶点 $C$、$D$ 都是二边形的外切点。我们有

$$\text{ind}\Sigma=\text{ind}\Sigma'=1+\frac{0-2}{2}=0。$$

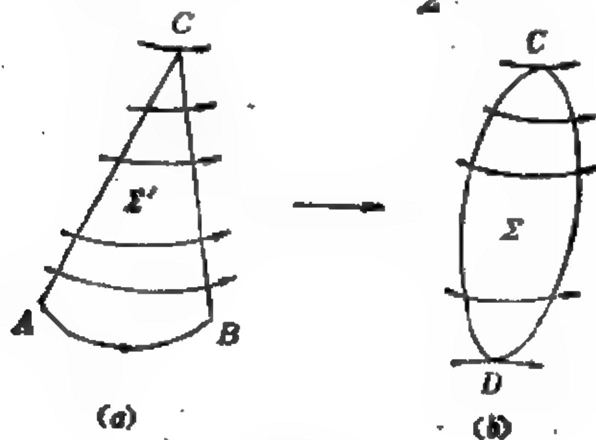



图 23.1

因此 $\overline{AB}$ 等价于一个外切点。

2) 若 $\overline{AB}$ 只含一鞍点，则 $\nu=\sigma=0$。

这可由图 23.2(a) 与 (b) 看出，其中 $E$、$F$ 及 $E'$、$F'$ 都是外切边点，$\nu=1$, $\sigma=0$, 故 $D$ 相当于一个普通的跑出点.

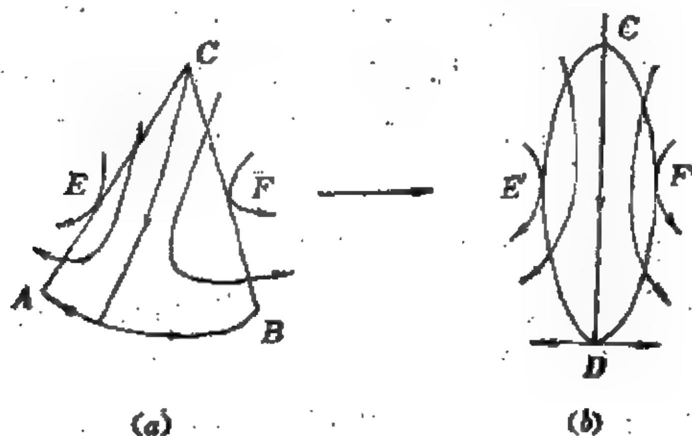



图 23.2

3) 若 $\overline{AB}$ 含两个鞍点，则 $\nu=0$, $\sigma=1$。

这由图 23.3(a) 与 (b) 可以看出，其中 $I$, $E$, $H$ 和 $I'$, $H'$, $E'$ 都是外切边点，$\nu=1$, $\sigma=0$, 因此 $D$ 相当于一内切边点，$\nu=0$, $\sigma=1$。

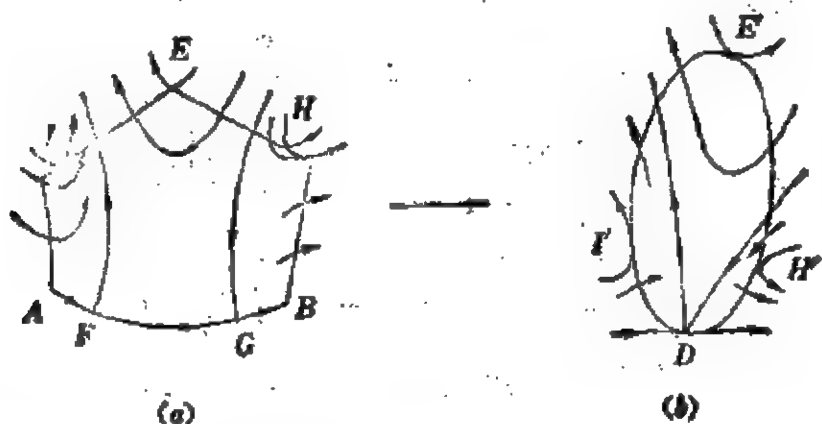



图 23.3

4) 若 $\overline{AB}$ 含三个鞍点，则 $\nu=0$, $\sigma=2$。

这由图 23.4(a) 与 (b) 可以看出。

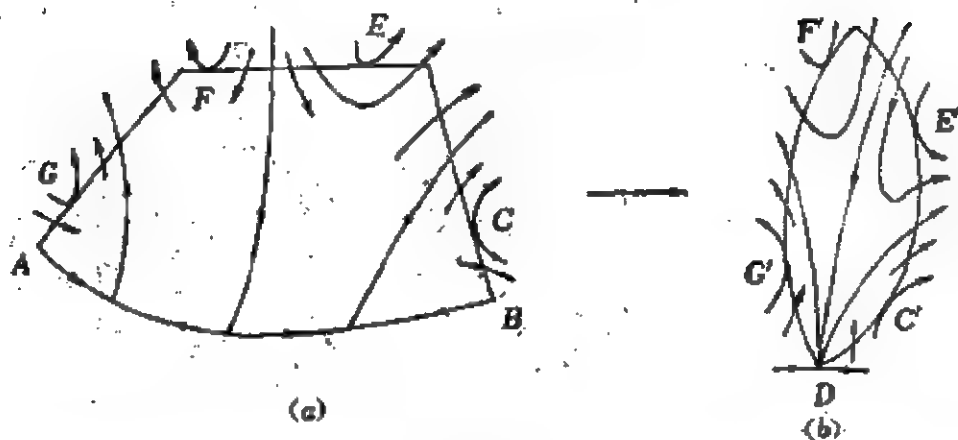



图 23.4

5) 若 $\overline{AB}$ 只含一个结点，则 $\nu=2$，$\sigma=0$ (见图 23.5(a) 与 (b))。

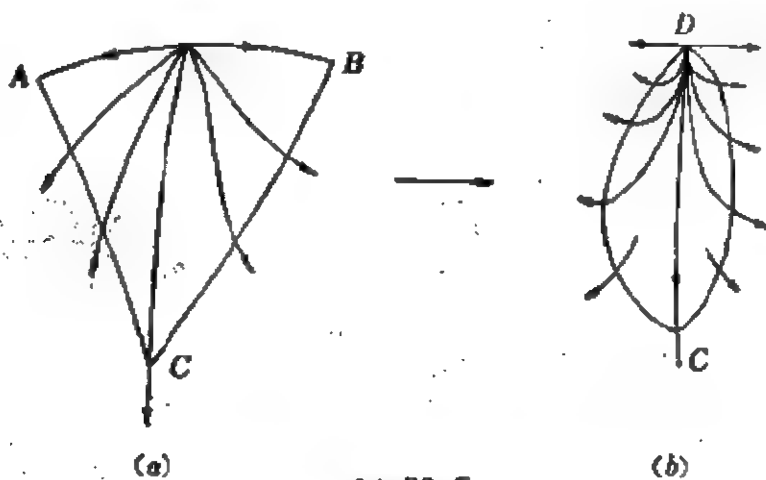



图 23.5

6) 若 $\overline{AB}$ 含一结点与一鞍点，或只含一鞍结点，则 $\nu=1$，$\sigma=0$(见图 23.6(a)，(b)，(c))，即这情况等价于 1)。

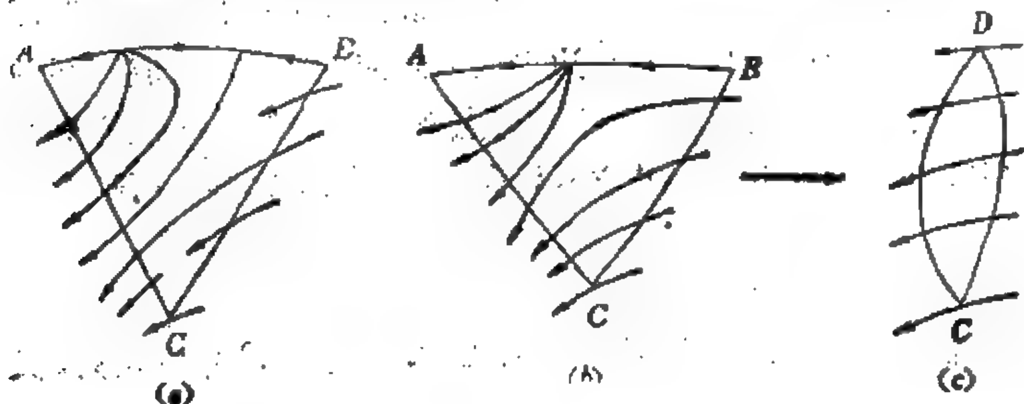



图 23.6

7) 若 $\overline{AB}$ 含两鞍点与一结点，则 $\nu=\sigma=0$（见图 23.7(a)，(b)，(a′)，(b′)）。

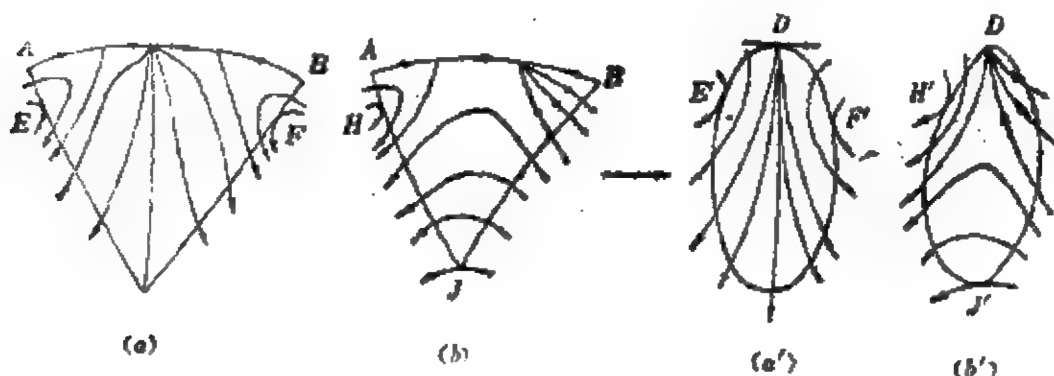



图 23.7

8) 若 $\overline{AB}$ 含三个鞍点，一个结点，则 $\sigma=1$，$\nu=0$（见图 23.8 (a)与(b)，等价于情况 3)）。

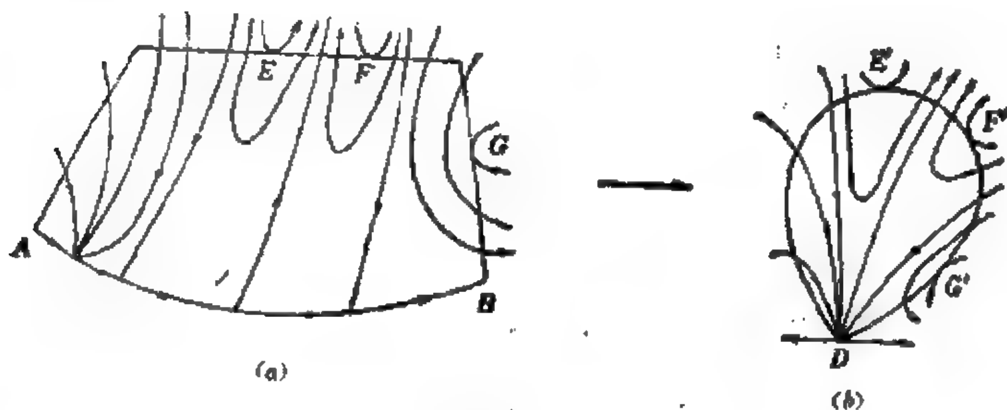



图 23.8

今以 $E$ 表示整条赤道，且设它是轨线。以 $V_i$ 表示赤道弧段 $E_i\neq E$ 作为平面区域 $G$ 的部分边界时所对应的 $\sigma$ 或 $-\nu$ 值，其中 $\sigma$ 表示 $G$ 的边界上位于 $E_i$ 上的内切点个数，$\nu$ 表示外切点的个数。那末可以得到下面的表 23.1（与 9～11 列对应的图未画出）。

由表 23.1 容易得到下面的加法律：

**规律 1**　设 $(s_i, n_i)$ 与 $V_i$ $(i=1, 2)$ 表示表 23.1 中的两列，又设

表 23.1

| $s$=鞍点数 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $n$=结点数 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $V=\sigma$或$-\nu$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |

| $s$=鞍点数 | 5 | 6 | n | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 2n |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $n$=结点数 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 6 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| $V=\sigma$或$-\nu$ | 3 | 4 | $n-2$ | $-3$ | $-1$ | $-3$ | 3 | 5 | 7 | $2n-3$ |

$$(s_3, n_3) = (s_1, n_1) + (s_2, n_2) = (s_1 + s_2, n_1 + n_2),$$

且对应的赤道弧段 $E_1$ 与 $E_2$ 满足 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$，$E_1 \cup E_2 = E_3 \subsetneq E$，则

$$V_3 = V_1 + V_2 + 1。\tag{23.1}$$

这是因为，例如当图 23.2($a$) 与图 23.5($a$) 合在一起而得到图 23.6($a$)，或图 23.3($a$) 与图 23.6($a$) 合在一起而得到图 23.8($a$) 时，不是位于赤道弧上的外切的点个数将减少一个，从而 $V_3$ 要比 $V_1+V_2$ 大 1。利用规律 1 可由表 23.1 的前 8 列通过 (23.1) 而获得后面 11 列。

下面的表 23.2 给出：当整条赤道 $E$ 是区域 $G$ 的边界（当 $G$ 为多连通域时，它还可以有其他的边界线）时，如何由 $E$ 上的鞍点与结点个数算出与 $E$ 相当的 $V$ 值。

表 23.2

| $s$=鞍点数 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 2n |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $n$=结点数 | 2 | 6 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| $V=\sigma$或$-\nu$ | 0 | $-2$ | 4 | 6 | 8 | $2n-2$ |

表 23.2 可以借助于公式：

$$V=V_i+1 \tag{23.2}$$

由表 23.1 的最后 6 列而得到。这里假设 $E$ 和 $E_i$ 含有相同的鞍点与结点，即 $E=E_i\cup E'_i$，$E_i\cap E'_i=\varnothing$。由于 $E'_i$ 不含奇点，故其对应的 $V$ 值为 $-1$。又 $E_i$ 与 $E'_i$ 是两端相接，故仿(23.1)知应有

$$V=V_i+V'_i+2=V_i-1+2=V_i+1。$$

这就是公式(23.2)。

仿此，若 $E_1\cup E_2=E$，$E_1\cap E_2=\varnothing$，但 $E_i\subsetneqq E$（对 $i=1,2$），则有

$$V=V_1+V_2+2。\tag{23.3}$$

例如，由表 23.1 的第 5、11 两列按 (23.3) 式相加，即可得到表 23.2 的第 3 列，由表 23.1 的第 9、11 两列可得表 23.2 的第 5 列，等等。

**注意** 在表 23.2 中的 $s$、$n$ 都取偶数值，因为多项式系统在赤道上的奇点成对出现。又表 23.2 中的两列不能相加，因为没有几何意义。

现在注意，当三次系统的 9 个奇点中有 6 个是指标 $+1$，3 个是指标 $-1$ 时，其指标总和是 3。因此无限远奇点的指标之和应是 $-2$。故若只考虑半赤道，则可能出现三种不同的情况：1) 三个鞍点，一个结点；2) 两个鞍点，一个鞍结点；3) 两个鞍点。由表 23.1 的第 8、3 列知道此半赤道对应的 $V$ 值为 1。

今设三次系统的 9 个奇点有 $5-3+1$ 的构形，且最外圈的 5 个指标 $+1$ 的奇点是凸五边形 $\Gamma$ 的顶点(图 23.9) $A$、$B$、$C$、$D$、$E$。如果这五个奇点都是焦点型奇点，则由于 $\Gamma$ 内部的奇点指标总和为 $-2$，由指标定理知道，$\Gamma$ 的边上至少还应有一个外切点。今设此外切点 $P$ 位于边 $\overline{CD}$ 上，$P$ 不是奇点。由 $\overline{CD}$ 边所确定的直线 $S$ 分上半球面为两个单连通域 $G_l$ 和 $G_r$，假设 $\Gamma$ 整个位于 $G_l$ 中。由于假设 $C$、$D$ 都是焦点型奇点，故 $S$ 不能是三次系统的轨线。注意，对于 $G_l$、$G_r$ 或 $\Gamma$ 的内域或外域来说，$C$、$D$ 都应被看成是外切点，即 $V_C=V_D=-1$。而 $P$ 对 $G_r$ 来说应是内切点。今对 $G_l$ 与 $G_r$

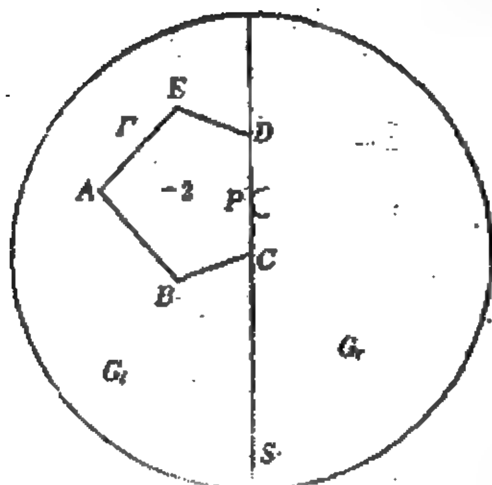



图 23.9

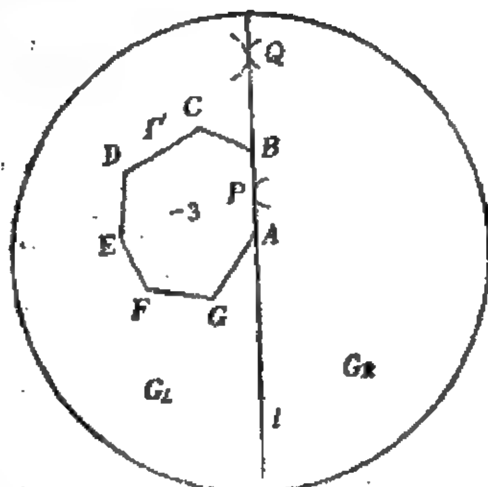



图 23.10

分别应用指标定理，可得出：

$$\Sigma_l = G_l\text{ 内部奇点指标总和} = 1 + \frac{1-3}{2} = 0,$$
$$\Sigma_r = G_r\text{ 内部奇点指标总和} = 1 + \frac{2-2}{2} = 1. \qquad (23.4)$$

但是由图 23.9 看出实际上应有

$$\Sigma_l = 1,\ \Sigma_r = 0.$$

这一矛盾说明了 $\Gamma$ 的 5 个顶点不可能都是焦点型奇点。故有以下定理：

**定理 23.1** 若三次系统的 9 个奇点有形如 $5-3+1$ 的构形，且最外圈的 5 个非鞍点是一凸 5 边形 $\Gamma$ 的顶点，则它们之中至少有一个是结点。

以上的证明方法可以很容易地推广到 $n$ 次多项式系统。例如，若四次系统的 16 个奇点有形如 $7-5+3-1$ 的构形，且最外围的 7 个非鞍点是一凸 7 边形 $\Gamma'$ 的顶点。如果它们都是焦点型奇点，则由于 $\Gamma'$ 内部奇点指标总和为 $-3$，故由指标定理知 $\Gamma'$ 必有一边上存在一个外切点。今设外切点 $P$ 位于 $\overline{AB}$ 边上(图23.10)。由 $\overline{AB}$ 确定的直线 $l$ 分上半球面为两个单连通域 $G_L$ 与 $G_R$。由表 23.1 的第 9 列知道含有 4 个鞍点 1 个结点的半赤道相当于 2 个内切点。此外，$l$ 上还应有一个切点 $Q$。因此，当 $Q$ 是 $G_L$ 的外切点时，仿(23.4)式应有：

$$\Sigma_L = G_L \text{ 内部奇点指标总和} = 1 + \frac{2-4}{2} = 0,$$
$$\Sigma_R = G_R \text{ 内部奇点指标总和} = 1 + \frac{4-2}{2} = 2. \qquad (23.5)$$

当 $Q$ 是 $G_L$ 的内切点时，则有(图 23.10 中的虚线所示)：

$$\Sigma_L = 1 + \frac{3-3}{2} = 1, \quad \Sigma_R = 1 + \frac{3-3}{2} = 1. \qquad (23.6)$$

但由图 23.10 看出实际上应有：

$$\Sigma_L = 2, \quad \Sigma_R = 0.$$

故 $\Gamma'$ 的 7 个顶点不可能都是焦点型奇点。

一般，若一$n$ 次多项式系统的 $n^2$ 个奇点有形如：

$$(2n-1) - (2n-3) + (2n-5) - \cdots + (-1)^{n-1} \qquad (23.7)$$

的构形，且最外圈的 $2n-1$ 个奇点都是焦点型的，并且它们是一凸 $2n-1$ 边形的顶点，那末这个 $2n-1$ 边形内部的奇点指标总和为 $n-1$。由指标定理知，在其某一边上还应存在一外切点。此边所确定的直线 $l$ 分上半球面为两个单连通域 $G_L$ 与 $G_R$ (仍用图 23.10)。由表 23.1 第 12 列知每一半赤道，作为 $G_L$ 或 $G_R$ 的边界的一部分，相当于 $n-2$ 个内切点。因此，代替 (23.5) 与 (23.6) 有：

$$\Sigma_L = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \text{或 } n-3,$$
$$\Sigma_R = n-2,\ n-3,\ n-4,\ \cdots,\ \text{或 } 1, \qquad (23.8)$$

根据 $G_L$ 在其边界直线 $l$ 上有 $n,\ n-1,\ n-2,\ \cdots$，或 3 个外切点而定。但实际上应有：

$$\Sigma_L = n-2, \quad \Sigma_R = 0.$$

因此这凸 $2n-1$ 边形的 $2n-1$ 个顶点中至少应有一个是结点，故有以下定理：

**定理 23.2** 若 $n$ 次多项式系统的 $n^2$ 个奇点有形如 (23.7) 的构形，且最外圈的 $2n-1$ 个非鞍点是一凸 $2n-1$ 边形的顶点，则它们之中至少有一个是结点。

当最外圈的 $2n-1$ 个非鞍点所成的 $2n-1$ 边形不是凸的，显见如上的证明将失效，因为某些边所确定的直线可能把 $2n-1$ 边

形分割成两部分了。这时，即使 $n=3$，我们也可以画出如图23.11所示的向量场分布，使得在凹五边形 $ABCDEA$ 的外部不再有有限远奇点，在由每一条边所确定的直线上都有两个奇点和一个切点，$A$, $B$, $C$, $D$, $E$ 都是焦点型奇点，且在半赤道上有三个鞍点一个结点。如果图 23.11 确能被一具体的三次系统所实现，那末文献[23.1]的猜想 I 即使当 $n=3$ 时也不一定能成立。

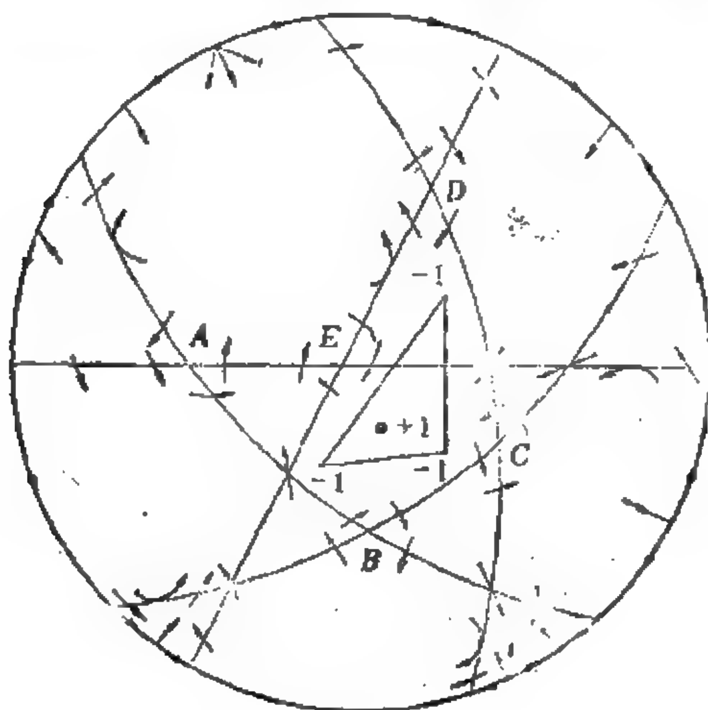



图 23.11

注意　图 23.11 中的 $A$、$B$、$C$、$D$、$E$ 除了是焦点型奇点外，也有可能是结点，只要结点的两个特征方向全都在五边形内部或全都在五边形外部。因此我们仍然相信，当图 23.11 被三次系统实现时，$A$、$B$、$C$、$D$、$E$ 五点之中必至少有一个是具有上述性质的结点。要证明或否定这个猜想看来单用指标定理是不够的。

又若在图 23.9 中代替焦点，我们把一个 $\nu=2$, $\sigma=0$ 的结点放在 $\Gamma$ 的顶点 $A$ 处，那末很容易画出一个向量场分布(图 23.12)，使 $B$、$C$、$D$、$E$ 都是焦点型奇点或对 5 边形 $ABCDE$ 来说是 $\nu=1$, $\sigma=0$ 型的结点，且在每一边所确定的直线上有唯一的切点。又在 5 边形外部没有有限远奇点。猜想 "$B$、$C$、$D$、$E$ 都是焦点型奇点"

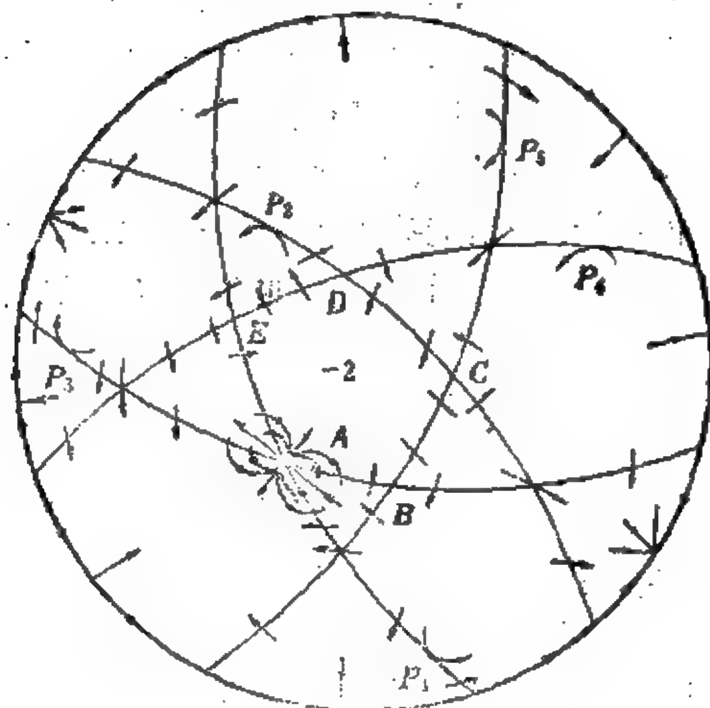



图 23.12

对三次系统是可以实现的。

因此，代替文献[23.1]的猜想Ⅱ，我们提出下列问题：

问题1　若一个三次系统的9个奇点呈5−3+1型的构形。

1）当最外圈的5个非鞍点是一个凹5边形的顶点时，它们能否都是焦点型奇点？

2）当最外圈的5个非鞍点是一个凸5边形的顶点，且其中已有一个是结点时，问其他4个非鞍点以及5边形内部的非鞍点能否都是焦点？

下面再列举其他3个问题和3个猜想：

问题2　对于§17最后所列举的那些二次系统极限环的唯一性定理，能否给出一个新的唯一性定理，把它们都作为特例？

在证明"有一退化奇点的二次系统最多只有一个极限环"时W.A.Coppel是把方程化成：

$$\dot{x} = -y + \delta x + lx^2 - \delta xy + y^2, \quad \dot{y} = x(1+ax-y). \qquad (23.9)$$

然后证明(23.9)当 $\delta = l - \frac{1}{2} = 0$ 时以 $O(0, 0)$ 为中心，而当 $\delta$ 与

$l-\frac{1}{2}$ 不同时为零时，最多只有一个极限环(见 §9)。

在证明"有重数>2的有限远半初等奇点的二次系统最多只有一个极限环"时 W.A.Coppel 把方程化为：

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2-(a+\delta)xy+y^2,\quad \dot{y}=x(1+ax-y). \tag{23.10}$$

然后证明(23.10)当 $\delta=l=0$ 时以 $O(0,\ 0)$ 为中心，而当 $\delta$、$l$ 不同时为零时最多只有一个极限环(见 §9)。

以上两个结果也可以改述如下：

以 $O(0,\ 0)$ 为中心的二次系统 $(23.9)_{\delta=l-\frac{1}{2}=0}$ 和 $(23.10)_{\delta=l=0}$ 的 Poincaré 分支方程对任何的不同时为零的 $\delta$ 与 $l-\frac{1}{2}$ (或 $\delta$、$l$) 都最多只有一个极限环，这里 $\delta$ 与 $l-\frac{1}{2}$ (或 $\delta$、$l$) 不限于小参数，而是可以取任意的不同时为零的数值。

另一方面，B.Drachman、S.van Gils 与张芷芬在[23.6]中证明

$$\dot{x}=-2y+3\lambda y^2,\ \dot{y}=-x-x^2-\mu_1 y+\mu_2 y^2 \tag{23.11}$$

当 $\lambda\in[0,\ 2\sqrt{2}/3]$, $0\leqslant|\mu_1|$, $|\mu_2|\ll 1$ 时最多只有两个极限环(见 §14)。李承治、J.Llibre 与张芷芬[23.7]证明了：

$$\dot{x}=y(y-a)+\mu_1 x,\quad \dot{y}=y(b-x)+\mu_2 x+\mu_3 y^2 \tag{23.12}$$

(其中 $\mu_2=\mu_1\nu_2$, $\mu_3=\mu_1\nu_3$, $0\leqslant|\mu_1|\ll 1$) 最多只有两个极限环 (见 §17)。[23.7]的作者们猜想(23.12)对一切 $\mu_i$ 都至多有两个极限环。

**猜想 1** 方程(23.11)对一切 $\mu_i$ 最多只有两个极限环。更一般的，有一族闭曲线的二次系统，由 Poincaré 分支所得到的极限环的最多个数适用于参数的一切数值。

记

$$\begin{aligned}
&W_0=\delta,\ W_1=m(l+n)-a(b+2l),\\
&W_2=ma(5a-m)[(l+n)^2(n+b)-a^2(b+2l+n)], \qquad (23.13)\\
&W_3=ma^2[2a^2+n(l+2a)][(l+n)^2(n+b)-a^2(b+2l+n)]
\end{aligned}$$

为二次系统

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\quad \dot{y}=x(1+ax+by)\quad (23.14)$$

在$O(0,0)$的0，1，2，3阶焦点量。

**猜想 2** 若在(23.14)的系数中让某一个变动而其他固定，使有：

$$\delta=W_2=W_3=0,\quad W_1\neq 0,\qquad (23.15)$$

则(23.14)没有绕$O$的极限环。

**注意 1** 在条件(23.15)之下有四种不同的情况：

1) $\delta=m=0$, $a(b+2l)\neq 0$;

2) $\delta=a=0$, $m(l+n)\neq 0$;

3) $\delta=m-5a=2a^2+n(l+2n)=0$, $3l+5n-b\neq 0$;

4) $\delta=(l+n)^2(n+b)-a^2(b+2l+n)=0$, $m(l+n)-a(b+2l)\neq 0$。

此猜想在情况1)、2)以及4)的一个特殊情况已得到证明（见§14）。

对系统$(23.14)_{n=0}$，在文献[23.8]中已证明：若$W_0$、$W_1$、$W_2$、$W_3$都是正的(或都是负的)，则在$O(0,0)$外围没有极限环。但[23.9]指出[23.8]中的证明有问题。[23.8]的这一猜想与[23.1]VI中的猜想2类似。

**猜想 3** §19中的方程(19.62)：

$$\dot{x}=mx+ny+x(ax+by),$$

$$\dot{y}=\bar{m}x+\bar{n}y-y(bx+ay)\qquad (23.16)$$

(其中$a<0$, $b+a>0$, $m\bar{n}-n\bar{m}>0$, $m+\bar{n}=0$)在$O(0,0)$外围最多只能有两个极限环。

若此猜想能够证明，那末结合Dulac的古典结果（见§19），我们就可以得到二次系统极限环个数有限性的一个不依赖于Il'yashenko定理的实域证明。

**问题 3** Poincaré对平面单连通域的指标定理(见§1)：

$$\Sigma=1+\frac{\sigma-\nu}{2}$$

能否推广到 $R^3$ 中的球形域?

注意,对 $R^3$ 中的区域 $G$ 和一个动力系统 $S$, $G$ 的边界上的切点除了孤立点以外还可能构成一些曲线。

问题 4 设一多项式系统只有四个有限远初等奇点,其指标之和为 $-2$, 0 或 2; 又无限远初等奇点最多有三个。如果任一直线上最多只有两个切点(包括奇点),问此多项式系统是否必为二次系统[1)]?

对三次,四次,以至 $n$ 次多项式系统当然也可提出类似的问题。如果问题 4 的答案是肯定的,则说明指标定理的用处是很大的。

# 参 考 文 献

[23.1] Ye Yanqian. Problems and conjectures in the qualitative theory of planar autonomous differential systems, EQUADIFF—91 Barcelona, 1991, 983～987, World Scientific, 1993.

[23.2] Ye Yanqian. Anti-saddles of a polynomial differential system, to appear in Chin. Ann. of Math.

[23.3] Ye Yanqian. Supplement to "Passage, blockade, sink and source of a planar dynamical system", Research Report of CRM, Institut d'Estudis Catalans, 1992, No.160, (to appear in Chin. Ann. of Math.)

[23.4] Ye Yanqian. Bifurcation diagrams of quadratic differential system having one focus and one saddle, Research Report, No. 153, 1992, Int.d'Estudis Catalans.

[23.5] Cima A. Gasull A. and Mañosas F. On polynomial Hamiltonian planar vector fields (Preprint, 1992).

[23.6] Drachman B. van Gils S. and Zhang Zhifen. Abelian integrals for quadratic vector fields, J. reine angew.Math., 382 (1987), 165～180.

[23.7] Li Chengzhi, Llibre J and Zhang Zhifen. Weak focus, limit cycles and bifurcations for bounded quadratic systems, Research Report of CRM, Institut d'Estudis Catalans, 1992.

[23.8] Xie Xiangdong. On the nonexistence of limit cycles of qua-

1) 例如,能否证明 $\dot{x}=y(y-1)(1+x^2+y^2)$, $\dot{y}=x(1+x)(2+x^2+y^2)$ 与任何直线最多只有两个切点? 此方程和 $\dot{x}=-y+y^2$, $\dot{y}=x+x^2$ 有同样的有限远和无限远实奇点。若能证明,则问题 4 的答案是否定的。

dratic system of type (Ⅲ)$_{n=0}$, Ann. Diff. Eqs. 8(1), 1992, 98~103.

[23.9] Huang Kecheng. A class of quadratic differential systems with a weak focus of order one. J. Nanjing Univ., Math. Biq., 1993, 197~201.